ESTIMAȚII ALE SOLUȚIILOR UNOR PROBLEME ALE ECUAȚIILOR FIZICII MATEMATICE

Autor: Iurie Baltag

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Se studiază problema lui Cauchy pentru ecuațiile hiperbolice unidimensionale în spațiile L_p de funcții de putere p-integrabilă pe toată axa reală. Corectitudinea problemei lui Cauchy va fi asigurată, dacă vor fi stabilite estimații apriorice ale soluțiilor acestei probleme în spațiile L_p, $1 \le p \le \infty$. Se expun condițiile suficiente asupra coeficienților şi condițiilor inițiale ale problemelor studiate, pentru ca asemenea estimații să fie obținute, adică problemele examinate să fie puse corect.*

Cuvinte cheie: *Problema lui Cauchy, ecuație hiperbolică, estimații apriorice, spații L_p.*

Un şir de probleme ale fizicii matematice se reduc la studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip hiperbolic. Exemple de aşa ecuații sunt ecuația propagării undelor, ecuația oscilațiilor membranei, ecuațiile gazo-dinamicii ş.a. Un aspect foarte important al problemelor fizicii matematice atât din punct de vedere teoretic, cît şi practic constă în stabilirea corectitudinii acestor probleme. Adică în stabilirea faptului, că modelul matematic al problemei fizice descrie în realitate soluția ei.

Se studiază următoarea problemă a lui Cauchy:

$$P(x;t;\partial_x;\partial_t)u = 0, x \in R^1, t > 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^k u(x;0)}{\partial t^k} = f_k(x), k = 0,1,..., n-1 \tag{2}$$

Aici ecuația (1) este strict hiperbolică, adică operatorul $P = P_n + Q$, unde $P_n(x;t;\mu;\lambda)$ este un polinom omogen de gradul *n* cu rădăcini reale $\lambda_1(x;t;\mu),..., \lambda_n(x;t;\mu)$ diferite două câte două pentru fiecare $\mu \neq 0$, iar Q este un polinom de gradul $n-1$.

Corectitudinea problemei lui Cauchy (1), (2) va fi asigurată, dacă pentru soluțiile ei vor fi stabilite estimații apriorice de forma următoare:

$$\|u(x;t)\|_p \le \sum_{k=o}^{n-1} C_k(t)\|f_k(x)\|_p, \ p \in [1;\infty], \tag{3}$$

unde $\|f(x)\|_p = \begin{cases} (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}, p \in [1;\infty) \\ \sup\limits_{x \in R} |f(x)|, p = \infty \end{cases}$.

Se pune problema de a obține estimații de tip (4) pentru soluția problemei (1), (2) fără a implica derivatele condițiilor inițiale, evidențiind dependența explicită a constantelor de estimare de timpul t.

A fost examinată mai întâi problema lui Cauchy pentru ecuația oscilațiilor într-un mediu variabil:

$$u_{tt} - a(x)u_{xx} - q(x)u = o, u(x;0) = f_0(x), u_t(x:0) = f_1(x) \tag{5}$$

unde funcția ce descrie mediul $a(x)$ şi potențialul $q(x)$ verifică condițiile $0< a_0 \leq a(x) \leq a_1$, $q(x) \geq 0$.

Pentru soluțiile acestei probleme au fost obținute estimații de tip (4), în care constantele C_1 şi C_2 depind de funcția $a(x)$ şi derivatele ei până la ordinul doi inclusiv şi de normele funcțiilor $a(x)$ şi $q(x)$ în L_1.

De menționat, că în raport cu timpul t constantele C_1 şi C_2 admit o creştere ce nu depăşeşte t^2 .

Aparte s-a cercetat cazul, când potențialul $q(x)$ admite şi valori negative. În acest caz estimațiile (4) se îndeplinesc cu constantele de estimare C_1 şi C_2, care admit o creştere exponențială în raport cu timpul t.

În cazul, când coeficienții ecuației (5) sînt funcții variabile şi în timp au fost obținute estimații de tip (4), în care constantele de estimare C_1 şi C_2 admit o creştere exponențială în raport cu timpul t şi depind de coeficienții ecuației şi derivatele lor până la ordinul cinci inclusiv.

În continuare a fost cercetată problema lui Cauchy, în care ecuația (1) este o ecuație de ordin înalt cu coeficienți constanți. În acest caz estimațiile de tip (4) au fost obținute pentru $p \in (1;\infty)$, cu constantele de estimare $C_k, k = 0,1,..., n-1$ ce admit o creştere exponențială în raport cu timpul t.

Dacă ecuația (1) este cu coeficienți constanți şi reprezintă o ecuație omogenă de gradul n, adică operatorul $Q \equiv 0$, atunci estimațiile (4) pot fi obținute pentru $p \in (1;\infty)$, unde constantele de estimare $C_k, k = 0,1,..., n-1$ verifică inegalitatea $C_k \leq ct^{n-1}$, iar c este o constantă ce nu depinde de timpul t.

Bibliografie

1. Мизохата С. *Теория уравнений с частными производными.* Москва, Мир, 1977.
2. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* Москва, Мир, 1964.
3. Балтаг Ю. *Об ограниченности решения задачи Коши для одномерных гиперболических уравнений второго порядка*. Кишинев, Деп. Рук. в МНИИНТИ, N. 1117-М.89, 1989.
4. Эффендиев М. *Строго гиперболические уравнения высокого порядка в пространствах* L_p. Диф. ур. 27, с. 312-320, 1991.
5. Балтаг Ю. *Об* L_p*-ограниченности разрешающего оператора задачи Коши для одномерного гиперболического уравнения высокого порядка*. Кишинев, Известия АН РМ, N. 4, 1992.