DÉTERMINATION DES DÉFORMATIONS ET CONTRAINTES MICROSCOPIQUES DANS LES STRUCTURES COMPOSITES PÉRIODIQUES. I-ère Partie. ÉTUDE CRITIQUE INTRODUCTIVE SUR LA MÉTHODE D'HOMOGÉNÉISATION

L. Bejan, L. C. Hanganu,
Technical University "Gh.Asacahi"Iasi, Romania

1. INTRODUCTION

L'importance économique des matériaux composites est à présent de nos jours reconue par la plupart des spécialistes et les prévisions nous font croire qu'elle va augmenter dans les années suivantes.

On assiste à une grande diversité de fabrications dès les produits composites dits "à grande diffusion" jusqu'aux composants aérospatiaux à hautes performances mécaniques et thermomécaniques

Il faut remarquer qu'une utilisation optimale des matériaux composites n'est pas possible sans une analyse prècise de leur comportement mécanique. L'analyse de telles structures y-incluant les paramètres de la microstructure est assez difficile car le degré d'hétérogénéité de ces matériaux est assez grand. Cette hétérogénéité implique le fait que les propriétés physiques du matériel dépendent des variables d'espace et varient rapidement par rapport à celle-ci.

Pour évaluer les propriétés élastiques des materiaux equivalents il etait utilisé la methode d'homogénéisation dans une expression avec les elements finit bi-tridimensionales. Dans cette premiére partie on présente un passage en revue des quelques manières d'aborder théoriquement pour determiner les propriétés mécaniques.

Les mathematiques Duvaut, Babuska, Benssoussan, Sanchez-Palencia, Lions, Bakhvalov et Panasenko ont etudié l'aspect théoretique de la methode. Bakhvalov şi Panasenko [5] ont souglinér que cette méthode conduit à une solution complexe et précise.

Récemment Kalamkarov [7] a considérés quelque cas des mteriaux composites avec une comportement linéaire elastique et elastique geometrique nonlinéaire, respectif termoelastique.

L'auteur a solutionné des éléments pas homogénes avec une structure irrèguliere avec une scale de nehomogénéisation beaucoup plus petite que la scale des dimensions d'element.

H. Ene [4] a etudié l'aspect théoreque duecette méthode pour différents modèles d'equations diferentielles avec dérivées partielesl (problème de filtrage, transfer de chaleur). Celui-ci a publié avec Paşa uneétude oú la méthode est apliqueé aux materieux stratifieés [4].

L'etude de Bendsoe, Kikuchi [8] a introduit les concepts de la méthode d'homogénéisation pour l'optimisation topologique des structures. Les nouveaux formes de cette méthode sont presentées [9], par D. Lukkassen et autre [10] pour determineéles propriétés des composites et les variations locales des contraints avec la variante de la méthode des forces et de la methode de déplacement.

2.DESCRIPTION DE LA METHODE D'HOMOGENEISATION

L'idée de base de cette théorie consiste à supposer que le matériel composite est formé d'une répétition périodique d'une cellule de base á l'échelle microscopique. Cala permet aux propriétés matérielles être fonctions périodiques de variables microscopiques qui convergent, lorsque les dimensions vont vers zéro, vers la propriété équivalente homogène limite.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire classique, est considèré un milieu en matériel composite à l'échelle microscopique de frontière Γ.

Le comportement mécanique est très influencé par les caractéristiques phisiques des elements constitutifs á l'échelle microscopique [1].

Le matériel composite caractérisé par l'indice supérieur h, est en équilibre sous l'application des forces de volume $\overline{f}$, de tractions de surface $\bar{t}$ sur la frontière Γ_σ ainsi que des déplacements imposés $\bar{u}$ sur la partie de frontiere Γ_u *de* Γ.

Les équations d'équilibre de ce milieu composite s'écrivent dans les axes structuraux $x = (x_1, x_2, x_3)$:

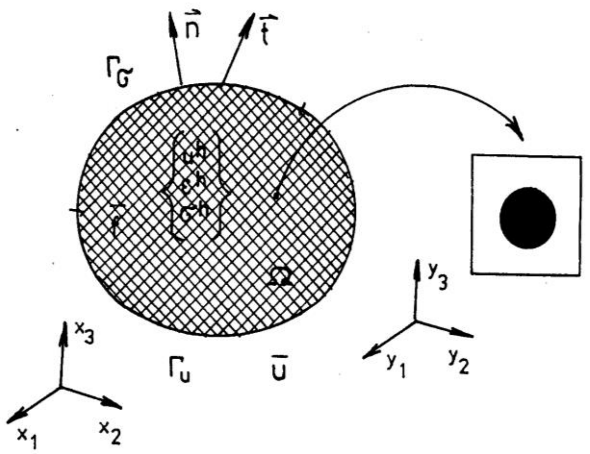

Figure 1.

$$\mathrm{div}_x\, \sigma^h + f = 0, \tag{1}$$

où la contrainte σ^h est liée en régime linéaire aux propriétés matérielles par la loi de Hooke

$$\sigma^h = C^h \varepsilon^h\left(u^h\right), \tag{2}$$

Le champ de contrainte σ^h doit satisfaire les conditions á la limite sur la frontiére Γ_σ

$$\sigma_{ij}^h\, n_j = \bar{t}_i \;., \tag{3}$$

Le champ de déplacement doit respecter les déplacements imposés sur la frontiére Γ_u

$$u^{\mathrm{h}} = \bar{u} \;., \tag{4}$$

D'autre part, les équations de compatibilité lient les déplacements aux déformations par:

$$\varepsilon_{kl}^{\mathrm{h}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{D} u_k^h}{\mathrm{D} x_l} + \frac{\mathrm{D} u_l^h}{\mathrm{D} x_k}\right) \; (k,l = 1,2,3) \;., \tag{5}$$

En introduisant l'expression (2) des contraintes dans (1) et en tenant compte de (5) on obtient:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D} x_j}\left[c_{ijkl}^h(x)\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{D} u_k^h}{\mathrm{D} x_l} + \frac{\mathrm{D} u_l^k}{\mathrm{D} x_k}\right)\right] + f_i = 0 \;., \tag{6}$$

La cellule de base **M** de la figure 1 est un paralélipipéde de dimension ($m_1 \varsigma$, $m_2 \varsigma$, $m_3 \varsigma$) où ς est facteur d'échelle (<<1). Un point courant peut être repéré de deux maniéres:

➢(x_1, x_2, x_3) ⇒position structurale en variables macroscopiques x_i

➢(y_1, y_2, y_3) ⇒position locale á l'intérieur de la cellule de base, en variables microscopiques y_i.

La transformation de l'échelle des système coordonnées est explicitée

$$x_i = x_i^0 + \varsigma\, y_i \,, \tag{7a}$$

$$y_{\mathrm{i}} = \frac{x_i - x_i^0}{\varsigma} \;., \tag{7b}$$

Mais, en général, les deux systeme de coordonnées ont la même origine $x_i^0 = 0$. Par conséquent, on a:

$$y_{\mathrm{i}} = \frac{x_i}{\varsigma} \;., \tag{7c}$$

Du prèmiere moment il est etabli une caractéristique du matériel, celle d'être périodique. Pour cela les caractéristiques physiques, la matrice de Hooke, le champ de déplacement du matériel considéré, sont fonctions périodiques en $\mathrm{Y_i}$, c'est – à-dire qu'elle possède la propriété suivante:

$$u\left(y_1, y_2, y_3\right) = u\left(y_1 + k_1 Y_1, y_2 + k_2 Y_2, y_3 + k_3 Y_3\right) \tag{8}$$

où

$Y = \left(Y_1, Y_2, Y_3\right)$ *périodicité de base*

$k = \left(k_1, k_2, k_3\right)$ *valeurs reelles entières*

Dans le cas des materiaux périodiques [4],[11], les champ de déplacement changent dans une manière lente d'une cellule de base à l'autre et rapidement à l'interieur d'une cellule. Cette variation rapide, est périodique en y, est modulée par la fonction en x $\left(u^h(x) = u(x,y)\right)$.

Le développement en série de $u\left(x,y\right)$ est suivant:

$$u(x,y) = \sum_{l=0} \varsigma^l u^l\left(x,y\right) = u^0\left(x,y\right) + \varsigma u^1\left(x,y\right) + \varsigma^2 u^2\left(x,y\right) + \ldots\ldots\ldots , \tag{9}$$

L'opérateur de la derivée totale est definit par:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D} x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\varsigma}\frac{\partial}{\partial y_j} \,, \tag{10}$$

Alors, le les déformations sont:

$$\varepsilon_{ij} = e^*_{ij}\left[u(x,y)\right] + \frac{1}{\varsigma} e_{ij}\left[u(x,y)\right], \qquad (11)$$

où

$$e^*_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \text{déformation lente,} \qquad (12.a)$$

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) \quad \text{déformation rapide.,} \qquad (12.b)$$

et les contraintes sont:

$$s^{*p}_{ij} = c_{ijkl}(y)\; e^*_{kl}(x,y) \text{ tensions lentes,} \qquad (12.c)$$

$$s^p_{ij} = c_{ijkl}(x,y)\, e^p_{kl}(x,y) \text{ tensions rapides,} \qquad (12.d)$$

Y en introduisant le developpement asymptotique et en tenant compte de l'expression des déformations, on obtient:

$$\varsigma^{-2}\left[\frac{\partial s^0_{ij}}{\partial y_j}\right] = 0, \qquad (13.a)$$

$$\varsigma^{-1}\left[\frac{\partial s^0_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial s^{*0}_{ij}}{\partial y_j} + \frac{\partial s^1_{ij}}{\partial y_j}\right] = 0, \qquad (13.b)$$

$$\varsigma^{0}\left[\frac{\partial s^{*0}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial s^1_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial s^{*1}_{ij}}{\partial y_j} + \frac{\partial s^2_{ij}}{\partial y_j}\right] + f_i = 0, \qquad (13.c)$$

Les équations d'équilibre du milieu composite hétérogène s'écrivent:[11]

$$\frac{D}{Dx_j}[c_{ijkl}(y)\varepsilon_{kl}(u(x,y))] + f_i = 0 \qquad (14)$$

Le systéme

$$\left[\frac{\partial s^0_{ij}}{\partial y_j}\right] = \frac{\partial[c_{ijkl}(y)e_{kl}(u^0)]}{\partial y_j} = 0 \text{ entraine}$$

$$u^0(x,y) = u(x), \qquad (15)$$

Le premier terme des deplacements est dépendent de lavariable lente macroscopique *x*.

Le systéme (13.b) offre une solution générale :

$$u^1(x,y) = \bar{u}_1(x) - \chi^{rs}(y)\, e^{*0}_{rs}(x), \qquad (16)$$

Où χ^{rs}=(χ_1^{rs}, χ_2^{rs}, χ_3^{rs}) si (*rs* = 11, 22, 33, 12, 13, 23,) est un vecteur de deplacement microscopique périodique en variable *y*.

Duvaut [1] a montré que le système différentiel(13.c) admet une solution appartenant á W(Y), champ des déplacements périodiques de la cellule de base, seulement si:

$$\int_Y \left[\frac{\partial s^{*o}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial s^1_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial s^{*1}_{ij}}{\partial y_j} + f_i\right] \mathrm{d}y = 0 ., \qquad (17)$$

En introduisant les champs u^0, u^1 en tenant compte de l'éxpression (16), le système est simplifié

$$\int_Y \left[\frac{\partial s^{*0}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial s^1_{ij}}{\partial x_j} + f_i\right] \mathrm{d}y = 0 ., \qquad (18)$$

Il est introduit la notion de moyenne d'une fonction [11] $\Phi_{(y)}$ sur le domaine Y de la cellule:

$$\langle\Phi\rangle = \frac{1}{|Y|}\int_Y \Phi_{(y)}\,\mathrm{d}y ., \qquad (19)$$

où $|Y|$ coresponde au volume de la cellule de périodicité.

En introduisant la notation des coefficients d'élasticité homogéneisés H_{ijkl} par

$$H_{ijkl} = \frac{1}{|Y|}\int_Y c_{ijkl}(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{|Y|}\int_Y c_{ijkl}(y)\, e_{rs}(\chi^{kl})\,\mathrm{d}y \qquad (20)$$

l'écuation d'équilibre homogénéisés qui doit satisfaire le champ de déplacement u^0 dans le domaine macroscopique, Ω est:.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{[|Y|\langle c_{ijkl}\rangle - |Y|\langle c_{ijkl}e_{rs}(\chi^{kl})\rangle]E^0_{kl}(u^0)\right\} + |Y|\, f_i = 0 \qquad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[H_{ijkl}\; e^{*0}_{kl}(u^0)\right] + f_i = 0 ,, \qquad (22)$$

En ajoutant aux conditions d'équilibre (22) les conditions limites:

$$H_{ijkl}\, e^{0}_{kl}(u^{0})\, n_j = \bar{t}_i \,,, \tag{23}$$

En introduisant la discrétisation éléments finits dans l'expression (20),et en utilisant l'intégration numérique de Gauss, on obtient la matrice Hooke homogénéisée:

$$H_{ijkl} \approx \frac{1}{\sum_{m=1}^{nele} |Y_m|} \sum_{m=1}^{nele} \sum_{n=1}^{np} \left[c^{n}_{ijkl} - s^{n}_{ij}(\chi^{kl} \right] w^{n} \det{}^{n}(J) \tag{24}$$

où $|Y_m|$ représente le volume des élément finis *m*, *nele* est le nombre des éléments finis et *np* est le nombre de points de Gauss. Grâce à l' évalution numerique de la matrice de Hooke homogénéisée par (24), on obtient á l' échelle macroscopique la loi de comportement de la structure composite. Pour préciser l' état du comportement local de la structure composite, il est n écessaire d'effectuer un retour à la cellule de base pour calculer les déformations et les contraintes microscopiques

3. CONCLUSIONS

La methode offre une analyse de comportement mécanique des matériaux composites, materiaux hétérogénes. Cette hétérogénéité implique le fait que les propriétés physiques du matériel dépendent des variables d'espace et varient rapidement par rapport à celle-ci.

Une manière naturelle de cotourner cette difficulté est de définir un matériel homogène équivalent qui fournit la même réponse structurale que le matériau composite tout en tenant compte des caractéristiques micro-structurale.

References

1. DuvauT G. *Analyse functionelle et mecanique des milieux continus application a l'etude des materieux composites elastiques a structure periodique. Theoretical and Applied Mechanics, Ed. W.T.Koiter North-Holland Publishing Company, 1976.*

2. Engrand D. *Homogeneisation des proprietes thermo-elastique statiques des milieux a structure periodique. Methodes numeriques dans les sciences de l'ingenieur. 1er Congres International publie sous la direction technique de E.Absi et R.Glowinski, 1978.*

3. Sanchez-Palencia E. *Non homogeneous media and vibration theory, Lectures notes in physics,127, Springer-Verlag Berlin, 1980.*

4. Ene M.I., Paşa G.I. *Metoda omogenizarii. Aplicaţii la teoria materialelor compozite .Edit. Academiei Române, Bucuresti 1987.*

5. Backhvalov S., Panasenko G. P. *Homogeneization in periodic media, Nauka, Moscow, 1984.*

6. Bessoussan A., Lions J.L., Papanicolau G. *Asymptotic analysis for periodic structures, North-Holland, Amsterdam,1978.*

7 Kalamkarov. A.L. *Composite and reinforced elements of construction, John Wiley Sons, 1992.*

8. Bendsoe M., Kikuchi N. *Generating topologies in structural design by a homogenization Method, Comp. Meth. Appli. Mech. Eng., 71, 197-224, 1988.*

9. Bendsoe M. *Optimization of structural topology, shape and material, Springer-Verlag, 1995.*

10. Lukkassen, D., Persson L.E., Wall P. *Some engineering and mathematical aspects on the homogenization method, Composites Engineering, 5, 519-531, 1995.*

11. Wei-Hong Zhang, Laschet,G., Fleury C. *Etude sur la meyhode d'homogeneisation appliquee a la caracterisation des materiaux composites, Liege, 1992.*

Recomandat spre publicare: 16.11.2006