PROBABILITĂŢI *p*-ADICE

S. Zadorojnâi
Universitatea de Stat din Moldova

INTRODUCERE

Teoria probabilităţilor *p*-adice, în care probabilităţile aparţin câmpului numerelor *p*-adice a apărut în legătură cu problema interpretării statistice a funcţiilor ondulatorii care i-au valori în mulţimea numerelor *p*-adice **[1]**.

La construirea axiomaticii teoriei clasice a probabilităţilor **[2]**, Kolmogorov s-a axat pe teoria probabilităţilor bazate pe frecvenţă, propusă de R.Mizes **[3]**, în care probabilitatea unui eveniment este definită ca limita frecvenţelor relative. La început această limită era considerată numai în mulţimea numerelor reale, însă ia poate fi considerată şi în alte topologii pe mulţimea numerelor raţionale.

1. NOŢIUNEA DE COLECTIV

Teoria probabilităţilor bazată pe frecvenţe se axează pe noţiunea de colectiv.

Să analizăm un oarecare experiment *S*. Notăm prin Ω mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale experimentului *S*. Această mulţime poate fi finită, numărabilă, continuă (într-un oarecare spaţiu topologic). Să notăm consecutiv rezultatele experimentului. Se va obţine o selecţie aleatoare $x = (x_1, x_2,..., x_N)$, unde $x_j \in \Omega$. Colectivul apare ca o abstractizare matematică a acestui proces, în presupunerea, că acest experiment poate fi repetat de un număr infinit de ori, adică poate fi considerat şirul infinit al rezultatelor:

$$\boldsymbol{x = (x_1, x_2, ..., x_N, ...), x_j \in \Omega}. \qquad \textbf{(1)}$$

Să presupunem pentru simplitate că Ω este finită. Atunci, pentru fiecare rezultat $\omega \in \Omega$ se calculează frecvenţa relativă

$$\nu^{(\omega)} = \frac{n^{(\omega)}}{N}.,$$

unde $n^{(\omega)}$ – numărul de apariţii a rezultatului ω în primele *N* experienţe.

Prin ***colectiv*** se înţelege orice şir (1), în care pentru orice rezultat $\omega \in \Omega$ există limita frecvenţelor relative $\nu^{(\omega)}$, care se numeşte ***probabilitatea rezultatului*** $\omega \in \Omega$, $P_{(\omega)} = \lim_N \nu^{(\omega)}$.

Acest principiu se numeşte ***principiul stabilizării statistice*** şi are un rol important în toate aplicaţiile teoriei probabilităţilor.

Conform lui R.Mizes, colectivul trebuie să satisfacă următoarele cerinţe: 1) frecvenţele relative a apariţiei unui eveniment în şirul infinit de experimente independente sunt mărimi finite; 2) mărimile finite, despre care se vorbeşte în prima cerinţă, rămân neschimbate, dacă din tot şirul se alege un subşir.

2. PRINCIPIUL GENERAL AL STABILIZĂRII STATISTICE

Aşa cum *R* şi Q_p se obţin din *Q* în mod similar, iar frecvenţele relative $\nu_n = m/n$ sunt numere raţionale rezultă că limita frecvenţelor relative poate fi considerată şi în Q_p. Pentru prima dată această idee a fost propusă de către A.Yu.Khrennikov în lucrarea **[4]**. În aceeaşi lucrare se propune o nouă teorie a probabilităţilor bazată pe frecvenţe la baza căreia se află principiul general al stabilizării statistice.

Fie τ o topologie arbitrară pe câmpul numerelor raţionale *Q*. Notăm prin Q_τ completatul lui *Q* în această topologie. ***Principiul general al stabilizării statistice*** sună în felul următor:

Stabilizarea statistică a frecvenţelor relative poate fi considerată nu numai în topologia reală asupra numerelor raţionale, dar şi în orice altă topologie τ pe Q. Probabilitatea evenimentelor aparţine completatului respectiv Q_τ.

Prin τ-colectiv se înţelege orice şir (1), pentru care stabilizarea statistică a frecvenţelor relative are loc în topologia τ.

E clar că dacă pe *Q* se consideră topologia reală, atunci obţinem definiţia clasică a probabilităţilor bazate pe frecvenţă **[3]**.

La alegerea unor topologii „destul de bune” asupra câmpului numerelor raţionale *Q*, determinate de valori absolute, se obţine o singură teorie nouă a probabilităţilor – teoria probabilităţilor *p*-adice. Într-adevăr, din teorema lui Ostrowski rezultă că orice valoare absolută pe *Q* este echivalentă sau cu valoarea absolută reală, sau cu valoarea absolută *p*-adică, pentru un oarecare număr prim *p*. Evident că teoria probabilităţilor *p*-adice include în sine o infinitate de teorii a probabilităţilor, pentru $p = 2, 3, 5, \ldots, 2^{20996011}-1, \ldots$ Numărul *p* poate fi ales în dependenţă de proprietăţile modelului probabilistic studiat, sau aleator.

3. MODELE PROBABILISTICE CE CONDUC LA PROBABILITĂŢI *p*-ADICE

În calitate de colectiv, pentru prima dată, R.Mizes a considerat o plantaţie cu flori de diferite culori şi a studiat stabilizarea statistică a frecvenţelor relative pentru fiecare culoare. Ca exemplu de model poate fi construit un colectiv analog în teoria probabilităţilor *p*-adice **[4]**.

Fie date două tipuri de flori: R – de culoarea roşie şi W – de culoarea albă. O plantaţie se seamănă aleator cu flori roşii (R) şi albe (W), astfel încât florile se sădesc în serii din p^l flori, iar lungimea seriei la fel se alege aleator.

Altfel spus, fie date două generatoare de numere aleatoare: primul generează $j = 0$ sau $j = 1$ iar al doilea: $i = 1, 2$. Dacă $j = 0$ atunci se sădeşte o serie de flori roşii, iar dacă $j = 1$, o serie de flori albe. Lungimea serie se determină în felul următor: lungimea primei serii este o putere oarecare p^{l_1} (unde, la fel, l_1 poate fi ales aleator), dacă lungimea seriei precedente este p^{l_m}, atunci lungimea seriei viitoare va fi $p^{l_{m+1}}$, unde $l_{m+1} = l_m + i$. Notăm prin $\nu_m^{(R)} = n_m^{(R)} / N_m$ frecvenţa relativă a florilor roşii în primele m experimente, iar prin $\nu_m^{(W)} = n_m^{(W)} / N_m$ a celor de culoarea albă.

Pentru orice generatoare de numere aleatoare *i* şi *j* are loc stabilizarea statistică a frecvenţelor relative $\nu^{(R)}$ şi $\nu^{(W)}$ în topologia *p*-adică iar probabilităţile se calculează după formulele:

$$P_R = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (1 - j_n)\, p^{l_n}}{\sum_{n=1}^{\infty} p^{l_n}}.\backslash, \quad P_W = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} j_n\, p^{l_n}}{\sum_{n=1}^{\infty} p^{l_n}}.$$

Modelarea la calculator a acestui experimentului pentru plantaţia 2-adică demonstrează elocvent situaţia când nu există stabilizare statistică în topologia reală dar există în topologia 2-adică. Mai jos sunt arătate rezultatele acestui experiment aleator.

Astfel, după 5 experimente aleatorii s-au stabilizat 7 cifre a descompunerii 2-adice a frecvenţelor relative, după 10 experimente – 15 cifre, după 20 de experimente– 25 cifre etc.

În câmpul numerelor reale frecvenţele relative i-au valori de pe întreg segmentul [0,1]:

m = 7: $\nu^{(R)}$ = 0.300818, $\nu^{(W)}$ = 0.698598;

m = 13: $\nu^{(R)}$ = 0.489559, $\nu^{(W)}$ = 0.510433;

m = 20: $\nu^{(R)}$ = 0.069674, $\nu^{(W)}$ = 0.930326;

m = 46: $\nu^{(R)}$ = 0.889240, $\nu^{(W)}$ = 0.110760.

m = 5:

$\nu^{(R)}$ = 10110111010000000010001101100101010010110000100111001110111110011011101000000001,

$\nu^{(W)}$ = 00101000101111111011100100110101011010011110110001100010000011001000101111110;

m = 10:

$\nu^{(R)}$ = 10110111011101101001101001100000011101001010110110110010111010110001110011011 1,

$\nu^{(W)}$ = 0010100010001001011001011001111110001011010100100100110100010100111000110 01000;

m = 20:

$\nu^{(R)}$ = 10110111011101101111111100010100100100111100100101010000011010010100000 1100000,

$\nu^{(W)}$ = 00101000100010010000000001110101101101100001101101010111110010110101011111 0011111;

m = 50:

$\nu^{(R)}$ = 10110111011101101111111100111011000101000110100111010011001111111001000010 1111,

$\nu^{(W)}$ = 00101000100010010000000001100010011101011100101100010110011000000011011110 10000;

Bibliografie

1. ***Vladimirov V.S., Volovič I.V., Zelenov E.I.*** *p-Adiceskii analiz i matematicescaâ fizica. Moskva, Fizmatlit, 1994*

2. ***Kolmogorov A.N.*** *Osnovnye poneatiâ teorii veroâtnostei. Moskva, Nauka, 1974.*

3. ***Maistrov L.E.*** *Razvitie poneatâ veroiatnosti. Moskva, Nauka, 1980*

4. ***A. Yu. Khrennikov.*** *p-Adiceskaia veroâtnosti i statistica // Dokl. RAN, 1992, tom 322, № 6, s. 1075 – 1079.*

Recomandat spre publicare: 28.03.05