

SOLUȚIA ECUAȚIEI HIPERBOLICE DE CONDUCTIVITATE TERMICĂ CU SURSĂ PUNCTIFORMĂ DE ENERGIE

Sorin DÎRȚU

Inginerie Mecanică, MISFC-201, Facultatea Inginerie Mecanică, Industrială, și Transporturi, Universitatea Tehnică a Republicii Moldova, Chișinău, Republica Moldova

Autorul corespondent: Sorin Dîrțu, e-mail: sorin.dirtu@im.utm.md

Îndrumător/coordonator științific: Leonid IVANOV, conferențiar universitar, doctor, UTM

Rezumat. În baza analizelor proceselor cu sursă punctiformă de energie la prelucrarea diferitor metale și rezolvării ecuației hiperbolice de conductivitate termică am primit trei soluții: când discriminantul este mai mic decât 0, când este egal cu 0 și când este mai mare decât 0. Când discriminantul este mai mic decât 0 metalul nu se topește, ci se sublimă, când discriminantul este egal cu 0 tot are loc procesul de sublimare, iar când discriminantul este mai mare decât 0 are loc procesul de topire și respectiv poate fi determinată frontiera de topire. Asigurând astfel control asupra prelucrării, o prezie mai înaltă și minimizarea pierderilor.

Cuvinte cheie: soluția ecuației hiperbolice de conductivitate termică

Introducere

Odată cu dezvoltarea tehnologiei a apărut o constantă nevoie a îmbunătățirii proceselor tehnologice de prelucrare a materialelor. Ca exemplu: prelucrarea cu undă laser, prelucrarea cu scânteie electrică, prelucrarea cu arc electric, etc. Iar odată cu aceste procese a apărut nevoia cunoașterii proprietăților termo-fizice ale materialelor prelucrate și caracteristicilor surselor de energie folosite. Noi am studiat în această lucrare procesele cu intensitate înaltă și viteză finită.

Aici apare problema. O intensitate prea înaltă va crea un gradient de temperatură prea mare și mai mult ca sigur deteriorarea sau deformarea materialului va avea loc, în unele cazuri folosirea lui ulterioară fiind imposibilă.

Rezolvarea acestei probleme vine odată cu obținerea unei soluții a ecuației hiperbolice de conductivitate termică cu sursă punctiformă de energie. Anume cunoașterea particulatăților transferului de căldură în zona unde este aplicată energia ne ajută să organizăm mai rațional procesul de prelucrare a materialului, să minimizăm pierderile, și să primim materialul prelucrat cu caracteristici cât mai asemănătoare definiției preliminare.

Rezolvarea ecuației

Pentru a rezolva ecuația hiperbolică a conductivității termice cu sursă punctiformă de energie, se fac următoarele presupuneri: coeficienții termofizici sunt constanți și egali cu valorile medii în intervalului de temperatură studiat, procesele de topire și aruncările de metal sunt despartite în timp, transferul de căldură de pe suprafața electrodului este neglijat, mediul este semi-mărginit.

Astfel, având în vedere cele spuse mai sus, putem scrie ecuația energiei în felul următor:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + a_{\tau} \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{Q(\tau)}{c\rho} \delta(x-x_0), \quad (1)$$

În condiții inițiale:

$$t|_{\tau=0} = t_0 \quad (2)$$

$$\left. \frac{dt}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (3)$$

În condiții de frontieră:

$$t|_{x=3} = t_{top} \quad (4)$$

$$\left. \frac{dt}{d\tau} \right|_{x=0} = 0 \quad (5)$$

Unde: a_τ – timpul de relaxare; a – coeficientul de difuzivitate termică, Q – puterea sursei punctiforme de energie raportată la suprafață, c – capacitatea termică specifică a materialului, ρ – densitatea specifică a materialului, $\delta(x - x_0)$ – funcția δ , t, t_{top} – curentă în faza lichidă și respectiv temperatura de topire.

Ne vom folosi de proprietățile funcției δ și vom căuta rezolvarea ecuației în următoarea formă:

$$t(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty t_\lambda(\tau) \cos \lambda(x - x_0) d\lambda \quad (6)$$

Trecând în domeniul de descriere de după coordonată vom primi o ecuație diferențială obișnuită de gradul doi.

În dependență de discriminanta ecuației caracteristice primim trei soluții. Analiza soluțiilor primite a arătat că: dacă $D < 0$ atunci primim valori negative ale temperaturii și soluția ecuației are următoarea formă:

$$t_\lambda(\tau) = \frac{t_{top}}{2\sqrt{D}} \left[\frac{1}{a_\tau} + \sqrt{D} \right] \exp \left[\frac{-\frac{1}{a_\tau} + \sqrt{D}}{2} \tau \right] + \left[-\frac{1}{a_\tau} + \sqrt{D} \right] \exp \left[\frac{-\frac{1}{a_\tau} - \sqrt{D}}{2} \tau \right] + \frac{2}{\sqrt{D}} \int_0^{\tau_2} \frac{Q_\lambda(\tau)}{e\rho} \exp \left[\frac{\tau - \tau_2}{2a_\tau} \right] sh \frac{\sqrt{D}(\tau - \tau_2)}{2} d\tau \quad (7)$$

Acesta soluție este lipsită de sens fizic. Deoarece intensitatea procesului va fi foarte mare și materialul nu se va topi, dar se va sublima, îl vom distruge. Iar în final ne vom alege cu o gaură în material.

Însă dacă scopul nostru este să prelucrăm materialul găurindul sau dacă prelucrăm diamante putem aplica această metodă.

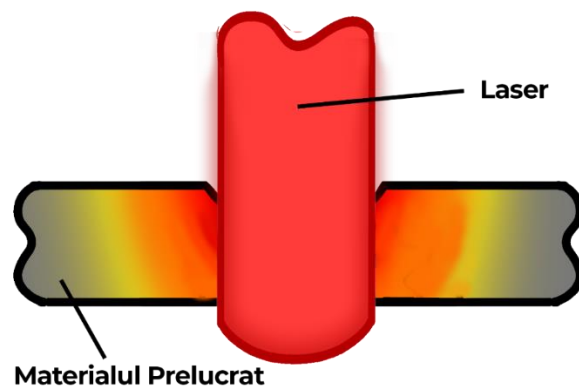


Figura 1. Prelucrarea metalului cu o sursă laser de înaltă intensitate

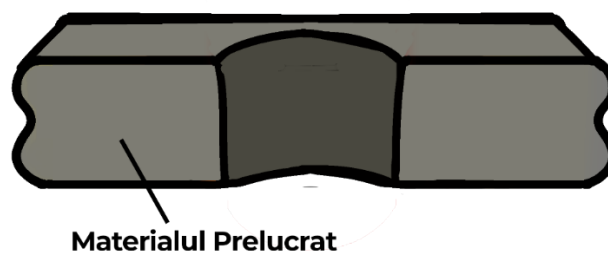


Figura 2. Rezultatul prelucrării metalului cu o sursă laser de intensitate înaltă

În cazul când $D = 0$ soluția ecuației are forma:

$$t_{\lambda}(\tau) = \exp\left[-\frac{\tau}{2a_{\tau}}\right] t_{top} \left[\frac{\tau}{2a_{\tau}} + 1\right] + \int_0^{\tau_2} \frac{Q_{\lambda}}{c\rho a_{\tau}} (\tau_2 - \tau) \exp\left[\frac{\tau - \tau_2}{2a_{\tau}}\right] d\tau \quad (8)$$

Acest caz nu poate fi folosit în condiții practice, deoarece condițiile de introducere adiabatică sunt încălțate, chiar dacă transferul de caldură în interiorul materialului este mai mic ca în cazul precedent. În acest caz tot va avea loc sublimarea materialului, nu topirea lui. Iar din cauza ca intensitatea este mult mai mică la frontieră pot apărea crăpături și micro-crăpături.

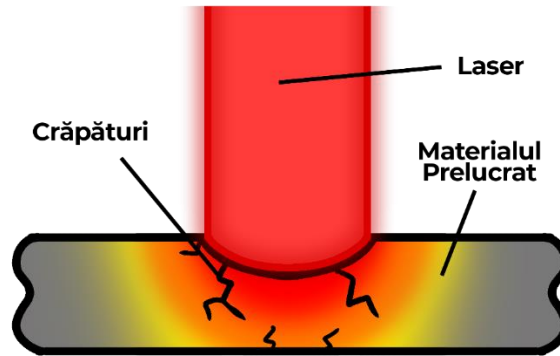


Figura 3. Prelucrarea metalului cu o sursă laser de înaltă intensitate când discriminantul este egal cu zero

Iar în cazul în care $D > 0$ soluția ecuației are forma:

$$t_{\lambda}(\tau) = \exp\left[-\frac{\tau}{2a_{\tau}}\right] t_{top} \left[\cos\sqrt{\frac{|D|}{2}}\tau + \frac{1}{\sqrt{|D|}a_{\tau}} \sin\frac{\sqrt{|D|}\tau}{2} \right] + \frac{2}{\sqrt{|D|}} \int_0^{\tau} \frac{Q_{\lambda}(\tau)}{c\rho} \exp\left[\frac{\tau - \tau_2}{2a_{\tau}}\right] \sin\frac{\sqrt{|D|}}{2}(\tau - \tau_2) d\tau \quad (9)$$

În acest caz nu are loc o creștere bruscă a temperaturii. Aceasta vorbește despre existența unui transferului de caldură echilibrat cauzat de conductivitatea materialului. Respectiv materialul se topește, și se formează un bilanț de energie care ne va permite să determinăm viteza de topire și adâncimea suprafeței care se topește. Presiunea termică e mai mică decât limita de durabilitate a materialului.

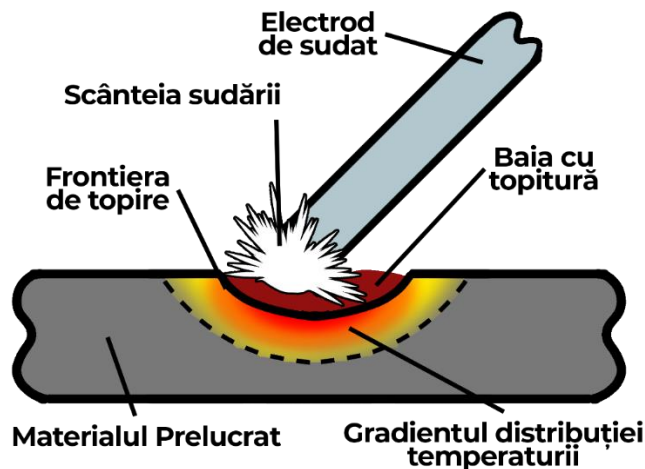


Figura 4. Prelucrarea metalului cu un electrod de sudat

Analizând cazurile date și substituind soluțiile ecuațiilor anterioare vom primi distribuția reală a temperaturii în spațiu.

Perturbația termică în faza solidă se poate afla din ecuația (1), pentru $Q(\tau) = 0$, în condiții inițiale:

$$t|_{\tau=0} = t_{top}, \quad \left. \frac{dt}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (10)$$

Și în condițiile de frontieră:

$$t_2|_{x=3} = t_{top}, \quad \left. \frac{dt_2}{d\tau} \right|_{x=\sqrt{\pi a \tau}} = 0 \quad (11)$$

Obținem distribuția temperaturii:

$$t_2(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\tau}{2a_\tau}\right] t_{top} \left[\cos \frac{\sqrt{D}}{2} \tau + \frac{1}{a_\tau \sqrt{D}} \sin \frac{\sqrt{D}}{2} \tau \right] \cos \lambda(x - x_0) d\lambda \quad (12)$$

Legea mișcării izotermei de topire va reieși din ecuația balanței termice la frontiera tranziției de fază:

$$-\lambda_1 \left. \frac{dt_1}{dx} \right|_{x=3} = t_{top} \rho \frac{d\xi}{d\tau} - \lambda_2 \left. \frac{dt_2}{dx} \right|_{x=3} \quad (13)$$

Rezolvând ecuația (13), luând în considerare (6), (9), (12) și acceptând $Q = \text{const}$, vom avea legea mișcării zonei tranziției de fază pentru intervalele de timp mai mari ca timpul de relaxare (în cazul dacă șirul converge bine):

$$\xi = \frac{\frac{E}{L\rho S\tau_2} - \frac{\lambda_2}{L\rho} t_{top} \sqrt{\frac{\omega + a_\tau \omega^2}{a}}}{\frac{E}{L\rho S\tau_2} \sqrt{\frac{\omega + a_\tau \omega^2}{a}}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E}{L\rho S\tau_2} \sqrt{\frac{\omega + a_x \omega^2}{a}}} \right) \quad (14)$$

Respectiv, studiind ecuația hiperbolică a conductivității termice și rezolvând-o putem determina distribuția câmpului de temperatură la materiale în procese cu viteză mare, astfel primind date esențiale în ceea ce privește prelucrarea ulterioară a materialului cu o exactitate și eficiența crescută, plus reducerea pierderilor.

Concluzii

În cadrul studiului conductivității termice pentru o sursă punctiformă de energie folosind ecuația hiperbolică am ajuns la trei soluții. Două fara aplicare practică, și una cu aplicare practică, anume când discriminantul este mai mare decât 0. Soluția acestei ecuații va fi frontiera de topire și astfel vom putea prelucra materialul cu o sursă punctiformă de energie, reducând pierderile la minimum.

Mulțumiri. Aduc mulțumiri lui Leonid Ivanov și Igor Gîdei pentru contribuția lor în solutionarea ecuației cercetate.

Referințe

1. IVANOV, L., PISARENCO, V. *Principiile optimizării instalațiilor frigorifice*. Chișinău: U.T.M. 2006. pp. 80-83.
2. ЛЫКОВ А.В., *Теория теплопроводности*. – М. 1967.
3. ШВАРЦ Л., *Математические методы для физических наук*. – М. Мир, 1965.