LUCRĂRI DE LABORATOR ASISTATE DE CALCULATOR. STUDIUL OSCILAȚIILOR PENDULULUI FIZIC ŞI DETERMINAREA ACCELERAȚIEI GRAVITAȚIONALE

Alexandru Rusu, Constantin Pîrțac, Spiridon Rusu, Vasile Tronciu
fizica.rusu@gmail.com

Abstract. *Se propune un soft creat special pentru studiul oscilațiilor pendulului fizic în cadrul lucrărilor de laborator la Fizică. Este realizată o instalație de laborator specifică utilizării unui cronometru digital interfațat calculatorului, care furnizează un şir de până la 99 intervale consecutive de timp legate de mişcarea oscilatorie a pendulului fizic. Softul permite determinarea coeficientului de amortizare a oscilațiilor pendulului, verificarea experimentală a formulei perioadei pendulului fizic ținând seama de amortizarea oscilațiilor, determinarea accelerației gravitaționale, calculul erorilor standard, stabilirea intervalului de încredere pentru un anumit nivel de confidență, construirea graficelor dependențelor studiate utilizând metoda celor mai mici pătrate, precum şi perfectarea referatului la lucrarea propusă.*

Cuvinte-cheie: *pendul fizic, amortizarea oscilațiilor*

I. Introducere

Utilizarea elementelor de cercetare la lucrările de laborator efectuate în mod tradițional este împiedicată de imposibilitatea colectării în timpul a două ore şi, mai ales, a prelucrării unui număr mare de date experimentale ce sunt indispensabile unei cercetări adevărate. Această dificultate poate fi înlăturată, dacă se folosesc aparate de măsură digitale interfațate calculatorului, precum şi softuri speciale ce permit în timp scurt achiziția datelor şi procesarea lor. În calitate de exemplu, vom analiza posibilitățile studierii oscilațiilor pendulului fizic (*fig.* 1) la lucrările de laborator, utilizând pentru măsurarea perioadei oscilațiilor un cronometru digital interfațat calculatorului. Cronometrul poate măsura până la 99 intervale consecutive de timp utilizând unul sau doi senzori. Fiecare senzor conține o sursă de radiație infraroşie emisă printr-un orificiu sub forma unui fascicol îngust şi un receptor. Intervalele de timp $t_1, t_2, t_3, \ldots t_{99}$ sunt intervalele, în care bara pendulului ce serveşte şi în calitate de obturator (*fig.* 1) acoperă, descoperă, apoi din nou acoperă şi din nou descoperă etc. fascicolul unui senzor [1]. În calitate de pendul fizic se utilizează o bară omogenă subțire cu adâncituri conice simetrice realizate peste fiecare 10 mm de la centrul ei de masă C. Bara este suspendată pe două cuie deasemenea conice, care servesc în calitate de axă de pendulare. Bara poate fi fixată pe oricare pereche de adâncituri simetrice, având astfel posibilitatea de a modifica distanța $OC = x$ de la centrul ei de masă.

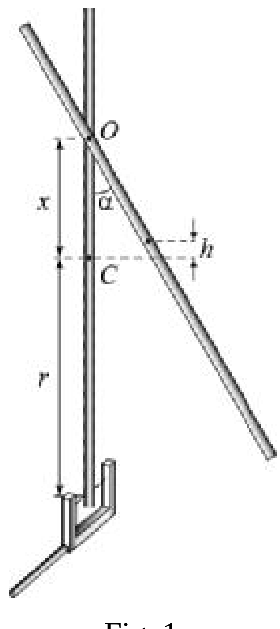

Fig. 1

II. Consideraţii teoretice şi experimentale

Perioada oscilaţiilor mici ($a \le 5^0$) neamortizate ale pendulului fizic se exprimă prin formula

$$T_0 = 2p\sqrt{I/(mgx)}\,, \tag{1}$$

unde I este momentul de inerţie a barei în raport cu axa perpendiculară figurii ce trece prin punctul O, m este masa pendulului, g - acceleraţia gravitaţională, iar $x = OC$. Oscilaţiile oricărui pendul fizic întotdeauna sunt amortizate, amplitudinea iniţială a oscilaţiilor lui A_0 micşorându-se exponenţial în timp după legea:

$$A = A_0 e^{-bt}\,, \tag{2}$$

unde b este coeficientul de amortizare a oscilaţiilor.
Respectiv, perioada oscilaţiilor creşte, devenind

$$T = \frac{2p}{\sqrt{4p^2/T_0^2 - b^2}}\,. \tag{3}$$

De aici se obţine următoarea relaţie între perioadele T şi T_0:

$$b^2 + \frac{4p^2}{T^2} = \frac{4p^2}{T_0^2}\,. \tag{4}$$

Coeficientul de amortizare poate fi determinat utilizând relaţia [2]

$$\ln\left(t_{4n+1}/t_1\right) = b\left(t_1/2 + t_2 + t_3 + \mathbf{L} + t_{4n+1}/2\right), \tag{5}$$

valabilă în cazul când faza iniţială a oscilaţiilor este nulă, valoare ce poate fi asigurată în experiment. Relaţia (5) poate fi considerată o funcţie liniară de forma $Y = pX + b$, unde $X = t_1/2 + t_2 + t_3 + \mathbf{L} + t_{4n+1}/2$ şi $Y = \ln\left(t_{4n+1}/t_1\right)$, iar panta dreptei coincide cu valoarea coeficientului de amortizare a oscilaţiilor. Termenul liber se ia $b \ne 0$ pentru a putea depista şi elimina influenţa unei eventuale erori sistematice asupra pantei dreptei, adică asupra valorii coeficientului de amortizare b. Softul propus permite achiziţia intervalelor de timp $t_1, t_2, t_3, \mathbf{L}$, construirea dreptei (5), precum şi calculul valorii coeficientului de amortizare b şi a erorii standard a acestuia. În *fig.* 2 este reprezentat graficul construit cu datele achiziţionate corespunzătoare unui număr de 15 oscilaţii complete ale pendulului fizic. Pentru coeficientul de amortizare s-a obţinut valoarea $b = (3,5 \pm 0,4)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$. Coeficientul de amortizare b coincide cu panta dreptei p calculate după punctele experimentale folosind metoda celor mai mici pătrate.

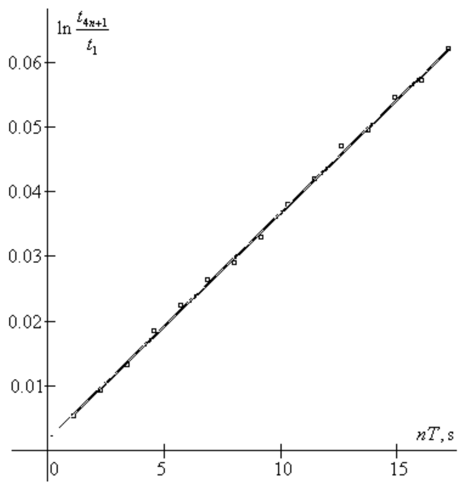

Fig. 2

Pentru valori mici ale coeficientului de amortizare, deosebirea dintre perioadele oscilaţiilor amortizate T şi neamortizate T_0 poate să fie mai mică decât eroarea cronometrului $\Delta t = 0,0004\,\mathrm{s}$: $T - T_0 < \Delta t$. Substituind aici formula (3), ţinând seamă că, de regulă, $bT_0 \square 2p$ şi utilizând formula aproximativă $1/\sqrt{1-x} \approx 1 + x/2$, obţinem următorul criteriu pentru neglijarea coeficientului de amortizare în (4):

$$b < b_0 = \frac{2p}{T_0}\sqrt{\frac{2\Delta t}{T_0}}\,. \tag{6}$$

În cazul *fig. 2*, când $T = 1,1493\,\mathrm{s}$ pentru b_0 se obţine $b_0 = 0,1\,\mathrm{s}^{-1}$. Rezultă, deci că relaţia (6) este satisfăcută şi se poate considera $b \approx 0$ şi $T = T_0$.

În conformitate cu teorema lui Steiner momentul de inerție al barei în raport cu axa de pendulare: $I_b = I_{bC} + mx^2$, unde momentul de inerție al barei în raport cu axa ce trece prin centrul ei de masă (mijlocul ei) $I_{bC} = ml^2/12$. Astfel, momentul de inerție al pendulului considerat în raport cu axa de pendulare situată la distanța x de la centrul de masă C este

$$I = ml^2/12 + mx^2. \quad (7)$$

După cum arată experiența amortizarea oscilațiilor pendulului fizic considerat este mică $\left(b \approx 0{,}05\,\mathrm{s}^{-1}\right)$, dar pentru unele valori ale distanței $OC = x$ relația (6) poate să nu fie satisfăcută. În acest caz trebuie luată în considerare amortizarea oscilațiilor pendulului. Substituind (7) în (1), pentru perioada oscilațiilor neamortizate obținem:

$$T_0 = 2p\sqrt{\frac{l^2/12 + x^2}{gx}}. \quad (9)$$

Substituind (9) în (4), pentru perioada oscilațiilor amortizate se obține relația:

$$T = \frac{2p}{\sqrt{gx/\left(l^2/12 + x^2\right) - b^2}}, \quad (10)$$

care trece în (9), dacă $b \approx 0$. Relația (10) poate fi verificată experimental transformând-o într-o dependență liniară. Într-adevăr din (10) se observă că $\frac{gx}{l^2/12 + x^2}T^2 - b^2T^2 = 4p^2$, iar de aici rezultă dependența:

$$\frac{4p^2}{T^2} + b^2 = g\frac{x}{l^2/12 + x^2} \quad (11)$$

Această relație poate fi considerată drept o funcție liniară de tipul $Y = pX + b$, unde $Y = 4p^2/T^2 + b^2$ (T se măsoară direct utilizând cronometrul electronic), $X = x/\left(l^2/12 + x^2\right)$, $b = 0$. Panta acestei drepte $p = g$. Astfel construind graficul dependenței liniare (11) după punctele experimentale, poate fi verificată formula perioadei oscilațiilor amortizate a pendulului fizic şi determinată accelerația gravitațională $g = p$. Segmentul tăiat de dreaptă pe axa ordonatelor după cum arată formula (11) trebuie să fie egal cu zero. Totuşi, dorind să excludem o eventuală eroare sistematică ce se poate comite în experiment, în procesul de măsurare şi de procesare a datelor vom considera $b \neq 0$. În *fig. 3* este reprezentat graficul dependenței (11) construit după datele experimentale achiziționate de la cronometrul electronic în urma efectuării a 12 serii din câte 15 perioade de oscilații ale pendulului fizic pentru 12 poziții ale axei de pendulare. Se observă că dependența este liniară după cum o cere relația (11). Panta dreptei $p = (9.84 \pm 0.03)\ \mathrm{m/s^2}$. Eroarea standard a fost calculată cu un nivel de confidență de 68,8%. Chiar şi cu acest nivel de încredere scăzut valoarea adevărată a accelerației gravitaționale $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ se află în interiorul intervalului de încredere obținut în experiment. Aceasta confirmă pe deplin formula perioadei oscilațiilor

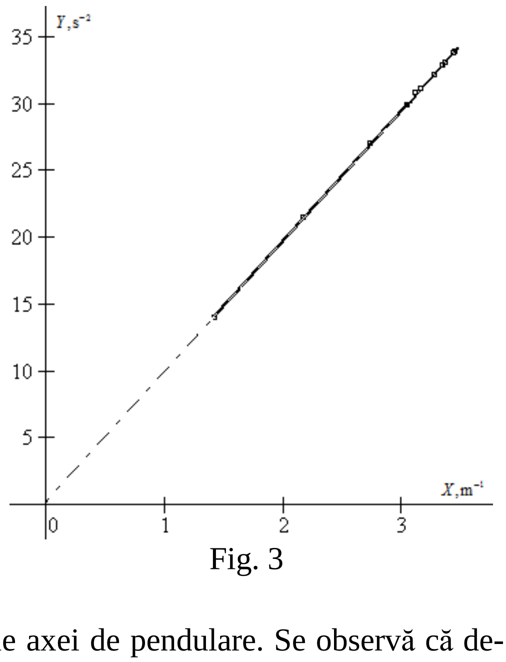

Fig. 3

amortizate a pendulului fizic utilizat. Totodată se mai observă că dreapta construită, practic trece prin origine după cum o cere dependența teoretică, întrucât termenul liber şi eroarea lui standard sunt de acelaşi ordin: $b \approx \Delta b \approx 0{,}1\ \mathrm{s}^{-2}$.

Revenind la relația (10), observăm că dependența perioadei oscilațiilor amortizate de distanța $OC = x$ a axei de pendulare de la centrul de masă (*fig. 3*) este determinată de produsul a doi factori concurenți: x, care este o funcție monoton crescătoare şi $1/\left(l^2/12 + x^2\right)$, care este o funcție monoton descrescătoare la creşterea variabilei x. Acest fapt ne arată că mărimea $x/\left(l^2/12 + x^2\right)$ pentru o anumită valoare a distanței $x = x_m$ va atinge valoarea maximă. Respectiv pentru această distanță, perioada oscilațiilor amortizate, dar şi neamortizate, va atinge valoarea minimă. Aceste rațioamente ne permit să conchidem că perioada oscilațiilor pendulului fizic considerat va descreşte odată cu creşterea distanței x începând de la valori mici (de ordinul a 2 – 3 cm), va atinge o valoare minimă pentru $x = x_m$, apoi va creşte din nou, dacă x va creşte în continuare. Rezultă că graficul dependenței perioadei oscilațiilor de distanța x trebuie să aibă aproximativ aspectul din *fig. 4.* Valoarea distanței $x = x_m$, pentru care perioada oscilațiilor atinge valoarea minimă se poate determina cerând ca derivata expresiei de sub semnul radicalului din (10) să fie gală cu zero, adică $\frac{d}{dx}\left[x/\left(l^2/12 + x^2\right)\right] = 0$. De aici se obține $x_m = l/\left(2\sqrt{3}\right)$. Substituind $x = x_m$ în (10), obținem valoarea minimă a perioadei oscilațiilor amortizate a pendulului fizic studiat:

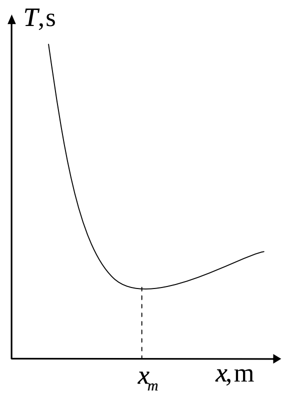

Fig. 4

$$T_{\min} = \frac{2p}{\sqrt{\sqrt{3}g/l - b^2}}. \tag{12}$$

Dependența perioadei oscilațiilor barei omogene de distanța $OC = x$ (*fig. 4*), precum şi formulele pentru x_m şi $T_{\min}$ pot fi verificate experimental. Pentru aceasta trebuie să construim după punctele experimentale dependența perioadei de distanța x, iar din graficul obținut – să determinăm valorile experimentale ale mărimilor x_m şi $T_{\min}$, care pot fi comparate cu valorile teoretice. Experiența demonstrează că dependența din *figura 4* se confirmă obținându-se pentru $x_{\mathrm{min.teor}} = 0{,}144\ \mathrm{m}$, iar pentru $x_{\mathrm{min.exp}} = 0{,}145\ \mathrm{m}$, pentru $T_{\mathrm{min..teor}} = 1.0778\ \mathrm{s}$ şi $T_{\mathrm{min.\ exp}} = 1.0782\ \mathrm{s}$.

III. Concluzii

Utilizarea cronometrului electronic interfațat calculatorului şi a softului elaborat pentru studiul oscilațiilor pendulului fizic permite utilizarea diverselor metode de cercetare la efectuarea lucrării, ceea ce creează condiții favorabile pentru însuşirea mai profundă şi mai eficientă de către studenți atât a materialului teoretic aferent cât şi a metodelor de cercetare care pot fi utile şi în alte studii experimentale.

IV. Referințe

1. A. Rusu, C. Pîrțac, S. Rusu. **Trusa de mecanică asistată de calculator. Procesarea datelor.** Fizica şi tehnologii moderne. V 6, Nr. 3-4 (23-24), 2008, p. 10-21.
2. A. Rusu, C. Pîrțac. Lucrări de laborator de Mecanică asistate de calculator. În materialele celei de a 3-a conferințe internaționale "Telecommunications, Electronics and Informatics", Volumul II, p. 453-460, Chisinau, Mai, 2010.