

Metodă rapidă de calcul al inversei matrice Jacobi

Gropa Victor ¹ and Stratan Ion ²

¹ Universitatea Tehnică a Moldovei/ Catedra Electroenergetica, Chisinau, Republica Moldova, vgropa@gmail.com

² Universitatea Tehnică a Moldovei/ Catedra Electroenergetica, Chisinau, Republica Moldova, ipstratan@gmail.com

Abstract — Această lucrare prezintă o metodă rapidă de recalcul al inversei matrice Jacobi, utilizată pe larg la calculele regimului permanent de funcționare al SEE. Metoda este bazată pe descompunerea în serie de puteri a unei funcții matriceale. În baza studiilor de caz s-a identificat numărul de elemente componente al seriei de puteri.

Keywords— metodă rapidă; ecuații algebrice; matricea Jacobi

I. INTRODUCERE

În practica de calcul adesea apare problema privind efectuarea calculului regimului permanent de funcționare a sistemului electroenergetic (SEE) pentru mai multe scenarii. Multitudinea de scenarii este provocată de modificarea informației inițiale.

În lucrare se prezintă o metodă rapidă de determinare a inversei matricei Jacobi, utilizată pe larg la calculele regimurilor permanente de funcționare ale SEE.

II. ALGORITMUL DE CALCUL

Sistemul de ecuații algebrice liniare, ce descrie regimul permanent de funcționare la un pas oarecare a procesului iterativ, în formă matriceală compactă se poate prezenta sub forma:

$$\| [J_i] + [\Delta J] \| \left[\frac{\Delta \delta}{\Delta U} \right] = - \left[\frac{W_p}{W_Q} \right]; \quad (1,a)$$

sau

$$[J_f] \left[\frac{\Delta \delta}{\Delta U} \right] = - \left[\frac{W_p}{W_Q} \right], \quad (1,b)$$

unde $[J_i]$ este matricea Jacobi aferentă regimului inițial, cu dimensiunile $2n-m \times 2n-m$ (n – numărul nodurilor independente, iar m – numărul nodurilor unde se impune P și $|U|$);

$[J_f] = [J_i] + [\Delta J]$ – matricea Jacobi aferentă regimului modificat;

$[\Delta \delta]$, $[\Delta U]$ – sunt respectiv subvectorii valorilor corecțiilor, unghiurilor de defazaj ale tensiunilor în nodurile independente față de nodul de echilibru și a modulelor tensiunilor;

$[W_p]$, $[W_Q]$ – sunt subvectorii valorilor corecțiilor puterilor la noduri la același pas al procesului iterativ.

Prin înmulțirea la stânga a relației (1) cu $[J_f^{-1}]$ se obține:

$$\left[\frac{\Delta \delta}{\Delta U} \right] = - \| [U] + [J_i^{-1}] [\Delta J] \|^{-1} [J_i^{-1}] \left[\frac{W_p}{W_Q} \right]. \quad (2)$$

Se poate semnificativ de simplificat problema determinării vectorului de stare $\left[\frac{\Delta \delta}{\Delta U} \right]$ prin dezvoltare în serie

de puteri [1,2] a expresiei din dreapta a relației (2), dacă are loc restricția:

$$\| [J_i^{-1}] \cdot [\Delta J] \| < 1, \quad (3)$$

unde $\| [J_i^{-1}] \cdot [\Delta J] \|$ este una din normele matricei.

Condiția (3) se îndeplinește pentru valori suficient de mici ale elementelor matricei $[J_f] - [J_i] = [\Delta J]$.

Atunci se poate scrie:

$$\begin{aligned} [J_f^{-1}] &= \| [U] + [J_i^{-1}] [\Delta J] \|^{-1} [J_i^{-1}] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (- [J_i^{-1}] [\Delta J])^k [J_i^{-1}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Într-adevăr, dacă ambele părți ale relației (4) se înmulțesc la stânga cu $\| [U] + [J_i^{-1}] [\Delta J] \|$, rezultă:

$$\begin{aligned} \| [U] + [J_i^{-1}] [\Delta J] \| \cdot [J_f^{-1}] &= \\ &= \| [U] + [J_i^{-1}] [\Delta J] \| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (- [J_i^{-1}] [\Delta J])^k [J_i^{-1}] \end{aligned} \quad (5)$$

Partea dreaptă a relației (5) se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \| [U] + [J_i^{-1}] [\Delta J] \| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (- [J_i^{-1}] [\Delta J])^k [J_i^{-1}] &= \| [U] + [J_i^{-1}] [\Delta J] \| \cdot \\ &\cdot \left\{ (- [J_i^{-1}] [\Delta J])^0 + (- [J_i^{-1}] [\Delta J])^1 + (- [J_i^{-1}] [\Delta J])^2 + \dots \right. \\ &\left. \dots + (- [J_i^{-1}] [\Delta J])^{k-1} + (- [J_i^{-1}] [\Delta J])^k \right\} [J_i^{-1}] \end{aligned} \quad (6)$$

Trecând la limită în această egalitate când k tinde spre infinit, și ținând seama că $(- [J_i^{-1}] [\Delta J])^0 = [U]$ și că

$([J_i^{-1} \Delta J]) \cdot (-[J_i^{-1} \Delta J])^k = ([J_i^{-1} \Delta J])^{k+1}$ precum și că $\|([J_i^{-1} \Delta J])^{k+1}\| \rightarrow [0]$, se obține:

$$\| [U] + [J_i^{-1} \Delta J] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-[J_i^{-1} \Delta J])^k [J_i^{-1}] = [J_i^{-1}]. \quad (7)$$

Ținând seama de (7) relația (5) devine:

$$\| [U] + [J_i^{-1} \Delta J] \| \cdot [J_f^{-1}] = [J_i^{-1}]. \quad (8)$$

Substituind (7) în (8) rezultă:

$$\begin{aligned} \| [U] + [J_i^{-1} \Delta J] \| [J_f^{-1}] = \\ \| [U] + [J_i^{-1} \Delta J] \| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-[J_i^{-1} \Delta J])^k [J_i^{-1}]. \quad (9) \end{aligned}$$

Prin înmulțirea ambelor părți ale relației (9) cu $\| [U] + [J_i^{-1} \Delta J] \|^{-1}$ rezultă:

$$[J_f^{-1}] = \sum_{k=0}^{\infty} (-[J_i^{-1} \Delta J])^k [J_i^{-1}]. \quad (10)$$

În cazurile uzuale de calcul relația (10) se scrie sub formele:

- dacă $k=2$:

$$\begin{aligned} [J_f^{-1}] &= (-[J_i^{-1} \Delta J])^{(0)} [J_i^{-1}] + (-[J_i^{-1} \Delta J])^{(1)} [J_i^{-1}] = \\ &= [J_i^{-1}] - [J_i^{-1} \Delta J] [J_i^{-1}] \quad (11) \end{aligned}$$

- dacă $k=3$:

$$[J_f^{-1}] = [J_i^{-1}] - [J_i^{-1} \Delta J] [J_i^{-1}] + ([J_i^{-1} \Delta J])^2 [J_i^{-1}]. \quad (12)$$

Din relația (10) rezultă că exactitatea și validitatea rezultatelor obținute sunt influențate de numărul de elemente ale seriei de puteri.

Dacă elementele matricei $[\Delta J]$ sunt astfel încât nu se îndeplinește restricția (3), atunci matricei $[\Delta J]$ se prezenta sub forma:

$$\| \Delta J \| = \sum_{i=1}^n \| \Delta J^{(i)} \|. \quad (13)$$

Elementele fiecărei din matricele relației (11) trebuie să primească așa valori ca să se îndeplinească relația (3) la fiecare pas, adică:

$$\| K^{(i)} \| = \| [J]^{-1} \| \Delta J^{(i)} \| < 1. \quad (14)$$

Condiția (11) se îndeplinește dacă elementul maximal de pe diagonala principală a matricei rezultante $\| K^{(i)} \|$ satisface inegalitatea [3]:

$$K_{ii}^{(i)} < \frac{1}{m}, \quad (15)$$

unde m este ordinul matricei Jacobi.

Pentru a demonstra utilitatea aplicării metodei propuse, la efectuarea calculului operative ale regimului permanent de funcționare al SEE, în continuare se prezintă două studii de caz bazate pe compararea valorilor elementelor a două inverse matrice Jacobi. Prima se obține prin inversarea matricei Jacobi și respectiv a doua utilizând metoda rapidă propusă.

III. STUDII DE CAZ

Studiu de caz unu

Se consideră o rețea electrică de 330 kV schema de principiu a căreia este prezentată în Fig. 1.

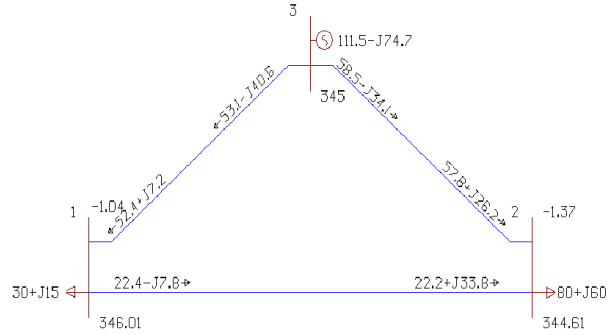


Fig. 1. Schema de principiu a RE.

Valorile parametrilor liniilor electrice sunt indicate în Tabelul I.

TABELUL I.
DATELE ÎNȚIALE LATURI

Latura, Nr. nodului	Rezistența activă, R_{ij} , [Ω]	Reactanța inductivă, X_{ij} , [Ω]	Admitanța laterală, G_i , 10^{-6} [S]	Susceptanța capacitivă, B_i , 10^{-6} [S]
1-2	3	32	1,837	350
1-3	5,89	39,36	4,187	409
2-3	5,55	48,45	3,994	519

Datele nodale sunt indicate în Tabelul II.

TABELUL II.
DATELE ÎNȚIALE NODALE

Nod, nr.	Tensiunea nominală	Producție		Consum		Tipul nodului
		P, MW	Q, Mvar	P, MW	Q, Mvar	
1	330	0	0	30	15	consum
2	330	0	0	80	60	consum

Pentru regimul inițial matricea Jacobi $[J_i]$ la ultimul pas al procesului iterativ capătă forma:

$$[J_i] := UF([Si], 10) = \begin{pmatrix} 6653.793998 & -3695.673736 & 762.559361 & -325.394208 \\ -3691.756564 & 6106.536384 & -367.177382 & 542.371605 \\ -822.559361 & 325.394208 & 6623.793998 & -3695.673736 \\ 367.177382 & -702.371605 & -3691.756564 & 5986.536384 \end{pmatrix}$$

În continuare se analizează două scenarii privind modificarea regimului inițial. Scenariu unu – sarcina activă în nodul unu s-a modificat de două ori; scenariu doi – sarcinile în toate nodurile rețelei electrice analizate s-au majorat cu 50%.

Matricele Jacobi la ultimul pas a procesului iterativ $[J_f]$ aferente scenariilor nominalizate capătă formele:

- scenariu unu:

$$[J_f] := UF([Sf], 100) = \begin{pmatrix} 6640.017659 & -3688.34723 & 730.9147 & -334.562994 \\ -3686.261891 & 6097.958179 & -356.806611 & 541.488648 \\ -850.9147 & 334.562994 & 6610.017659 & -3688.34723 \\ 356.806611 & -701.488648 & -3686.261891 & 5977.958179 \end{pmatrix}$$

- scenariu doi:

$$[J_f] := UF([Sf], 100) = \begin{pmatrix} 6562.435968 & -3630.479167 & 735.757389 & -308.752222 \\ -3624.604822 & 6010.235241 & -371.411902 & 489.371394 \\ -825.757389 & 308.752222 & 6517.435968 & -3630.479167 \\ 371.411902 & -729.371394 & -3624.604822 & 5830.235241 \end{pmatrix}$$

Totodată, inversele matricei Jacobi $[J_f]$, calculate prin inversarea matricei Jacobi și respectiv utilizând metoda propusă, devin:

- scenariu unu

$$[J_f]^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0002 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0.0003 \end{pmatrix}$$

$$[J_i]^{-1} - [J_i]^{-1} \cdot ([J_f] - [J_i]) \cdot [J_i]^{-1} + \left[[J_i]^{-1} \cdot ([J_f] - [J_i]) \right]^2 \cdot [J_i]^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0002 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0.0003 \end{pmatrix}$$

- scenariu doi

$$[J_f]^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0002 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0.0003 \end{pmatrix}$$

$$[J_i]^{-1} - [J_i]^{-1} \cdot ([J_f] - [J_i]) \cdot [J_i]^{-1} + \left[[J_i]^{-1} \cdot ([J_f] - [J_i]) \right]^2 \cdot [J_i]^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0002 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0.0003 \end{pmatrix}$$

Studiu de caz doi

Se consideră o schemă electrică de 330 kV cu șapte noduri (Fig. 2).

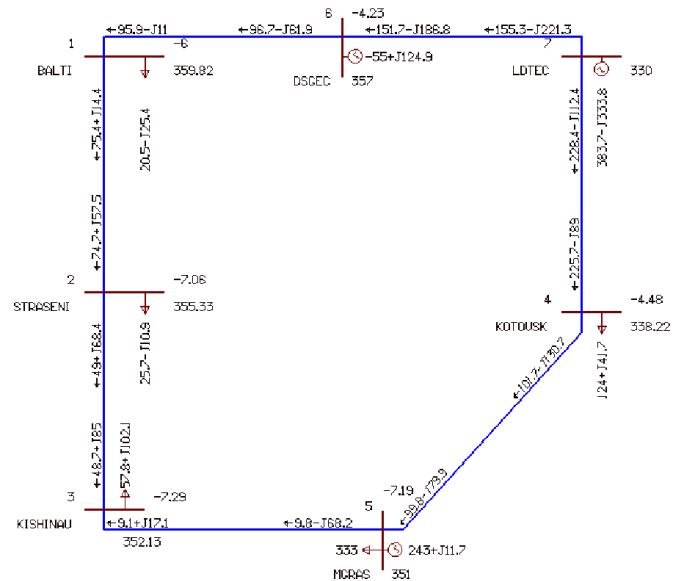


Fig. 2. Schema de principiu a RE.

Valorile parametrilor liniilor electrice și nodurilor sunt indicate Tabelele III și IV.

TABELUL III.
DATELE INIȚIALE LATURI

Latura, Nr. nodului	Rezistența activă, R_{ij} , [Ω]	Reactanța inductivă, X_{ij} , [Ω]	Admitanța laterală, G_i , 10^{-6} [S]	Susceptanța capacitivă, B_i , 10^{-6} [S]
1-2	5,047	33,784	3,594	351
2-3	2,009	13,448	1,431	140
3-5	1,861	16,198	5,326	691
5-4	7,203	48,216	5,129	501
4-7	4,181	36,499	3,009	391
7-6	5,624	49,096	4,048	526
6-1	4,514	39,406	3,249	422

TABELUL IV.
DATELE INIȚIALE NODALE

Nod, nr.	Tensiunea nominală	Producție		Consum		Tipul nodului
		P, MW	Q, Mvar	P, MW	Q, Mvar	
1	330	0	0	20,5	-25,4	consum
2	330	0	0	25,7	-10,9	consum
3	330	0	0	57,8	102,1	consum
4	330	0	0	124,0	41,7	consum
5	330	243	11,7	333,0	0	generare
6	330	0	124,9	55,0	0	generare

În acest caz matricea Jacobi $[J_i]$ la ultimul pas al procesului iterativ capătă forma:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6916	-3711.4	0	0	0	-3204.6	911.4	-484.8	0	0
2	-3691	12797.6	-9106.6	0	0	0	-621	1892.7	-1323.1	0
3	0	-9095.7	16625.4	0	-7529.7	0	0	-1396.1	2158.1	0
4	0	0	0	5404.9	-2422.7	0	0	0	0	577.5
5	0	0	-7532.5	-2388.6	9921.2	0	0	0	-853	-473.5
6	-3227.4	0	0	0	0	5569.4	-269.2	0	0	0
7	-952.4	484.8	0	0	0	467.6	6966.8	-3711.4	0	0
8	621	-1944.1	1323.1	0	0	0	-3691	12819.4	-9106.6	0
9	0	1396.1	-2273.7	0	877.5	0	0	-9095.7	16421.2	0
10	0	0	0	-825.5	245.3	0	0	0	0	5321.5

Trebuie de menționat că s-au analizat mai multe scenarii privind modificarea regimului inițial, însă sunt prezentate numai matricele Jacobi inversate, în ipoteza că sarcinile în toate nodurile rețelei electrice analizate s-au modificat cu 50%:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6894.2	-3699.1	0	0	0	-3195.2	899.9	-446.2	0	0
2	-3667.9	12692.4	-9024.5	0	0	0	-654.4	1864.9	-1287.6	0
3	0	-9006.8	16495.1	0	-7488.3	0	0	-1406.1	2104.9	0
4	0	0	0	5345	-2409.3	0	0	0	0	505
5	0	0	-7491	-2359.5	9850.5	0	0	0	-848.8	-522.7
6	-3228.9	0	0	0	0	5555.2	-220.6	0	0	0
7	-961.4	446.2	0	0	0	515.3	6970.4	-3699.1	0	0
8	654.4	-1942	1287.6	0	0	0	-3667.9	12725.1	-9024.5	0
9	0	1406.1	-2278.3	0	872.2	0	0	-9006.8	16188.8	0
10	0	0	0	-877	189.7	0	0	0	0	5219.9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.0005	0.0004	0.0003	0.0001	0.0003	0.0003	-0	-0	-0	0
2	0.0004	0.0005	0.0005	0.0002	0.0004	0.0002	-0	-0	-0	0
3	0.0003	0.0005	0.0005	0.0002	0.0004	0.0002	0	-0	-0	0
4	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0002	0.0001	0	0	0	-0
5	0.0003	0.0004	0.0004	0.0002	0.0005	0.0002	0	0	0	0
6	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0002	0.0003	-0	-0	-0	0
7	0	0	0	0	0	-0	0.0002	0.0001	0.0001	0
8	0	0	0	0	0	-0	0.0001	0.0002	0.0001	0
9	0	0	0	0	0	-0	0.0001	0.0001	0.0001	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0002

$$[J_i]^{-1} - [J_i]^{-1} \cdot (J_i - [J_i]) \cdot [J_i]^{-1} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.0005	0.0004	0.0003	0.0001	0.0003	0.0003	-0	-0	-0	0
2	0.0004	0.0005	0.0005	0.0002	0.0004	0.0002	-0	-0	-0	0
3	0.0003	0.0005	0.0005	0.0002	0.0004	0.0002	0	-0	-0	0
4	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0002	0.0001	0	0	0	-0
5	0.0003	0.0004	0.0004	0.0002	0.0005	0.0002	0	0	0	0
6	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0002	0.0003	-0	-0	-0	0
7	0	0	0	0	0	-0	0.0002	0.0001	0.0001	0
8	0	0	0	0	0	-0	0.0001	0.0002	0.0001	0
9	0	0	0	0	0	-0	0.0001	0.0001	0.0001	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0002

Din cele prezentate în studiile de caz rezultă că în ambele cazuri rezultatele obținute prin inversarea matricei Jacobi și respectiv prin utilizarea metodei rapide propuse coincid totalmente.

Aceasta ne permite să afirmăm că metoda propusă poate fi utilizată, pe scară largă, în calculele operative ale regimurilor permanente de funcționare ale SEE.

Rezultatele comparative ale calculelor efectuate sunt prezentate în Tabelul V, unde pentru fiecare scenariu ale studiilor de caz analizate sunt calculați determinanții respectivi. Cele trei scenarii sunt: scenariul unu – sarcina activă în nodul unu s-a modificat de două ori; scenariul doi – sarcinile în toate nodurile rețelei electrice analizate s-au majorat cu 20%, scenariul trei – sarcinile în toate nodurile rețelei electrice analizate s-au majorat cu 50%.

TABELUL V.
REZULTATE OBTINUTE

	Studiu de caz unu (10 ⁻¹⁵)			Studiu de caz doi (10 ⁻³⁸)		
	Scen.1.	Scen.2	Scen.3	Scen.1	Scen.2	Scen.3
Det(A)	1.3943	1.4248	1.4895	0.9880	1.0045	1.0645
Det(B)	1.3943	1.4248	1.4894	0.9880	1.0045	1.0644
Det(C)	1.3941	1.4244	1.4868	0.9875	1.0040	1.0609

$$\text{Notă: } A = [J_i]^{-1},$$

$$B = [J_i]^{-1} - [J_i]^{-1} \cdot (J_i - [J_i]) \cdot [J_i]^{-1} + [J_i]^{-1} \cdot (J_i - [J_i])^2 \cdot [J_i]^{-1},$$

$$C = [J_i]^{-1} - [J_i]^{-1} \cdot (J_i - [J_i]) \cdot [J_i]^{-1}.$$

IV. CONCLUZII

Studiile de caz prezentate în lucrare ne demonstrează că și atunci când modificarea regimului inițial are loc în urma variației sarcinilor în toate nodurile rețelei electrice în marja (0-50)% e de ajuns ca seria de puteri să includă două componente. În acest caz valorile elementelor inversei matricei Jacobi, obținute prin utilizarea metodei propuse, coincid totalmente cu valorile elementelor inversei matricei Jacobi, obținute prin inversarea ei.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Демидович Б.П. *Лекции по математической устойчивости*. - Москва: Наука, 1967. 472с.
- [2] Мальшев А.Н. *Введение в вычислительную линейную алгебру*. - Новосибирск: Наука, 1991. 227с.
- [3] Жуков Л.А., Стратан И.П. *Установившиеся режимы сложных электрических сетей и систем. Методы расчетов*. - Москва: Энергия, 1979. 406с.