

## COMPENSAREA DRUMUIRILOR PLANIMETRICE PRIN METODE TOPO-GEODEZICE

Nichita CĂTĂRĂU\*, Alexandra HROLOVICI

Departamentul Inginerie Civilă și Geodezie, grupa IGC-2203, Facultatea Construcții, Geodezie și Cadastru,  
Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova

\*Autorul corespondent: Nichita Cătărașu, e-mail: [nichita.catarau@icg.utm.md](mailto:nichita.catarau@icg.utm.md)

Îndrumătorul/Coordonatorul științific Ana VLASENCO, dr., conf. univ.,  
Universitatea Tehnică a Moldovei

**Rezumat.** Tendința contemporană din domeniul măsurătorilor terestre tinde spre furnizarea datelor de o înaltă calitate, și anume ca datele să fie mult mai precis măsurate și mai riguros compensate și corectate. Acest lucru poate fi obținut atât prin intermediul tehnologiilor geodezice performante, cât și prin intermediul procedeeleor teoretice de prelucrare a datelor. Unele tehnologii geodezice utilizate de către inginerii geodezi sunt receptoarele GNSS și stațiile totale inteligente. Procedeele teoretice constă în prelucrarea riguroasă a datelor primite din teren prin diferite metode matematice din domeniul teoriei prelucrării măsurătorilor terestre. În această lucrare se va prezenta un exemplu de compensare riguroasă a unei drumuirii planimetrice sprijinite pe 4 puncte cu coordonate cunoscute, date pentru care au fost obținute din teren cu ajutorul utilajelor geodezice, precum receptor GNSS și stația totală. Compensarea va fi tratată ca o problemă de compensare a măsurătorilor eterogene prin metoda celor mai mici pătrate, iar rezultatele vor fi comparate cu datele obținute din teren prin măsurători.

**Cuvinte cheie:** precizie, măsurători GNSS, stație totală, erori, compensare

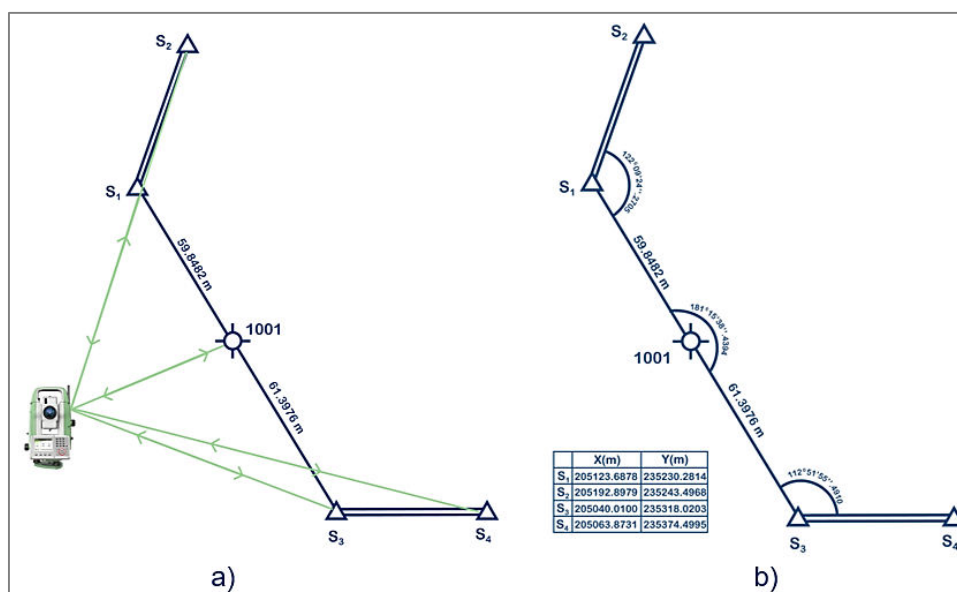
### Introducere

Este esențial să conștientizăm că în timpul efectuării măsurătorilor terestre, inevitabil vor exista erori, indiferent de cât de precis este instrumentul utilizat sau de competențele profesionale ale inginerului geodez. Metodele geodezice, prin precizia ridicată a măsurătorilor efectuate, ca și prin modalitățile de prelucrare a datelor și de estimare a calității rezultatelor, reprezintă un sistem de bază în procesul de studiere a comportării construcțiilor. Aceste metode raportează poziția unor puncte fixate pe construcție (puncte de control sau mărci de vizare) la puncte fixe situate în afara zonei de influență a construcției, ambele constituind rețeaua geodezică de urmărire. Calculele de compensare a măsurătorilor trebuie executate riguros, prin metoda celor mai mici pătrate, cu scopul obținerii celor mai probabile valori ale schimbărilor în pozițiile în plan ale punctelor de control, și implicit a construcției [1].

În calitate de rețea geodezică, în prezenta lucrare s-a luat o drumuire planimetrică sprijinită la capete pe 4 puncte cu coordonate cunoscute  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  și  $S_4$ , (figura 1) determinate cu ajutorul receptorului GNSS model Spectra Geospacial SP85 și un punct nou 1001 (ca punct de monitorizare), căreia trebuie să-i determinăm poziția lui față de punctele de sprijin. Concomitent cu aceste lucrări s-au efectuat și măsurători cu stația totală LEICA TCRA1201, în scopul determinării poziției punctului 1001 prin două etape: metoda radierii (free station) (figura 1a) și prin metoda de măsurători de unghiuri și distanțe (figura 1b). Scopul lucrării este de a face o analiză comparativă a datelor obținute din ambele metode.

### Calcule topografice preliminare

Inițial în baza măsurătorilor de teren prezentate în figura 1b se va determina coordonatele provizorii ale punctului de control 1001.



**Figura 1. Schița drumuirii planimetrice cu coordonatele punctelor de sprijin:**  
a) metoda radierii (free station); b) metoda prin măsurători de distanțe și unghiuri

Pentru acest caz se vor utiliza următoarele relații de calcul [2]:

$$X_{1001} = X_{S_1} + D_{S_1-1001} \cdot \cos\theta_{S_1-1001}, \quad (1)$$

$$Y_{1001} = Y_{S_1} + D_{S_1-1001} \cdot \sin\theta_{S_1-1001}. \quad (2)$$

Iar distanța provizorie  $D_{S_1-1001}$  și orientarea provizorie  $\theta_{S_1-1001}$  se determină astfel:

$$D_{S_1-1001} = \sqrt{\Delta X_{S_1-100}^2 + \Delta Y_{S_1-100}^2}, \quad (3)$$

$$\theta_{S_1-1001} = \arctg \frac{\Delta Y_{S_1-100}}{\Delta X_{S_1-100}}. \quad (4)$$

În urma calculelor s-au obținut următoarele coordonate provizorii ale punctului 1001:  
 $X_{1001}=205082,863$  m și  $Y_{1001}= 235274,044$  m.

În continuare, se vor determina orientările stațiilor  $S_1$ , 1001 și  $S_3$  conform modelului:

$$Z'_{S_1} = \theta_{S_1-S_2} - dir_{S_1-S_2},$$

$$Z''_{S_1} = \theta_{S_1-1001} - dir_{S_1-1001},$$

$$Z_{S_1}^{mediu} = \frac{Z'_{S_1} + Z''_{S_1}}{2}, \quad (5)$$

unde:  $dir_{S_1-S_2}$  și  $dir_{S_1-1001}$  sunt direcțiile măsurate cu stația totală (figura 1b).

Orientările stațiilor, în acest caz vor avea următoarele valori:  $\theta_{S_1} = 10^\circ 48' 23.5678''$ ,  
 $\theta_{1001} = 313^\circ 00' 58.1555''$  și  $\theta_{S_3} = 314^\circ 15' 26,0840''$ .

### Prelucrarea datelor prin metoda observațiilor indirecte

Compensarea și prelucrarea datelor se va efectua prin metoda măsurătorilor indirecte, pornind cu determinarea ecuațiilor de corecții de forma:

$$V=AX+L, \quad (6)$$

unde: V - vectorul corecțiilor; A - matricea coeficienților; L – vectorul termenilor liberi; V- vectorul necunoscutelor.

Forma ecuațiilor de corecție se determină în funcție de tipul punctului de stație și a celui vizat (vechi sau nou), în care putem avea următoarele situații: [3]

ecuația unei direcții dintre două puncte noi i și j:  $v_{ij} = -d_{zi} + a_{ij}dx_j + b_{ij}dy_j - a_{ij}dx_i - b_{ij}dy_i + l_{ij}$ ;

ecuația pentru direcțiile măsurate între două puncte vechi  $S_1$  și  $S_2$ :  $v_{S_1S_2} = -dz_{S_1} + l_{S_1S_2}$ ;

ecuația pentru direcțiile măsurate între un punct vechi  $S_1$  și un punct nou j :  $v_{S_1j} = -dz_{S_1} + a_{S_1j}dx_j + b_{S_1j}dy_j + l_{S_1j}$ ;

ecuația pentru direcțiile măsurate între un punct nou i și un punct vechi  $S_3$ :  $v_{iS_3} = -dz_i - a_{iS_3}dx_i - b_{iS_3}dy_i + l_{iS_3}$ ,

unde:  $dz_{S_1}$  –reprezintă corecția ce se va aplica unghiului mediu de orientare în stație  $S_1$  ;  $a_{ij}$  și  $b_{ij}$ - sunt coeficienții de direcție ce exprimă variația orientării.

Coeficienții de direcție se determină cu relațiile: [3]

$$a_{ij} = -\frac{\Delta Y_{ij}}{(D_{ij})^2} = -\frac{\sin\theta_{ij}}{D_{ij}}; b_{ij} = \frac{\Delta X_{ij}}{(D_{ij})^2} = -\frac{\cos\theta_{ij}}{D_{ij}}, \quad (7)$$

iar termenul liber se determină astfel:  $l_{ij} = Z_{ij} - Z_{ij}^{mediu}$ .

Forma ecuației de corecție pentru o distanță măsurată este:  $v_{ij} = a_{ij}dx_j + b_{ij}dy_j + c_{ij}dx_i + d_{ij}dy_i + l_{ij}$ .

Iar coeficienții și termenul liber pentru această situație se determină astfel:

$$a_{ij} = \frac{\Delta X_{ij}}{D_{ij}} = \cos\theta_{ij}; b_{ij} = \frac{\Delta Y_{ij}}{D_{ij}} = \sin\theta_{ij}; c_{ij} = \frac{\Delta X_{ij}}{D_{ij}} = -\cos\theta_{ij},$$

$$d_{ij} = \frac{\Delta Y_{ij}}{D_{ij}} = -\sin\theta_{ij}; l_{ij} = d_{ij}^{calculat} - d_{ij}^{măsurat}. \quad (8)$$

Tabelul 1 reprezintă tabelul coeficienților ecuațiilor de corecție determinate în corespundere cu situațiile expuse mai sus. Sistemul de ecuații ale corecțiilor obținut se poate rezolva utilizând condiția impusă de metoda celor mai mici pătrate:  $V^T V = \min$ . Pentru acest caz se va utiliza metoda matricială de rezolvare a sistemului de ecuații.

Tabelul 1

Tabelul coeficienților ecuațiilor de corecție

Direcția	Pct. S <sub>1</sub>	Pct. 1001			Pct. S <sub>3</sub>	Termen liber l ["]	Precizia înainte de compensare ["]
	dZ <sub>S<sub>1</sub></sub>	dZ <sub>1001</sub>	dX <sub>1001</sub>	dY <sub>1001</sub>	dZ <sub>S<sub>3</sub></sub>		
S1-S2	-1	0	0	0	0	0.00	10
S1-1001	-1	0	-2519.906	-2351.179	0	0.00	10
1001-S1	0	-1	-2519.906	-2351.179	0	0.00	10
1001-S3	0	-1	2406.076	2344.574	0	0.00	10
S3-1001	0	0	2406.076	2344.574	-1	3.7553	10
S3-S4	0	0	0	0	-1	-3.7553	10
Distanța							[mm]
S1-1001	0	0	-0.6822	0.7312	0	0.00	10
1001-S3	0	0	0.6979	-0.7162	0	0.00	15

Conform condiției de minim impus de metoda celor mai mici pătrate vom avea: [2]

$$(AX + L)^T * (AX + L) \rightarrow \min . \quad (9)$$

$$\text{Deci: } A^T(AX + L) + A^T(AX + L) = 0 \rightarrow 2A^TAX + 2A^TL = 0 , \quad (10)$$

$$\text{de unde: } X = -\frac{A^TL}{A^TA} = -(A^TPA)^{-1} * A^TPL = -N^{-1}A^TPL . \quad (11)$$

Matricea coeficienților  $A$  și termenilor liberi  $L$  se obțin prin împărțirea coeficienților ecuațiilor de corecții și a termenilor liberi cu preciziile corespunzătoare mărimilor (sunt trecute în tabelul 1).

În urma rezolvării prin metoda matricială se determină vectorul necunoscutelor  $X$ , și apoi se trece la determinarea vectorului corecțiilor  $V$  după relația (6).

Rezultatele compensării direcțiilor unghiulare măsurate sunt trecute în tabelul 2, iar pentru distanțe în tabelul 3. După compensarea datelor s-au obținut următoarele valori ale coordonatelor punctului nou 1001:  $X_{1001}=205082,9268$  m și  $Y_{1001}= 235273,9765$  m.

Abaterea standard (eroarea medie pătratică) a fost determinată după relația:

$$s_0 = \sqrt{\frac{v^TV}{m-n}} , \quad (12)$$

în care  $m$  reprezintă numărul observațiilor efectuate în drumuirea planimetrică, iar  $n$  numărul necunoscutelor (pentru cazul nostru  $m=8$ , iar  $n=5$ ) [3].

Abaterea standard a necunoscutelor (a mărimilor determinate indirect) se determină astfel:

$$s_{x_j} = s_0\sqrt{Q_{jj}} , \quad (13)$$

unde coeficienții de pondere, corespunzător necunoscutei  $x_j$ , se extrag de pe diagonala principală a matricei inverse a sistemului de ecuații normale [3].

Tabelul 2

**Direcții unghiulare compensate**

PS	PV	Direcții măsurate [° ' "]	Corecții $v_i$ ["]	Direcții corectate [° ' "]	Abaterea standard ["]
S1	S2	00.00.00,00	0.10715	00.00.00,1072	1,89
	1001	122.12.34,5877	-0.10715	122.12.34,4006	1,89
1001	S1	00.00.00,00	0.12502	00.00.00,12502	1,89
	S3	181.14.31,6839	-0.12502	181.14.31,5589	1,89
S3	1001	00.00.00,0000	0.14336	00.00.00,1434	1,89
	S4	112.50.16,7695	-0.14336	112.50.16,6262	1,89

Tabelul 3

**Distanțe compensate**

Latura	Distanțe măsurate [m]	Corecții [m]	Distanțe compensate [m]	Abaterea standard (mm)
S1-1001	59.8482	-0.0000924	59.8481075	1,89
1001-S3	61.3976	0.0000616	61.3976616	2,84

Pentru determinarea coordonatelor punctului 1001 atât pe abscisa  $X$ , cât și pe ordonata  $Y$  sa obținut o abatere standard de 0,034 mm, iar pentru unghiul de orientare în această stație sa obținut o abatere standard de 2,24".

În urma acestor calcule se poate de menționat, că rezultatele obținute se încadrează în intervalul de precizie, ceea ce se poate de afirmat că metoda de determinare a poziției punctelor

prin observații unghiulare și de distanțe, la fel poate fi utilizată ca o metodă alternativă față de metoda radierii (free station). Doar că metoda radierii dintr-un singur punct (figura 1a) este o metodă mai rapidă de determinare a pozițiilor punctelor de interes și este cea mai utilizată metodă la moment în multe lucrări topo-geodezice.

### **Concluzii**

Compensarea măsurătorilor topo-geodezice într-o drumuire planimetrică prin metoda observațiilor indirecte reprezintă o metodă exactă de obținere a poziției spațiale unor puncte ale obiectivului de studiu. Utilizarea tehnologiilor avansate și a instrumentelor matematice în analiza și procesarea datelor, ducă nu numai la o îmbunătățire a preciziei, ci și la o accelerare a procesului de lucru. Astfel, beneficiile se extind în direcții multiple, contribuind la eficiență, exactitate și progres în diverse domenii critice.

### **Referințe bibliografice**

- [1] Gh. Nistor, D. Pădure, C. Onu, C. I. Greșiță, C. Huțanu. Calculul direct al vectorului deformațiilor și deplasărilor orizontale al construcției studiate, folosind măsurători geodezice de precizie, tratate riguros. Publicat în Revista "Cadastru și Drept", vol.46, p.87-90, UASM, 2016
- [2] D. Onose, A. Savu, A.F.C. Negrilă, D. Răboj. Topografie. Editura: MatrixRom, București, 2014, 464 p.
- [3] C. Moldoveanu. Geodezie. Noțiuni de geodezie fizică și elipsoidală, poziționare. Editura: MatrixRom, București, 2002, 535 p.