

Analiza Performanțelor Sistemelor de Calcul prin Rețele Petri Hibrade Stocastice Aproximativ Agregate

Guțuleac Emilian, Zaporojan Sergiu, Țurcanu Iurie, Furtuna Andrei

Departament “Informatică și Ingineria Sistemelor”

Universitatea Tehnică a Moldovei

Chișinău, Republica Moldova

emilian.gutuleac@calc.utm.md

Abstract — This paper presents an approximated aggregated analytical method analysis of Stochastic Hybrid Petri Nets (SHPN) models with finite capacity buffers for evaluating the throughput of pipe-line computer systems (PCS). The method is based on decomposition of SHPN into single buffer subnets used as the building block for performance evaluation of PCS. We develop an iterative method to accurately estimate performance characteristics of PCS such as throughput and mean buffer contents. The accuracy of the proposed method has been validated by numerical simulations and experiments.

Key Words — Aggregation, approximation, computer system, decomposition, performance analysis, stochastic hybrid Petri net.

I. INTRODUCERE

Modelarea formală, tehnicile de verificare și evaluare a performanțelor sunt utilizate pe scară largă la proiectarea și analiza multor tipuri de sisteme distribuite și aplicații hibride cu procese discret-continue, în baza cărora se pot identifica lacunele de proiectare la stadiul incipient al ciclului lor de viață [1, 2, 5, 6, 7]. Ca rezultat, aceste probleme pot fi eliminate mai devreme, iar costurile de depanare, întreținere și mentenanță pot fi reduse în mod semnificativ.

Unul dintre cele mai răspândite formalisme moderne, folosite pentru modelarea și analiza sistemelor distribuite cu procese discrete și/sau discret-continue concurente, sunt rețelele Petri (RP), RP stocastice (RPS) [7], RP hibride (RPH) [7] de diferite extensii, mai ales, RP fluide stocastice (RPFS) [3] și RPH stocastice (RPHS) cu buffere finite [6, 7].

Un model RPHS al unui sistem hibrid cu $N \geq 3$ buffere, nu poate fi exact analizat în mod analitic [3, 7], justificând astfel dezvoltarea unor metode de aproximare.

În acest articol este prezentată o metodă unificatoare de analiză aproximativ agregată a modelului inițial RPHS, cu buffere b_i , $i=1, 2, \dots, N-1$ prin decompoziția acestuia în sub-rețele $RPHS_i$ producător-consumator în care fiecare tranziție temporizată continuă $u_{i,k}$, $k=1, 2, \dots, N$ este incidentă înainte (resp. înapoi) numai la un singur buffer. Fiecare $u_{i,k}$ este controlată de partea discretă a $RPHS_i$, care conține doar câte 2 locații și 2 tranziții ce redau starea activă sau cea pasivă a $u_{i,k}$. Atributele cantitative ale $RPHS_i$ sunt aproximativ agregate din cele ale RPHS inițială.

În baza acestei metode este dezvoltat un algoritm iterativ de estimare eficientă, cu o precizie dată, a indicatorilor de performanță ai unui sistem de calcul multiprocesor pipe-line.

II. REȚELE PETRI HIBRIDE STOCASTICE

Modelele RPHS, introduse în [6, 7], permit verificarea proprietăților comportamentale, simularea vizuală și evaluarea performanțelor sistemelor cu procese discret-continue.

Particularitățile RPHS constau în faptul că atât mulțimea locațiilor P constituie o partiție $P = P_d \cup P_c$, $P_d \cap P_c = \emptyset$, unde P_d este mulțimea locațiilor discrete și P_c este mulțimea locațiilor continue (buffere), cât și mulțimea tranzițiilor temporizate T constituie o partiție $T = T_d \cup T_c$, $T_d \cap T_c = \emptyset$, unde T_d este mulțimea tranzițiilor discrete și T_c este mulțimea tranzițiilor continue, care fiind validate ele schimbă în mod continuu cu viteza $V_k(M, \bar{x})$ nivelul de fluid al bufferelor incidente cu tranziția continuă $u_k \in T_c$ respectivă. Locațiile discrete pot conține un număr întreg de jetoane, iar cele continue pot conține o cantitate (mărime reală) de fluid. Locațiile discrete sunt reprezentate grafic prin cercelețe simple, iar cele continue prin două cercelețe concentrice. Tranzițiile discrete temporizate T_τ (resp. imediate T_0) sunt reprezentate prin bare negre groase (resp. subțiri), $T_d = T_\tau \cup T_0$, $T_\tau \cap T_0 = \emptyset$, iar cele continue prin dreptunghiuri mici. Cu fiecare $t_j \in T_d$ este asociată o funcție de prioritate $\text{Pri}(t_j)$ marcaj-dependentă pentru care $\text{Pri}(T_0) > \text{Pri}(T_\tau)$. Marcajul curent (M, \bar{x}) al RPHS este un vector coloană ce redă distribuția comună a jetoanelor în locațiile discrete și a nivelurilor de fluide în buffere. Partea discretă a acestui marcaj este reprezentată de vectorul M ce conține un număr întreg pozitiv de jetoane $m_n = M(p_n)$ în locațiile discrete p_n , iar \bar{x} este vectorul de marcare continuă a bufferelor în care x_i reprezintă nivelul de fluid în bufferul b_i , care este o mărime reală pozitivă. Fiecare b_i are o capacitate maximă h_i de stocare a fluidului respectiv. Jetoanele discrete sunt consumate și produse în conformitate cu regulile de declanșare ale tranzițiilor prin arce discrete normale. Reprezentarea grafică a tuturor primitivelor RPHS este dată în Fig. 1.

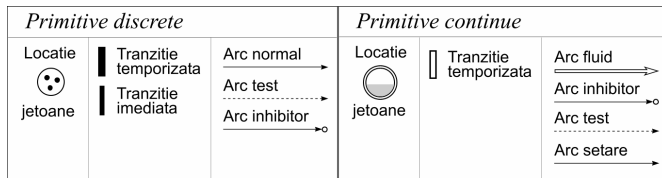


Fig.1. Primitivele RPHS.

Duratele de declanșare ale tranzițiilor discrete temporizate $t_l \in T_r$ sunt definite de ratele de declanșare $\lambda_l(M, \bar{x})$, care pot depinde de marcajul curent al RPHS. Cu tranzițiile discrete imediate $t_j \in T_0$ sunt asociate ponderi $w_j(M, \bar{x})$ în baza cărora sunt calculate probabilitățile de declanșare ale acestora. Conținutul de fluid în buffere este schimbat fie prin tranziții continue u_k în funcție de viteza lor de declanșare $v_k(M, \bar{x})$, care pot să depindă de marcajul curent al rețelei, fie că el poate fi stabilit direct de un arc de setare la o anumită valoare, atunci când o tranziție discretă se va declanșa. Cu tranzițiile respective sunt asociate funcții de gardă marcaj-dependente care condiționează validarea și selectarea declanșării acestor tranziții. Arcele *inhibitoare* (arcele *test*) dezactivează (activează) o tranziție atunci când un anumit număr de jetoane sau o anumită cantitate de fluid este prezentă într-o locație discretă sau continuă.

Definirea detaliată a RPHS, atributele sale cantitative, regulile de validare și declanșare ale tranzițiilor respective de către marcajul curent sunt prezentate în [7].

Din cauza restricției spațiului de expunere a metodei propuse în această lucrare ne vom limita la cazul în care numai un singur buffer este *incident înainte* (resp. *înapoi*), notat $\bullet u_k = 1$ (resp. $u_k^\bullet = 1$), la tranzițiile continue u_k ale unui model RPHS.

III. METODA DECOMPOZIȚIEI AGREGATE A RPHS

Considerăm un sistem de calcul multiprocesor pipe-line (SCP) format din N servere $S_{V_1}, S_{V_2}, \dots, S_{V_N}$ și $N-1$ buffere b_1, b_2, \dots, b_{N-1} . Fiecare S_{V_j} interacționează și cooperează între ele prin intermediul unui buffer b_i de stocare continuă a informației cu o capacitate de stocare h_i [7].

Ipoteze de modelare. Construirea modelului în formă de RPHS ce descrie funcționarea unui SCP este bazată pe adoptarea următoarelor ipoteze [7]: 1) Se consideră că fluxul de date care traversează SCP este continuu, interpretat ca fluid; 2) Fluidul intră către serverul S_{V_j} fiind procesat și sto-cat în bufferul b_j cu o capacitate finită, apoi din acest buffer trece la serverul $S_{V_{j+1}}$ și în cele din urmă părăsește sistemul; 3) Când un server trece în starea pasivă (este defectat) într-un anumit mod, aceasta nu produce; 4) Primul server nu este niciodată infometat, iar ultimul niciodată nu este blocat; 4) Serverele au diferite viteze de procesare v_j ; 5) În starea inițială, toate serverele sunt operaționale (se află în stare activă); 6) În același timp un server nu poate fi în mai multe moduri de defectări. Chiar dacă un server care se află într-un mod de defectare dat el nu poate să se defecteze în alt mod înainte de a fi reparat; 7) Ratele respective de

schimbare a stărilor locale urmează distribuții exponențiale. 8) Partea discretă RPS a lui RPHS este mărginită, viabilă și reinițializabilă, adică ea are un regim staționar de funcționare [6, 7].

În Fig. 2 este prezentat un exemplu de model RPHS1ce descrie funcționarea unui SCP cu $N = 3$ servere. Partea discretă a RPHS1 descrie algoritmul de control al funcționării părții continue de procesare a datelor. Vitezele maxime v_j de procesare a datelor sunt asociate cu tranzițiile continue u_j , iar ratele de defectare (resp. reparare) $\lambda_l(M)$ ale S_{V_j} sunt respectiv asociate cu tranzițiile discrete temporizate t_l . Starea activă a S_{V_j} este redată de marcajul locațiilor discrete $M(p_j) = 1, j = 1, \dots, 3$.

Deoarece modelul HSPN al unui astfel de SCP, cu $N \geq 3$, nu poate fi exact analizat în mod analitic [3, 7], în continuare vom dezvolta o metodă de decompoziție și aproximare agregată a evaluării productivității medii a SCP și a distri-buției conținutului mediu al bufferelor. Pentru aceasta descompunem SCP în $N-1$ subsisteme SC_i producător-consumator, numite *dipoli*. Fiecare dipol SC_i constă dintr-un server SA_i producător al fluidului în bufferul b_i și un ser-ver SD_i consumator al fluidului din bufferul b_i dintre ele. Fiecare server SA_i sau SD_i poate să se afle numai în una din două stări agregate $\alpha_{i1} \in \{0, 1\}$ sau $\alpha_{i2} \in \{0, 1\}$, unde $\alpha_{i1} = \alpha_{i2} = 1$ (resp. $\alpha_{i1} = \alpha_{i2} = 0$) este starea *activă* (resp. starea *pasivă*). Serverul din amonte al fiecărui subsistem poate avea o "stare de foame" pentru fiecare subsistem amonte, iar cel din avale poate avea o "stare blocată" pentru fiecare subsistem din avale.

Metodă propusă a fost inspirată de lucrările [1, 2, 4, 5].

Modelul agregat $RPHS_i$ al unui dipol SC_i este prezentat în Fig. 3. În acest model atributele cantitative agregate sunt determinate în baza probabilităților staționar π_k de aflare în marcajul M_k accesibil din cel inițial al părții discrete RPS a modelului RPHS analizat. Pentru a calcula π_k este folosită platforma instrumentală PIPE 2.5 de analiză a RPS [8].

Fie $M_k[u_j >]$ este tranziția continuă u_j validată de către marcajul curent M_k . În acest caz viteza medie agregată $\bar{v}_j^{(i)}$ de procesare a lui S_{V_j} este:

$$\bar{v}_j^{(i)} = \sum_{\forall M_k[u_j >]} (v_j(M_k) \cdot \pi_k), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (1)$$

Fie $M_k[t_l >]$ este tranziția discretă temporizată t_l validată de către marcajul curent M_k . Rata medie agregată $\bar{\lambda}_j^{(i)}$ de trecere a S_{V_j} din starea activă în cea pasivă este:

$$\bar{\lambda}_j^{(i)} = \left(\sum_{\substack{\forall (M_k[t_l >]) \wedge \\ (M_k[u_j >])}} \lambda_l(M_k) \cdot \pi_k \right) / \left(\sum_{\substack{\forall (M_k[t_l >]) \wedge \\ (M_k[u_j >])}} \pi_k \right), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (2)$$

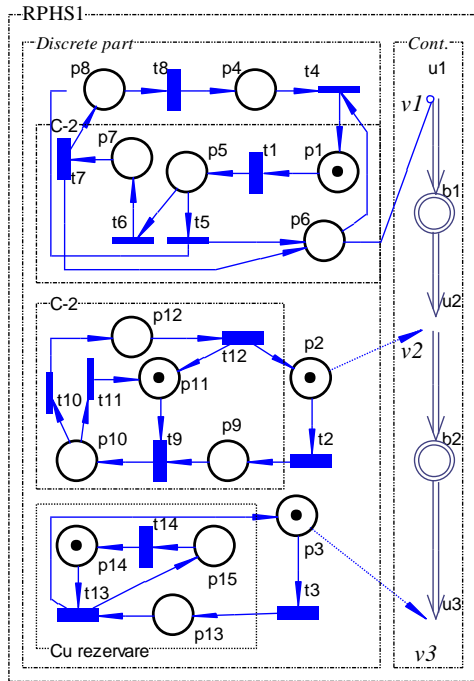


Fig. 2. Exemplu de model RPHS1 al unui SCP cu 4 buffere.

În mod similar, rata medie agregată $\bar{\mu}_j^{(i)}$ de trecere a S_{V_j} din starea pasivă în cea activă este:

$$\bar{\mu}_j^{(i)} = \left(\sum_{\forall M_n | t_m > M_k | u_j >} \lambda_m (M_n) \cdot \pi_n \right) / \left(\sum_{\forall M_n | t_m > M_k | u_j >} \pi_n \right), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (3)$$

IV. ANALIZA LMH AGREGAT AL UNUI DIPOL

Comportamentul SA_i și SD_i cu câte două stări agregate (stare activă sau pasivă) respective al dipolului SC_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$ este descris de lanțul Markov timp continuu hibrid (LMH_i) al modelul $RPHS_i$ prezentat în Fig. 3.

Stările LMH_i sunt redade de 4-tuplul $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, x_i, \bar{v}_{ik}^{(i)})$, $k = 1, 2$, unde $\alpha_{i1}, \alpha_{i2} \in \{0, 1\}$, iar $\bar{v}_{ik}^{(i)} = \alpha_{i1} \cdot \bar{v}_1^{(i)} - \alpha_{i2} \cdot \bar{v}_2^{(i)}$ este balanța dinamică care determină viteza schimbării nivelului stocului x_i , $0 \leq x_i \leq h_i$ al lui b_i .

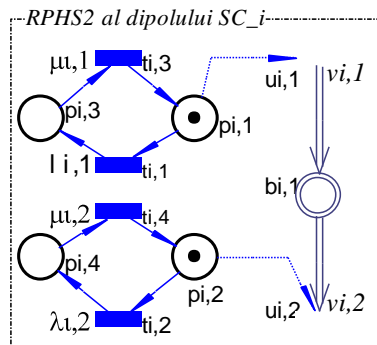
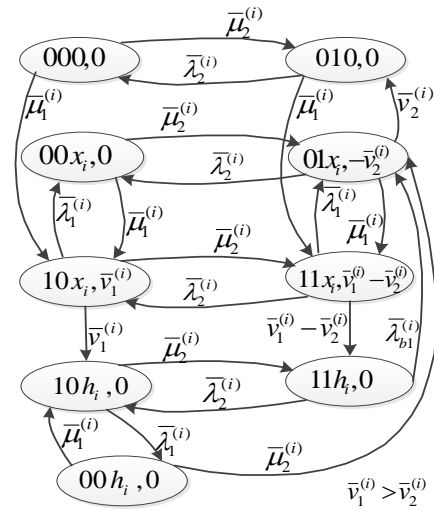

 Fig. 3. Modelul agregat RPHS_i al unui dipol SC_i .

 Fig. 3. Diagrama LMH_i al $RPHS_i$, cazul $\bar{v}_1^{(i)} > \bar{v}_2^{(i)}$.

Diagrama de stări a acestui LMH_i depinde de relațiile concrete dintre mărimile $\bar{v}_1^{(i)}$ și $\bar{v}_2^{(i)}$, care pot fi: $\bar{v}_1^{(i)} > \bar{v}_2^{(i)}$, $\bar{v}_1^{(i)} < \bar{v}_2^{(i)}$ sau $\bar{v}_1^{(i)} = \bar{v}_2^{(i)}$. Metoda de construire a acestor tip de diagrame și scrierea în baza lor a ecuațiilor de echilibru Chapman-Kolmogorov este descrisă în [7]. În Fig. 4 este prezentată diagrama LMH_i pentru cazul $\bar{v}_1^{(i)} > \bar{v}_2^{(i)}$.

Ecuațiile de tranziție interne ale LMH_i în regim staționar. Când bufferul b_i nu este nici gol sau nici plin, nivelul stocului x_i , $0 < x_i < h_i$ al acestui buffer, variază în funcție de starea curentă a serverelor adiacente cu o densitate de probabilitate $f_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(x_i)$. Deoarece nivelul stocului poate varia foarte puțin pentru o perioadă scurtă de timp, comportamentul dipolului DP_i în regim staționar este descris de următorul sistem de ecuații diferențiale ordinare [7]:

$$\begin{aligned} 0 = & -(\bar{\mu}_1^{(i)} + \bar{\mu}_2^{(i)})f_{0,0}^{(i)}(x_i) + \bar{\lambda}_2^{(i)}f_{0,1}^{(i)}(x_i) + \bar{\lambda}_1^{(i)}f_{1,0}^{(i)}(x_i), \\ & -\bar{v}_2^{(i)} \frac{\partial f_{0,1}^{(i)}(x_i)}{\partial x_i} = -(\bar{\mu}_1^{(i)} + \bar{\lambda}_2^{(i)})f_{0,1}^{(i)}(x_i) + \\ & \bar{\lambda}_1^{(i)}f_{1,1}^{(i)}(x_i) + \bar{\mu}_2^{(i)}f_{0,0}^{(i)}(x_i), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_1^{(i)} \frac{\partial f_{1,0}^{(i)}(x_i)}{\partial x_i} = & -(\bar{\lambda}_1^{(i)} + \bar{\mu}_2^{(i)})f_{1,0}^{(i)}(x_i) + \\ & \bar{\lambda}_2^{(i)}f_{1,1}^{(i)}(x_i) + \bar{\mu}_1^{(i)}f_{0,0}^{(i)}(x_i), \\ (\bar{v}_1^{(i)} - \bar{v}_2^{(i)}) \frac{\partial f_{1,1}^{(i)}(x_i)}{\partial x_i} = & -(\bar{\lambda}_1^{(i)} + \bar{\lambda}_2^{(i)})f_{1,1}^{(i)}(x_i) + \\ & \bar{\mu}_1^{(i)}f_{0,1}^{(i)}(x_i) + \bar{\mu}_2^{(i)}f_{1,0}^{(i)}(x_i). \end{aligned}$$

Ecuațiile de tranziție la frontiere ale LMH_i . În timp ce comportamentul intern al dipolului DP_i poate fi descris de densitățile de probabilitate, acesta pot ajunge la o anumită stare de frontieră cu o probabilitate $\rho_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(0)$ sau $\rho_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(h_i)$

diferită de zero. De exemplu, dacă $\bar{v}_1^{(i)} < \bar{v}_2^{(i)}$ (resp. $\bar{v}_1^{(i)} > \bar{v}_2^{(i)}$) și ambele servere sunt operaționale, stocul bufferului b_i tinde să scadă (resp. să se mărească). Dacă această situație durează destul de mult, bufferul va fi gol (resp. plin), adică avem $x_i = 0$ (resp. $x_i = h_i$). În acest caz DP_i va atinge starea (1,1,0) și el va rămâne acolo până când unul dintre cele două servere nu va trece în starea pasivă.

Pentru $\bar{v}_1^{(i)} > \bar{v}_2^{(i)}$ ecuațiile *frontierei de jos*, $x_i = 0$, sunt:

$$(\bar{\mu}_1^{(i)} + \bar{\lambda}_2^{(i)})\rho_{0,1}^{(i)}(0) = \bar{\mu}_2^{(i)}\rho_{0,0}^{(i)}(0) + \bar{v}_2^{(i)}f_{0,1}^{(i)}(0),$$

$$(\bar{\mu}_1^{(i)} + \bar{\mu}_2^{(i)})\rho_{0,0}^{(i)}(0) = \bar{\lambda}_2^{(i)}\rho_{0,1}^{(i)}(0), \quad (5)$$

$$(\bar{v}_1^{(i)} - \bar{v}_2^{(i)})f_{1,1}^{(i)}(0) = \bar{\mu}_1^{(i)}\rho_{0,1}^{(i)}(0), \quad \bar{v}_1^{(i)}f_{1,0}^{(i)}(0) = \bar{\mu}_1^{(i)}\rho_{0,0}^{(i)}(0).$$

În mod similar obținem ecuațiile *frontierei de sus*:

$$(\bar{\lambda}_1^{(i)} + \bar{\mu}_2^{(i)})\rho_{1,0}^{(i)}(h_i) = \bar{\mu}_1^{(i)}\rho_{0,0}^{(i)}(h_i) + \bar{\lambda}_2^{(i)}\rho_{1,1}^{(i)}(h_i) + \bar{v}_1^{(i)}f_{1,0}^{(i)}(h_i),$$

$$(\bar{\lambda}_{b1}^{(i)} + \bar{\lambda}_2^{(i)})\rho_{1,1}^{(i)}(h_i) = \bar{\mu}_2^{(i)}\rho_{1,0}^{(i)}(h_i) + (\bar{v}_1^{(i)} - \bar{v}_2^{(i)})f_{1,1}^{(i)}(h_i),$$

$$\bar{v}_2^{(i)}f_{0,1}^{(i)}(h_i) = \bar{\lambda}_{b1}^{(i)}\rho_{1,1}^{(i)}(h_i) + \bar{\mu}_2^{(i)}\rho_{0,0}^{(i)}(h_i), \quad (6)$$

$$(\bar{\mu}_1^{(i)} + \bar{\mu}_2^{(i)})\rho_{0,0}^{(i)}(h_i) = \bar{\lambda}_1^{(i)}\rho_{1,0}^{(i)}(h_i),$$

$$\bar{v}_1^{(i)}f_{1,0}^{(i)}(h_i) = \bar{\mu}_2^{(i)}\rho_{0,0}^{(i)}(h_i), \text{ unde } \bar{\lambda}_{b1}^{(i)} = \bar{\lambda}_2^{(i)} \cdot \bar{v}_2^{(i)} / \bar{v}_1^{(i)}.$$

Pentru celelalte cazuri ($\bar{v}_1^{(i)} < \bar{v}_2^{(i)}$ sau $\bar{v}_1^{(i)} = \bar{v}_2^{(i)}$) ecuațiile de frontieră sunt obținute în mod similar.

Ecuația de normalitate. Deoarece suma tuturor probabilităților trebuie să fie egală cu 1, avem:

$$\sum_{\alpha_1=0,1} \sum_{\alpha_2=0,1} \int_0^{h_i} [f_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(x_i) dx_i + \rho_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(0) + \rho_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(h_i)] = 1. \quad (7)$$

Indicatorii de performanță:

- *Nivelul mediu \bar{x}_i al stocului în buferul b_i .* Acest indicator QoS este determinat de următoarea relație:

$$\bar{x}_i = \sum_{\alpha_1=0,1} \sum_{\alpha_2=0,1} \int_0^{h_i} [x_i \cdot f_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(x_i) dx_i + h_i \cdot \rho_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(h_i)]. \quad (8)$$

- *Productivitatea medie de procesare $\bar{\eta}2^{(i)}$ a DP_i* reprezintă viteza medie la care fluidul părăsește serverul SD_i din avale al buferului b_i . Când stocul nu este gol și SD_i este operațional, viteză aceasta este $\bar{v}_2^{(i)}$, iar când stocul este gol și ambele servere sunt operaționale, atunci viteză aceasta este egală cu $\bar{v}_1^{(i)}$, astfel avem:

$$\bar{\eta}2^{(i)} = \bar{v}_2^{(i)} \left[\int_0^{h_i} (f_{0,1}^{(i)}(x_i) + f_{1,1}^{(i)}(x_i)) dx_i + \rho_{1,1}^{(i)}(h_i) \right] + \bar{v}_1^{(i)} \cdot \rho_{1,1}^{(i)}(0). \quad (9)$$

În mod similar calculăm $\bar{\eta}1^{(i)}$, care reprezintă viteza medie la care fluidul intră în buferului b_i .

Conservarea fluxului în dipolul considerat pentru care $\bar{\eta}1^{(i)} = \bar{\eta}2^{(i)}$, $0 \leq x_i \leq h_i$ este determinată de ecuația:

$$(\bar{v}_2^{(i)} - \bar{v}_1^{(i)})f_{1,1}(x_i) + \bar{v}_2^{(i)}f_{0,1}(x_i) - \bar{v}_1^{(i)}f_{1,0}(x_i) = 0, \quad (10)$$

Soluționarea sistemului de ecuații (4) ce descrie evoluția stocului intern al buferului considerat este determinată de o funcție exponențială, forma căreia este:

$$f_{\alpha_1, \alpha_2}(x_i) = C^{(i)} \cdot y_1^{\alpha_1}(x_i) \cdot y_2^{\alpha_2}(x_i) \cdot e^{r^{(i)}x_i}, \quad (11)$$

unde parametri necunoscuți $y_1^{\alpha_1}(x_i)$, $y_2^{\alpha_2}(x_i)$ sunt determinați din următorul sistem de ecuații parametrice:

$$\sum_{j=1}^2 (\bar{\lambda}_j^{(i)} \cdot y_j(x_i) - \bar{\mu}_j^{(i)}) = 0, \quad (12)$$

$$-\bar{v}_1^{(i)} \cdot r^{(i)} = (\bar{\lambda}_1^{(i)} y_1(x_i) - \bar{\mu}_1^{(i)})(1 + y_1(x_i)) / y_1(x_i),$$

$$\bar{v}_2^{(i)} \cdot r^{(i)} = (\bar{\lambda}_2^{(i)} y_2(x_i) - \bar{\mu}_2^{(i)})(1 + y_2(x_i)) / y_2(x_i),$$

obținute din sistemul de ecuații (4), (5) și (6), iar $C^{(i)}$ din condiția de normalitate (7).

În cazul în care $r^{(i)} \neq 0$ din ecuațiile (12) obținem următoarea ecuație patrică în necunoscuta $y_1(x_i) = z_i$:

$$(\bar{v}_1^{(i)} - \bar{v}_2^{(i)})\bar{\lambda}_1^{(i)}z_i^2 + [(\bar{v}_2^{(i)} - \bar{v}_1^{(i)})(\bar{\mu}_1^{(i)} + \bar{\mu}_2^{(i)}) - (\bar{v}_2^{(i)}\bar{\lambda}_1^{(i)} + \bar{v}_1^{(i)}\bar{\lambda}_2^{(i)})]z_i + \bar{v}_2^{(i)}(\bar{\mu}_1^{(i)} + \bar{\mu}_2^{(i)}) = 0. \quad (13)$$

În cazul $\bar{v}_1^{(i)} = \bar{v}_2^{(i)} = \bar{v}^{(i)}$ ecuația (12) se reduce și obținem:

$$y_1(x_i) = y_2(x_i) = (\bar{\mu}_1^{(i)} + \bar{\mu}_2^{(i)}) / (\bar{\lambda}_1^{(i)} + \bar{\lambda}_2^{(i)}); \quad (14)$$

$$r^{(i)} = (\bar{\mu}_1^{(i)}\bar{\lambda}_2^{(i)} - \bar{\mu}_2^{(i)}\bar{\lambda}_1^{(i)}) \left(\frac{1}{\bar{\lambda}_1^{(i)} + \bar{\lambda}_2^{(i)}} + \frac{1}{\bar{\mu}_1^{(i)} + \bar{\mu}_2^{(i)}} \right) \frac{1}{\bar{v}^{(i)}}.$$

În baza sistemelor de ecuații (5), (6), a relațiilor (11), (14) și a condiției de normalitate (7) putem determina distribuția probabilităților de frontieră respectivă ale dipolului SC_i .

În cazul $\bar{v}_1^{(i)} \neq \bar{v}_2^{(i)}$, ecuația patrică (13) are două soluții:

$$f_{\alpha_1, \alpha_2}(x_i) = \sum_{j=1}^2 C_j^{(i)} \cdot y_{1j}^{\alpha_1}(x_i) \cdot y_{2j}^{\alpha_2}(x_i) \cdot e^{r_j^{(i)}x_i}, \quad (15)$$

unde necunoscutele respective sunt determinate din ecuațiile parametrice (11), iar pentru ecuațiile de frontieră avem două cazuri: $\bar{v}_1^{(i)} > \bar{v}_2^{(i)}$ și $\bar{v}_1^{(i)} < \bar{v}_2^{(i)}$.

Constantele necunoscute $C_1^{(i)}$ și $C_2^{(i)}$ sunt determinate din două ecuații lineare. Prima este: $C_1^{(i)}y_{1j}^{(i)} + C_2^{(i)}y_{2j}^{(i)} = 0$, iar a doua este dedusă din ecuația de normalitate (7) și ea se reduce la forma: $C_1^{(i)}A_{1j}^{(i)} + C_2^{(i)}A_{2j}^{(i)} = 1$, unde expresiile $A_{1j}^{(i)}$ și $A_{2j}^{(i)}$ depind de datele problemei analizate.

Pentru a lua în considerare interdependența funcționării dipolurilor adiacente este necesar ca înfometarea serverului SA_i și blocarea serverului SD_i să fie incluse în starea pasivă a acestora. De aceea ratele de schimbare a stărilor și viteza de procesare a serverelor respective trebuie ajustate. Restul acestei subsecțiuni se referă la această stare pasivă agregată.

Pentru SA_i (resp. SD_i), determinăm rata estimată de trecere în starea pasivă $\bar{\lambda}_A^{(i)}$ (resp. $\lambda_D^{(i)}$), rata estimată de trecere în starea activă $\bar{\mu}_A^{(i)}$ (resp. $\mu_D^{(i)}$) și $\bar{v}_A^{(i)}$ (resp. $\bar{v}_D^{(i)}$) viteza medie estimată de procesare în starea activă, care nu este neapărat egală cu viteza maxima specificată, deoarece poate fi cazul în care serverul respectiv uneori trebuie să-și ajusteze viteza din cauza unui server în amonte mai încet și a unui buffer gol.

În primul rând, determinăm parametrii pentru serverul SA_i , după care se vor identifica parametrii serverului SD_i .

Pentru a aceasta folosim informațiile din dipolul amonte, presupunând că avem informațiile necesare. Notăm că SA_i al dipolului considerat corespunde serverului SD_{i-1} al dipolului din amonte. Obținem ratele respective pentru SA_i prin legarea acestor două împreună: considerăm SA_i ca fiind în stare activă, ori de câte ori SA_{i+1} al dipolului aval produce și în starea pasivă în cazul în care el nu produce. Folosim următoarele informații din dipolul amonte (resp. a celui din avale):

- $\pi_{j,j'}^{(i-1)}$ (resp. $\pi_{j,j'}^{(i+1)}$) este probabilitatea că SA_{i-1} (resp. SA_{i+1}) este în starea j și SD_{i-1} (resp. SD_{i+1}) este în starea j' , ($j, j' \in \{1, 0\}$, unde 1="activ", iar 0="pasiv");
- $\rho_{j,j'}^{(i-1)}(0)$ (resp. $\rho_{j,j'}^{(i+1)}(h_{i+1})$) este probabilitatea că SA_{i-1} (resp. SA_{i+1}) este în starea j , SD_{i-1} (resp. SD_{i+1}) este în starea j' și b_{i-1} este gol (resp. b_{i+1} este plin);
- $f_{j,j'}^{(i-1)}(0)$ (resp. b_{i+1} este plin) este densitatea probabilității conținutului bufferului dipolului din avale când SA_{i-1} (resp. SA_{i+1}) este în starea j , SD_{i-1} (resp. SD_{i+1}) este în starea j' și b_{i-1} este gol (resp. b_{i+1} este plin);
- $\bar{\lambda}_A^{(i-1)}(j, j')$ (resp. $\bar{\lambda}_D^{(i+1)}(j, j')$) este rata de trecere din starea j în starea j' a lui SA_{i-1} (resp. SD_{i+1}).

Putem distinge trei moduri diferite în care serverul SA_i poate trece din starea activă în cea pasivă. În prima situație, defectarea este cauzată de o defectare actuală a serverului de sosire, iar a doua și a treia situație este cauzată de serverul de sosire SA_{i-1} al dipolului SC_{i-1} și de un buffer gol b_{i-1} . În acest caz rata medie agregată $\bar{\lambda}_A^{(i)}$ de trecere din starea activă în cea pasivă a lui SA_i este constituită din trei părți:

$$\bar{\lambda}_A^{(i)} = \bar{\lambda}_{A,1}^{(i)} + \bar{\lambda}_{A,2}^{(i)} + \bar{\lambda}_{A,3}^{(i)}. \quad (16)$$

Prima parte corespunde unei defectări actuale a lui SA_i , care are loc la o rată $\bar{\lambda}_{A,1}^{(i)} = \bar{\lambda}_1^{(i)}$. În al doilea rând, SA_i nu poate fi activ când SA_{i-1} din amonte este pasiv și bufferul b_{i-1} este gol. Numărul de salturi pe unitate de timp de acest tip este obținut din dipolul din amonte ca fiind $f_{0,1}^{(i-1)}(0)$. Această cantitate se înmulțește la viteza $\bar{v}_2^{(i-1)}$ cu care SD_{i-1} consumă fluidul din bufferul b_{i-1} . Trebuie să condiționăm acest fapt de probabilitatea $\pi_A^{(i-1)}$ că serverul SD_{i-1} din amonte este capabil să producă, adică $\pi_A^{(i-1)} = \pi_{1,1}^{(i-1)} + \pi_{0,1}^{(i-1)} - \rho_{0,1}^{(i-1)}(0)$, în baza căreia obținem: $\bar{\lambda}_{A,2}^{(i)} = f_{0,1}^{(i-1)}(0) \cdot v_2^{(i-1)} / \pi_A^{(i-1)}$.

Ultimul tip de salt de la starea activă (operațională) în cea pasivă apare atunci când bufferul din amonte este gol și serverul SA_{i-1} din amonte este activ. Acest caz apare cu probabilitatea $\rho_{1,1}^{(i-1)}(0)$. Dacă în acest caz serverul de sosire

din amonte trece în starea pasivă (neoperațională), ceea ce se întâmplă cu rata medie $\bar{\lambda}_2^{(i-1)}$, serverul SA_i considerat, de asemenea, trece în starea pasivă. Condiționăm acest fapt de probabilitatea ca serverul SD_{i-1} din amonte să poată produce, obținând astfel: $\lambda_{A,3}^{(i)} = \rho_{0,1}^{(i-1)}(0) \cdot \bar{\lambda}_2^{(i-1)} / \pi_A^{(i-1)}$.

Pentru a determina durata medie de aflare în starea pasivă, $1/\bar{\mu}_A^{(i-1)}$, folosim faptul că un salt din starea activă în cea pasivă este determinat de probabilitatea unei defectări actuale $\bar{\lambda}_{A,1}^{(i)} / \bar{\lambda}_A^{(i)}$ și de probabilitatea unei înfometări ($\bar{\lambda}_{A,2}^{(i)} + \bar{\lambda}_{A,3}^{(i)} / \bar{\lambda}_A^{(i)}$). În primul caz, avem o durată medie de aflare în stare pasivă $1/\bar{\mu}_1^{(i)}$ și în cel de al doilea caz obținem durata medie de aflare în stare pasivă a serverului în amonte, $1/\bar{\lambda}_1^{(i-1)}$; Astfel, durata medie de aflare în stare pasivă estimată a serverului din amonte este o medie ponderată pentru aceste două probabilități:

$$\frac{1}{\bar{\mu}_A^{(i-1)}} = \frac{\bar{\lambda}_{A,1}^{(i)}}{\bar{\lambda}_A^{(i)}} \cdot \frac{1}{\bar{\mu}_1^{(i)}} + \frac{\bar{\lambda}_{A,2}^{(i)} + \bar{\lambda}_{A,3}^{(i)}}{\bar{\lambda}_A^{(i)}} \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}_1^{(i-1)}}. \quad (17)$$

Viteza medie de procesare $\bar{v}_A^{(i)}$ în starea activă, este o medie ponderată a două viteze posibile, fiind condiționată de faptul că SD_{i-1} produce (și astfel, SA_i este activ) și buferul b_{i-1} din amonte este gol cu probabilitatea $\rho_{1,1}^{(i-1)}(0) / \pi_{A,2}^{(i-1)}$. În acest caz, serverul SA_i trebuie să-și adapteze viteza sa la predecesorul său, care produce cu viteza $\bar{v}_A^{(i-1)}$. De asemenea, cu probabilitatea complementară, serverul de sosire este capabil să producă la viteza maximă \bar{v}_i . Astfel, obținem:

$$\bar{v}_A^{(i)} = \bar{v}_i - (\bar{v}_i - \bar{v}_A^{(i-1)}) \cdot \rho_{1,1}^{(i-1)}(0) / \pi_A^{(i-1)}. \quad (18)$$

În mod similar, cum și pentru serverul SA_i , putem părționa în trei părți rata medie agregată de trecere de la starea activă la cea pasivă a serverului SD_i :

$$\bar{\lambda}_D^{(i)} = \bar{\lambda}_{D,1}^{(i)} + \bar{\lambda}_{D,2}^{(i)} + \bar{\lambda}_{D,3}^{(i)}. \quad (19)$$

Prima parte corespunde unei defectări actuale a serverului de SD_i , care are loc la o rată $\bar{\lambda}_{D,1}^{(i)} = \bar{\lambda}_2^{(i)}$, iar a doua și a treia parte sunt salturi cauzate de blocarea serverului când bufferul din avale b_{i+1} al acestuia este plin.

Deoarece analiza urmează de-a lungul aceluiași SCP, în mod simetric ca și pentru serverul SA_i , vom prezenta numai expresiile ale ratelor de salturi între stări și ale vitezei medii respective pentru acest caz:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{D,1}^{(i)} &= \bar{\lambda}_2^{(i)}, \quad \bar{\lambda}_{D,2}^{(i)} = f_{1,0}^{(i+1)}(h_{i+1}) \cdot \bar{v}_D^{(i+1)} / \pi_D^{(i+1)}, \\ \lambda_{D,3}^{(i)} &= \rho_{1,1}^{(i+1)}(h_{i+1}) \cdot \bar{\lambda}_D^{(i+1)}(j, j') / \pi_D^{(i+1)}, \\ \frac{1}{\bar{\mu}_D^{(i)}} &= \frac{\bar{\lambda}_{D,1}^{(i)}}{\bar{\lambda}_D^{(i)}} \cdot \frac{1}{\bar{\mu}_2^{i+1}} + \frac{\bar{\lambda}_{D,2}^{(i)} + \bar{\lambda}_{D,3}^{(i)}}{\bar{\lambda}_D^{(i)}} \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}_2^{(i+1)}}, \\ \bar{v}_D^{(i)} &= \bar{v}_{i+1} - (\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_D^{(i+1)}) \cdot \rho_{1,1}^{(i+1)}(h_{i+1}) / \pi_D^{(i+1)}, \text{ unde} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\pi_D^{(i+1)} = \pi_{1,1}^{(i+1)} + \pi_{1,0}^{(i+1)} - \rho_{1,0}^{(i+1)}(h_{i+1}).$$

Aceasta completează analiza dipolului SC_i .

V. ALGORITMUL ITERATIV DE ANALIZĂ A RPHS

Pentru a efectua analiza unui SCP cu N servere el este descompus în $SC_1, SC_2, \dots, SC_{N-1}$ dipoli.

În baza utilizării metodei descrise în secțiunile III și IV pentru a obține productivitatea medie a SCP și a conținutului mediu al buferelor aplicăm următoarea procedură iterativă:

Pasul 1. Inițializare: Setăm atributele cantitative ale modelului RPHS și contorul de iterații $k = 0$. Utilizând platforma PIPE 2.5 [8], calculăm probabilităților staționare π_j de aflare în marcajul M_j accesibil din cel inițial al părții discrete RPS a modelului RPHS analizat. Pentru fiecare dipol SC_i ,

$i = 1, 2, \dots, N-1$ în baza π_j calculăm $\bar{\lambda}_1^{(i)}, \bar{\lambda}_2^{(i)}, \bar{\mu}_1^{(i)}, \bar{\mu}_2^{(i)}$ și $\bar{v}_1^{(i)}, \bar{v}_2^{(i)}$. În dependență de relațiile dintre mărimile $\bar{v}_1^{(i)}$ și $\bar{v}_2^{(i)}$, în baza expresiilor (9) și (16) - (20) calculăm respectiv: $\gamma_k^i = \bar{\eta}2^{(i)}$ și $\bar{\lambda}_A^{(i)}, \bar{\lambda}_D^{(i)}, \bar{\mu}_A^{(i)}, \bar{\mu}_D^{(i)}, \bar{v}_A^{(i)}, \bar{v}_D^{(i)}$.

Pasul 2. Pentru fiecare dipol $SC_i, i = 1, 2, \dots, N-1$ efectuăm: 1) Incrementăm contorul de iterații cu unul, $k = k + 1$; 2) Setăm $\bar{\lambda}_1^{(i)} = \bar{\lambda}_A^{(i)}, \bar{\lambda}_2^{(i)} = \bar{\lambda}_D^{(i)}, \bar{\mu}_1^{(i)} = \bar{\mu}_A^{(i)}, \bar{\mu}_2^{(i+1)} = \bar{\mu}_D^{(i)}, \bar{v}_1^{(i)} = \bar{v}_A^{(i)}$ și $\bar{v}_2^{(i)} = \bar{v}_D^{(i)}$; 3) În dependență de relațiile dintre mărimile $\bar{v}_1^{(i)}$ și $\bar{v}_2^{(i)}$ pentru aceste noi atribute calculăm probabilitățile staționare $\pi_{j,j'}^{(i)}$, probabilitățile de frontieră $\rho_{j,j'}^{(i)}(0)$ și $\rho_{j,j'}^{(i)}(h_i)$, funcția densității de probabilitate $f_{j,j'}^{(i)}(x_i)$ a conținutului bufferului b_i și productivitatea medie estimată $\gamma_k^i = \bar{\eta}2^{(i)}$ la iterația k , în baza cărora calculăm $\bar{\lambda}_A^{(i)}, \bar{\lambda}_D^{(i)}, \bar{\mu}_A^{(i)}, \bar{\mu}_D^{(i)}$ și $\bar{v}_A^{(i)}, \bar{v}_D^{(i)}$; 4) Dacă $i < N-1$, ajustăm $\bar{\lambda}_A^{(i+1)}$ și viteza $\bar{v}_A^{(i+1)}$ a dipolului din avale, folosind expresiile respective din subsecțiunea IV; 5) Dacă $i > 1$, ajustăm $\bar{\lambda}_D^{(i-1)}$ și viteza $\bar{v}_D^{(i-1)}$ a dipolului din amonte folosind expresiile respective din subsecțiunea IV.

Pasul 3. Repetăm Pasul 2 până când obținem convergență pentru toate estimările ale productivității SCP γ_k^i . Adică, dacă pentru o mărime de precizie ε foarte mică specificată, obținem $\min_{\forall i} (|\gamma_k^{(i)} - \gamma_{k-1}^{(i)}| / \gamma_k^{(i)}) > \varepsilon$ facem o altă iterație; altfel trecem la pasul 4.

Pasul 4. Pentru fiecare dipol $SC_i, i = 1, 2, \dots, N-1$, în baza atributelor cantitative obținute la ultima iterație, calculăm, conform expresiei (8), nivelul mediu \bar{x}_i de fluid în buferul b_i , apoi oprim calculele și afișăm rezultatele specificate.

Pentru validarea metodei dezvoltate în această lucrare a fost folosit un set mare de teste în care au fost comparate

mărimile productivității medie a SCP și a conținutului mediu al bufferului respectiv approximate cu cele obținute prin metode de simulare cu evenimente discrete [3]. S-a constatat că mărimile $\gamma_k^{(i)}$ ale tuturor dipolilor converg la aceeași mărime pentru care eroarea este mai mica decât 2.47%.

CONCLUZII

În această lucrare este dezvoltată o metodă aproximativ-agregată pentru analiza indicatorilor QoS ai modelelor RPHS ale unui sistem multiprocesor pipe-line (SCP). Metoda constă în decompoziția SCP în subsisteme $SC_i, i = 1, 2, \dots, N-1$, numite dipoli, fiecare fiind compus dintr-un server de sosire, un server de plecare și un buffer între ele cu o capacitate finită de procesare și stocare a datelor, modelate ca fluxuri de fluid.

Pentru analiza unui dipol este propusă o metodă prin care ratele medii ale schimbării stărilor respective și a vitezei medii de procesare ale ambelor servere ale dipolului sunt determinate în baza unui algoritm de calcul numeric iterativ al mărimilor parametrilor specificați, care converg rapid.

Folosind un set mare de teste, au fost comparate mărimile approximate ale productivității medie a SCP și conținutul mediu al bufferelor cu cele obținute prin simularea cu evenimente discrete. Eroarea mărimilor estimate ale ambelor indicatori este mică.

Abordarea descrisă în lucrare poate fi în continuare generalizată pentru a studia sisteme din domeniul cu caracteristici de funcționare dinamic reconfigurabile care sunt condiționate de evenimente specificate la etapa de proiectare.

Lucrarea dată a fost efectuată în cadrul proiectului național de cercetări științifice aplicative 14.820.18.02.03/U.

REFERINȚE

- [1] A.T. Belmansour, M. Nourelfath, "An aggregation method for performance evaluation of a tandem homogenous production line with machines having multiple failure modes," Reliability Eng. and System Safety, Vol 95, No 11, pp. 1193-1201, 2010.
- [2] R. Bierbooms, I. Adan, M. Vuuren, "Approximate performance analysis of production lines with continuous material flows and finite buffers," Stochastic Models, 29, pp. 1-30, 2013.
- [3] G. Ciardo, D.M. Nicol, K.S. Trivedi, "Discrete-event simulation of fluid stochastic Petri nets," IEEE Transactions on Software Engineering, 2, (25), pp. 207-217, 1999.
- [4] M. Colledani, S. Gershwin, "A decomposition method for approximate evaluation of continuous flow multi-stage lines with general Markovian machines," Annals Oper. Res., 209, pp. 5-40, 2013.
- [5] S. Fleuren, R. Bierbooms, I. Adan, "Performance Analysis of Exponential Multi-Server Production Lines with Fluid Flow and Finite Buffers," Stochastic Models, 30:4, 469-493, 2014, DOI: 10.1080/15326349.2014.959183.
- [6] E. Guțuleac, "Descriptive compositional HSPN modeling of computer systems," Annals of the University of Craiova, România, Series: Automation, Computers, Electronics and Mechatronics, Vol. 3(30), No.2, pp. 82-87, 2006.
- [7] E. Guțuleac, Evaluarea performanțelor sistemelor de calcul prin rețele Petri stochastice. Ed. „Tehnica-Info”, Chișinău, 2004, - 276 p.
- [8] Petri nets world - Petri nets tools database. <http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/tools/quick.html>