

# MODELUL MATEMATIC DE OPTIMIZARE A TĂIERII MATERIALELOR ÎN BAZA DIFERITOR TIPURI DE MATERIALE

Mihaela FURTUNĂ

Universitatea Tehnică a Moldovei

**Abstract:** Metoda optimizării tăierii materialelor este importantă prin faptul că se reduc deșeurile, se minimizează cheltuielile, respectiv rezultatul este optim. Problema optimizării tăierii materialelor apare atunci când e necesar din unele materiale inițiale să tăiem niște componente de diferite dimensiuni. Minimizarea deșeurilor este criteriul de optim. Una din direcțiile de minimizare este utilizarea modelului economico-matematic, aplicarea practică este prezentă prin studiul de caz. Rezolvarea modelului se efectuează prin programul QM. Astfel am identificat care dintre variantele propuse sunt cele mai optime, și de câte ori ele trebuie utilizate pentru ca lungimea totală a deșeurilor rămase în urma tăierii materialelor să fie minimă.

**Cuvinte-cheie:** criteriu de optim, model matematic, minimizarea deșeurilor, tăierea materialelor.

Scopul fiecărei întreprinderi este maximizarea profitului, obiectiv aflat în raport direct cu **reducerea costurilor de producție**. În acest sens întreprinderea are trei repere majore, și anume: prețul de vânzare a produsului pe piață, costul orientativ al concurenței și cel mai scăzut nivel al costurilor din perioadele anterioare. **Reducerea costului de producție** constituie o latură deosebit de importantă a managementului unei activități economice, cu rol determinant în maximizarea profitului. Aceasta impune a se acționa asupra următoarelor **grupe de factori**:

a) **Factorii tehnici** permit obținerea de economii ca urmare a faptului că acestea sunt dependente de: performanțele tehnico-funcționale ale capitalurilor aflate în exploatare, caracteristicile capitalurilor circulante supuse proceselor de producție, gradul de prelucrare s.a.

b) **Factorii economico-financiar** realizează economii prin: achiziționarea de factori de producție cu prețuri mai mici, sau surse de aprovizionare mai apropiate; bonificații cantitative și de preț acordate de furnizori pentru comenzi deosebite; garanții oferite de firmele furnizoare de factori de producție în cazul producerii unor mărfuri cu performanțe deosebite; condiții deosebite de acordare a creditelor sau de finanțare.

c) **Factorii manageriali** se referă la priceperea managerilor firmelor, iar economiile percepute sunt în directă legătură cu următoarele: o mai eficientă utilizare a capitalurilor bănești ale firmelor; constituirea compartimentelor și a direcțiilor de marketing la nivelul firmelor; o combinație cât mai eficientă a factorilor de producție, alegerea variantelor tehnologice care ofera maximum de câștig.

În vederea reducerii costului de producție, producătorul trebuie să caute și să găsească rezervele de reducere a consumurilor de factori de producție, să acționeze simultan în toate compartimentele întreprinderii, asupra tuturor factorilor de producție, în toate fazele activității economice și să aplice măsurile posibile de diminuare a costurilor în concordanță cu exigențele competiției impusă de piață.

Una din căile de reducere a costului de producție ține de **reducerea cheltuielilor materiale**, care are efect imediat asupra reducerii cheltuielilor și creșterii valorii nou create pe unitate de produs.

Printre măsurile ce pot fi întreprinse pentru reducerea cheltuielilor materiale este și **reducerea deșeurilor și valorificarea rațională a deșeurilor**. Una din direcțiile de minimizare a deșeurilor este utilizarea modelului economico-matematic.

Modelul este o noțiune metodologică general fundamentală a ciberneticii. El se creează pentru cercetarea proprietăților sistemelor compuse. Modelul de bază include următoarele elemente: variabilele, restricțiile, coeficienții variabilelor în restricțiile modelului și funcției-scop, indicatorii de volum ai restricțiilor. În formarea problemei trebuie să fie strict determinat, ce este necunoscut, care mărimi variabile și valorile lor numerice trebuie să le aflăm în procesul rezolvării. **Planul optim** este acel plan care asigură valoarea determinată a rezultatului final, minimizând resursele utilizate. Exemplu: optimizarea tăierii materialelor, în care se cere să se aleagă variantele optime de tăiere a materialelor inițiale de diferite dimensiuni, astfel încât deșeurile rămase după tăiere să fie minime.

Modelul matematic de optimizare a tăierii materialelor este:

$$\pi = \{x_{jl}\}$$

**De aflat planul**

Drept criteriu de optimizare se folosește minimizarea lungimii totale a deșeurilor rămase după tăierea materialelor. Se consideră deșeu bucățile care sunt mai mici decât componentele de lungime minimă.

Conform acestui criteriu **funcția obiectiv** are forma:

$$F(x) = \min \left\{ \sum_{j=1}^{n_l} \sum_{l=1}^L C_{jl} \times x_{jl} \right\}$$

**Sistemul de condiții și restricții:**

- Restricții privind tăierea cantității necesare de componente de fiecare tip:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^L a_{ijl} \times x_{jl} \leq b_i, \quad i=1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^L a_{ijl} \times x_{jl} \geq b_i, \quad i=1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^L a_{ijl} \times x_{jl} = b_i, \quad i=1 \dots m$$

- Restricții privind cantitatea disponibilă a materialelor inițiale:

$$\sum_{j=1}^{n_l} a_{jl} \leq d_l, \quad l=1 \dots L$$

- Condiții de nenegativitate a variabilelor:

$$x_{jl} \geq 0, \quad j=1 \dots n_l, \quad l=1 \dots L$$

**Sistemul de variabile:**

$n_l$  - numărul total a variantelor posibile de tăiere a materialelor de tipul l;

$l$  - numărul tipurilor de material inițiale disponibile;

$j=1 \dots n_l$  - indicii diferitor variante de tăiere a materialelor inițiale de tipul l;

$l=1 \dots L$  - indicii diferitor tipuri de materiale inițiale care diferă după dimensiuni;

$C_{jl}$  - lungimea deșeurilor rămase după tăierea unui material inițial de tipul l după variantă j;

$b_i$  - cantitatea necesară de componente de tipul i;

$x_{jl}$  - variabilele necunoscute exprimă numărul de materiale inițiale de tipul l tăiate după varianta j;

$a_{ijl}$  - numărul de componente de tipul i, obținute în urma tăierii unui material inițial de tipul l după varianta j;

$i=1 \dots m$  - indicii diferitor componente care trebuie obținute în urma tăierii materialelor;

$m$  - numărul tipurilor de componente care trebuie obținute în urma tăierii;

**Vom analiza acest model în baza unui studio de caz:**

**Studiu de caz:** Să se determine planul optim de tăiere a componentelor necesare pentru o construcție din materiale inițiale de 2 dimensiuni:  $L_1=300$  cm,  $L_2=450$  cm. Componentele sunt necesare de 3 dimensiuni:  $L_1=70$ cm,  $L_2=95$ cm,  $L_3=115$ cm. Componentele sunt necesare în următoarele cantități: Tipul I =170 unități, Tipul II =290 unități, Tipul III  $\geq$ 410 unități. Cantitatea de material tipul I inițial este limitată și dispunem de 200 unități. Să se determine planul optim de tăiere a materiei urmărind scopul minimizării lungimii totale a deșeurilor. Pentru a întocmi modelul matematic e necesar de aflat prealabil care sunt toate variantele de tăiere a materialelor.

**Tabelul 1.** Variantele posibile de tăiere a materialelor cu lungimea de 300 cm

Tipul componentelor	I	II	III	IV	V	VI	VII
$L_1=70$ cm	4	-	2	1	1	2	1
$L_2=95$ cm	-	3	1	2	1	-	-
$L_3=115$ cm	-	-	-	-	1	1	2
Deșeuri	20	15	65	40	20	45	0

**Tablul 2. Variantele posibile de tăiere a materialelor cu lungimea de 450 cm**

Tipul componentelor	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
L1=70cm	6	5	3	2	1	-	-	-	1	3	4	3	2	1
L2=95cm	-	1	2	3	4	1	2	3	-	-	-	1	2	1
L3=115cm	-	-	-	-	-	3	2	1	3	2	1	1	1	2
Deșeuri	30	5	50	25	0	10	30	50	35	10	55	30	5	15

În baza datelor inițiale a fost întocmit modelul matematic. În calitate de mărimi variabile, care urmează a fi aflate după rezolvarea modelului au fost utilizate următoarele notări:

$X_{1.1}$  – cantitatea de materiale de tipul 1, tăiate după varianta nr.1

$X_{2.1}$  – cantitatea de material de tipul 1, tăiate după varianta nr.2

$X_{3.1}$  - cantitatea de material de tipul 1, tăiate după varianta nr.3

$X_{1.2}$  - cantitatea de material de tipul 2, tăiate după varianta nr.1

$X_{2.2}$  - cantitatea de material de tipul 2, tăiate după varianta nr.2

$X_{3.2}$  - cantitatea de material de tipul 2, tăiate după varianta nr.3

**De aflat planul :**

$$\pi = \{x_{jl}\}$$

**Funcția obiectiv:**

$$F(x) = \min\{20x_{1.1} + 15x_{2.1} + 65x_{3.1} + 40x_{4.1} + 20x_{5.1} + 45x_{6.1} + 0x_{7.1} + 30x_{1.2} + 5x_{2.2} + 50x_{3.2} + 25x_{4.2} + 0x_{5.2} + 10x_{6.2} + 30x_{7.2} + 50x_{8.2} + 35x_{9.2} + 10x_{10.2} + 55x_{11.2} + 30x_{12.2} + 5x_{13.2} + 15x_{14.2}\}$$

**Sistemul de condiții și restricții:**

$$4x_{1.1} + 2x_{3.1} + x_{4.1} + x_{5.1} + 2x_{6.1} + x_{7.1} + 6x_{1.2} + 5x_{2.2} + 3x_{3.2} + 2x_{4.2} + x_{5.2} + x_{9.2} + 3x_{10.2} + 4x_{11.2} + 3x_{12.2} + 2x_{13.2} + x_{14.2} = 170$$

$$3x_{2.1} + x_{3.1} + 2x_{4.1} + x_{5.1} + x_{2.2} + 2x_{3.2} + 3x_{4.1} + 4x_{5.2} + x_{6.2} + 2x_{7.2} + 3x_{8.2} + x_{12.2} + 2x_{13.2} + x_{14.2} = 290$$

$$x_{5.1} + x_{6.1} + 2x_{7.1} + 3x_{6.2} + 2x_{7.2} + x_{8.2} + 3x_{9.2} + 2x_{10.2} + x_{11.2} + x_{12.2} + x_{13.2} + 2x_{14.2} \geq 410$$

$$x_{1.1} + x_{2.1} + x_{3.1} + x_{4.1} + x_{5.1} + x_{6.1} + x_{7.1} \leq 200$$

**Modelul de bază a fost transformat în formă canonică:**

$$F(x) = \min\{20x_{1.1} + 15x_{2.1} + 65x_{3.1} + 40x_{4.1} + 20x_{5.1} + 45x_{6.1} + 0x_{7.1} + 30x_{1.2} + 5x_{2.1} + 50x_{3.2} + 25x_{4.2} + 0x_{5.2} + 10x_{6.2} + 30x_{7.2} + 50x_{8.2} + 35x_{9.2} + 10x_{10.2} + 55x_{11.2} + 30x_{12.2} + 5x_{13.2} + 15x_{14.2} + 0x_{15} + 0x_{8.1} + M_{y1} + M_{y2} + M_{y3}\}$$

$$4x_{1.1} + 2x_{3.1} + x_{4.1} + x_{5.1} + 2x_{6.1} + x_{7.1} + 6x_{1.2} + 5x_{2.2} + 3x_{3.2} + 2x_{4.2} + x_{5.2} + x_{9.2} + 3x_{10.2} + 4x_{11.2} + 3x_{12.2} + 2x_{13.2} + x_{14.2} + y_1 = 170$$

$$3x_{2.1} + x_{3.1} + 2x_{4.1} + x_{5.1} + x_{2.2} + 2x_{3.2} + 3x_{4.1} + 4x_{5.2} + x_{6.2} + 2x_{7.2} + 3x_{8.2} + x_{12.2} + 2x_{13.2} + x_{14.2} + y_2 = 290$$

$$x_{5.1} + x_{6.1} + 2x_{7.1} + 3x_{6.2} + 2x_{7.2} + x_{8.2} + 3x_{9.2} + 2x_{10.2} + x_{11.2} + x_{13.2} + 2x_{14.2} - x_{15} + y_3 = 410$$

$$x_{1.1} + x_{2.1} + x_{3.1} + x_{4.1} + x_{5.1} + x_{6.1} + x_{7.1} + x_{8.1} = 200$$

La transformarea modelului în formă canonică au fost utilizate următoarele variabile suplimentare:

$x_{8.1}$  – cantitatea neutilizată de materiale de tipul 1. ( $l=1$ );

$x_{15}$  – cu câte componente de tipul 3 se obțin mai mult comparativ cu cantitatea minimă de 410 unități ;

$y_1, y_2, y_3$  – variabile artificiale, care nu au sens economic.

Pentru rezolvarea modelului a fost utilizată programa QM for Windows Modulul Linear Programming, și a fost obținută soluția optimă.

**Analiza soluției optime a problemei.**

$F(X) = 620$  cm – Lungimea minimă totală a deșeurilor. Pentru a minimiza deșeurile și a obține componentele necesare pentru o construcție din materiale inițiale de 2 dimensiuni: 300 cm și respectiv 450 cm vor fi tăiate după variante în modul următor:

$x_{1.1} = 0$  - Varianta 1 de tăiere a materialului de tipul 1 nu va fi utilizată;

$x_{2.1} = 0$  - Varianta 2 de tăiere a materialului de tipul 1 nu va fi utilizată;

$x_{3.1} = 0$  - Varianta 3 de tăiere a materialului de tipul 1 nu va fi utilizată;

$x_{4.1} = 0$  - Varianta 4 de tăiere a materialului de tipul 1 nu va fi utilizată;

$x_{5.1} = 0$  - Varianta 5 de tăiere a materialului de tipul 1 nu va fi utilizată;

$x_{6.1} = 0$  - Varianta 6 de tăiere a materialului de tipul 1 nu va fi utilizată;

$x_{7.1} = 113$  - 113 unități de material de tipul 1 vor fi tăiate după varianta 7;

$X_{1,2}=0$ -Varianta 1 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;  
 $X_{2,2}=0$ -Varianta 2 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;  
 $X_{3,2}=0$ -Varianta 3 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;  
 $X_{4,2}=0$ -Varianta 4 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;  
 $X_{5,2}=57$ -57 unități de material de tipul 2 vor fi tăiate după varianta 5;  
 $X_{6,2}=62$ -62 unități de material de tipul 2 vor fi tăiate după varianta 6;  
 $X_{7,2}=0$ -Varianta 7 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;  
 $X_{8,2}=0$ -Varianta 8 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;  
 $X_{9,2}=0$ -Varianta 9 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;  
 $X_{10,2}=0$ -Varianta 10 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;  
 $X_{11,2}=0$ -Varianta 11 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;  
 $X_{12,2}=0$ -Varianta 12 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;  
 $X_{13,2}=0$ -Varianta 13 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;  
 $X_{14,2}=0$ -Varianta 14 de tăiere a materialului de tipul 2 nu va fi utilizată;

**Componentele total obținute după toate variantele de tăiere:**

$X_{8,1}=87$ - numărul de materiale neutilizate de tipul 1 cu lungimea de 300 cm.

$X_{15}=2$ - se obțin cu 2 componente mai mult de tipul 3, decât cantitatea minimă 410

Componentele au fost obținute conform condițiilor, deci putem spune ca condițiile au fost respectate. Pentru tipul 1 varianta 7, deșeurile vor constitui 0 cm. La fel și pentru tipul 2 varianta 5. Urmărind scopul minimizării lungimii totale a deșeurilor în cazul variantei 6 deșeurile constituie 10cm, pentru 62 unități respectiv 620 cm. Așadar deșeurile totale minime sunt de 620 cm.

**Bibliografie:**

1. Cataulin A.M., Gavrilov G.V., Srokina T.M., Modelarea matematică a proceselor economice în agricultură, Chișinău, Universitas. 1993;
2. Camelia Rațiu-Suciu, Florica Luban, Daniela Hincu, Nadia Ciocoiu, Modelare economica /Editia a doua 2009;
3. Camelia Rațiu-Suciu, Modelarea și simularea proceselor economice, București 2005;
4. [www.rasfoiesc.com](http://www.rasfoiesc.com)