METODE DE DETERMINARE A SOLUŢIILOR UNOR ECUAŢII NELINIARE CU DERIVATE PARŢIALE

Iurie Baltag, dr., conf. univ.

Universitatea Tehnică a Moldovei

Ideea principală: *Se studiază metode de determinare a soluțiilor ecuațiilor neliniare cu derivate parțiale ce descriu anumite procese fizice, în special propagarea undelor şi a diferitor oscilații. Se aplică metoda separării variabilelor, metoda Lagrange, metoda undei unidimensionale și altele. Se determină soluții pentru așa ecuații ca ecuația lui Rieman, ecuația sinus-Gordon, ecuația lui Cortevega de Frize.*

Cuvinte cheie: *Soluții ale ecuațiilor neliniare cu derivate parțiale. Ecuația lui Rieman, ecuația sinus-Gordon, ecuația lui Cortevega de Frize. Integrală particulară, totală și generală.*

Un şir de ecuații neliniare cu derivate parțiale de ordinul întâi pot fi studiate aplicând metoda separării variabilelor. Să aplicăm această metodă la determinarea soluțiilor ecuației lui Rieman:

$$u_t + auu_x = 0 \quad (a > 0 - \text{constantă} \qquad (1),$$

Căutăm soluțiile ei în forma $u(x;t) = X(x)T(t)$. Înlocuind în ecuația (1) vom obține, că

$X(x) = -kx/a + C_1$; $T(t) = -1/(kt + C_2)$. De aici $u(x;t) = (x + c)/(at + d)$ (2),

unde c și d sunt constante arbitrare. În cazul $c = d = 0$ obținem soluția particulară $u(x;t) = x/at$.

Expresia (2) se numește integrală totală a ecuației. Pentru a determina integrala generală ce conține o funcție arbitrară, vom aplica metoda Lagrange. Pentru aceasta notăm $V(x,t,u) = u(at + d) - x - c$.

Considerăm, că $c = f(d)$ și adăugăm condiția $V'_d + V'_c \cdot f'(d) = 0$. Atunci soluția generală a ecuației (2) se determină din egalitățile:

$u(x;t) = (x + f(d))/(at + d)$, $f'(d) = u$, unde d este o funcție arbitrară.

Pentru fiecare funcție derivabilă $f(d)$ determinăm funcția d și obținem o integrală particulară a ecuației lui Rieman. De exemplu, dacă $f(d) = d^2$, atunci $u = 2d$ și d se determină din ecuația pătrată $d^2 + 2atd - x = 0$. Pentru $f(d) = kd$ (k – constantă) funcția d este arbitrară.

Să studiem în continuare următoarea ecuație, numită ecuația sinus–Gordon:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = q^2 sin(u), \quad (a,q \ - \text{constante}) \qquad (3)$$

Vom pune problema de a determina soluții ce au o anumită importanță fizică și anume soluții de tip soliton. Graficele acestor soluții au forma unor unde separate unidimensionale.

De menționat, că pentru $q = 0$ ecuația (3) este ecuația propagării undelor, soluția generală a căreia este binecunoscută. Vom considera în continuare, că $q \neq 0$.

Pentru valori mici ale lui u funcția $sin(u)$ poate fi înlocuită cu u și în locul ecuației (3) obținem o ecuație mai simplă, numită Clein–Gordon. La determinarea soluțiilor de tip soliton pentru aceste ecuații vom aplica metoda undei unidimensionale.

În acest scop notăm $u(x;t) = z(x-ct)$ și înlocuim în ecuația (3). Atunci, pentru determinarea funcției z vom obține următoarea ecuație:

$$(c^2 - a^2)z'' = q^2 \sin z \qquad (4)$$

De aici, pentru determinarea lui z obținem: $\int \frac{dz}{\sqrt{c_1 - \lambda \cos z}} = x - ct + c_2,\ \lambda = \frac{2q^2}{c^2 - a^2}$. (5)

În dependență de valorile constantelor $c,\ c_1,\ \lambda, q,\ c_2$ se pot obține diferite soluții de tip soliton. Vom evidenția următoarele soluții importante ale ecuației (3):

a) soliton simplu $u = 4arctg[e^{\beta(x-\alpha t)}] - \pi;$

b) soliton dublu $u = 4arctg[\frac{\alpha \cdot sh(\beta x)}{ch(\alpha\beta t)}] - \pi;$

c) soliton–antisoliton $u = 4arctg[\frac{sh(\alpha\beta t)}{\alpha \cdot ch(\beta x)}] - \pi;$

Pentru ecuația Clein–Gordon în ecuația (4) *sinz* trebuie înlocuit cu *z*. Soluțiile ei se determină mult mai simplu.

Vom studia în continuare o ecuație ce are vaste aplicații în diverse procese fizice cu caracter ondulatoriu șau de vibrație. Aceasta este ecuația lui Cortevega de Frize:

$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0$ ($a,b > 0$ – constante) (6)

La determinarea soluțiilor de tip soliton pentru această ecuație vom aplica la fel metoda undei unidimensionale. În acest scop notăm $u(x;t) = z(x-ct)$ și înlocuim în ecuația (6). Atunci, pentru determinarea funcției z vom obține următoarea ecuație:

$$-cz' + azz' + bz''' = 0 \qquad (7)$$

Integrând această ecuație, vom obține:

$$\sqrt{3b}\int \frac{dz}{\sqrt{c_2 + c_1 z + 3cz^2 - az^3}} = x - ct + c_3. \qquad (8)$$

Integrala din partea stângă a ecuației (8) este o inegrală eliptică și nu poate fi integrată în funcții elementare, dar pentru anumite valori ale constantelor $c,\ c_1,\ c_2, c_3$ se pot obține diferite soluții de tip soliton. Vom evidenția următoarea soluție importantă a ecuației (7) de tip soliton simplu:

$$u = \frac{\alpha k}{ch^2(kx - \beta t)}.$$

Bibliografie

1. Филиппов А. *Многоликий солитон.* М. Мир 1990.
2. Абловиц А. *Теория солитонов*. М, Мир, 1987.
3. Stepanov V. *Curs de ecuații diferențiale.* Chișinău, Lumina 1970.
4. Курант р. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. М. Наука 1970.
5. Ньюэлл А. *Солитоны в математике и физике*. М, Мир, 1989.
6. Мизохата С. *Теория уравнений с частными производными.* Москва, Мир, 1977.