Нелинейные колебания составного линейного пружинного осциллятора

Хаджи Петр Иванович,
Приднестровский государственный университет
им. Т.Г.Шевченко
Молдова, Тирасполь

Штацкая Наталья Сергеевна,
Приднестровский государственный университет
им. Т.Г.Шевченко
Молдова, Тирасполь
natali_novickaya@mail.ru

Abstract - results of researches of geometrical nonlinearity on the example of a compound spring pendulum are presented. At the same time, and the amplitude of the oscillations is essentially independent of the initial displacement and the initial velocity of the sinker and also from rigidity of springs.

Покажем, как возникает геометрическая нелинейность и каков характер колебаний на примере составного осциллятора, представленного на рис.1. Два грузика с массами m_1 и m_2 могут перемещаться без трения вдоль двух параллельных направляющих O_1x_1 и O_2x_2 в горизонтальной плоскости. К грузикам прикреплены две пружинки вдоль этих направляющих с коэффициентами упругости k_1 и k_2 и длинами l_1 и l_2, а также три пружинки с коэффициентами упругости k_3, k и k_4 и длинами l_3, l и l_4 соответственно перпендикулярно направляющим. В положении равновесия (рис.1*а*) пружинки находятся в ненапряженном состоянии. Выведем систему из положения равновесия, сместив грузики на расстояния x_1 и x_2 вдоль направляющих (рис.1*б*). Смещения являются малыми по сравнению с длинами пружинок в положении равновесия($x_1 \ll l_1, x_2 \ll l_2$). В результате пружинки деформируются и в них возникают силы упругости, противодействующие смещениям. Силы упругости F_1 и F_2, действующие на грузики вдоль направляющих, являются линейными силами. В соответствии с законом Гука силы F_1 и F_2 пропорциональны смещениям x_1 и x_2 и выражаются формулами: $F_1 = k_1x_1$, $F_2 = k_2x_2$. Сила упругости F_3 пропорциональна удлинению пружинки Δl_1, и определяется $F_3 = k_3(\sqrt{l_1^2 + x_1^2} - l_1)$. Однако возвращающей силой F_{3x}, действующей на грузик m_1 вдоль направляющей O_1x_1, является проекция силы F_3 на ось O_1x_1.Поэтому $F_{3x} = F_3x_1/\sqrt{l_1^2 + x_1^2} = k_3x_1(1 - l_1/\sqrt{l_1^2 + x_1^2})$.

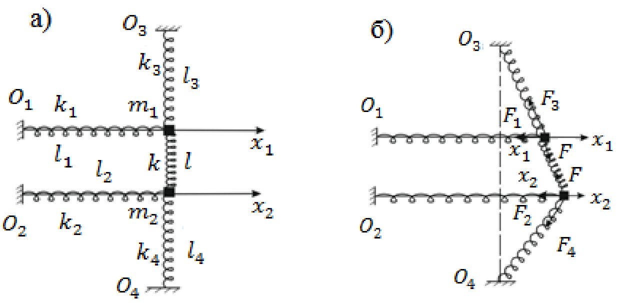

Рис.1. Пружинный маятник а) в положении равновесия и б) при смещении из положения

Так как колебания являются малыми, разложим последнее выражение в ряд по малой величине x_1^2/l_1^2 с точностью до второго слагаемого. Тогда получаем $F_{3x} = k_3x_1^3/(2l_1^2)$. Эта сила направлена в сторону, противоположную направлению смещения x_1.

Аналогичным образом можно получить возвращающие силы F_x и F_{4x}, действующие на грузики вдоль направляющих O_1x_1 и O_2x_2:

$F_x = k(x_1 - x_2)^3/(2l^2)$, $F_{4x} = k_4x_2^3/(2l_2^2)$. Отсюда видно, что возвращающие силы F_{3x}, F_x и F_{4x} являются существенно нелинейными. Они пропорциональны кубам соответствующих смещений. Все выражения для возвращающих сил получены в рамках справедливости линейного закона Гука.

Уравнения Ньютона, описывающие временную эволюцию координат x_1 и x_2 грузиков (относительно их положений равновесия), имеют вид:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_3\frac{x_1^3}{2l_1^2} - k\frac{(x_1-x_2)^3}{2l^2}, \qquad (1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k_4\frac{x_2^3}{2l_2^2} + k\frac{(x_1-x_2)^3}{2l^2}. \qquad (2)$$

Получить аналитические решения системы нелинейных уравнений (1) - (2) в общем виде не представляется возможным.

Если снять среднюю пружинку (полагая $k = 0$), то уравнения (1) и (2) становятся независимыми. Это означает, что грузики m_1 и m_2 будут колебаться независимо друг от друга. В этом случае на первый грузик действует линейная возвращающая сила со стороны первой пружинки, направленная вдоль ее оси O_1x_1, и нелинейная возвращающая сила со стороны третьей пружинки, направленная перпендикулярно к оси этой пружинки. Вводя частоты $\omega_1{}^2 = k_1/m_1$, $\omega_3{}^2 = k_3/m_1$ и полагая, что $x_{1(t=0)} = x_{10}$, $\dot{x}_{1(t=0)} = 0$, получаем первый интеграл уравнения (1) в виде:

$$x_1'{}^2 = \frac{\omega_3{}^2}{4l_1{}^2}(x_{10}{}^2 - x_1{}^2)(x_1{}^2 + x_{10}{}^2 + \frac{4l_1{}^2\omega_1{}^2}{\omega_3{}^2}). \tag{3}$$

Решение этого уравнения описывает эволюцию смещения первого грузика в зависимости от времени:

$$x_1 = x_{10} \cdot cn(\omega_1\sqrt{1 + \frac{\omega_3{}^2}{\omega_1{}^2}\frac{x_{10}{}^2}{2l_1{}^2}}t),\ k^2 = \frac{1}{2(1+2\frac{\omega_1{}^2\ l_1{}^2}{\omega_3{}^2 x_{10}{}^2})}, \tag{4}$$

где $cn\varphi$ - эллиптический косинус с модулем k [1,2]

Отсюда видно, что первый грузик совершает периодические нелинейные колебания с амплитудой, равной x_{10} , период T которых определяется выражением

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi}\frac{K(k)}{\sqrt{1+\frac{\omega_3{}^2}{\omega_1{}^2}\frac{x_{10}{}^2}{2l_1{}^2}}}, \tag{5}$$

где $T_0 = 2\pi/\omega_1$, $K(k)$- полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k [1,2]. Из (5) видно, что период колебаний осциллятора T монотонно убывает с ростом отношения x_{10}/l_1.

Литература.

[1] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик . Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИФМЛ, М., 1963.

[2] Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Изд. «Наука», М.,1968.