CZU 621.74

DETERMINAREA DISTRIBUȚIEI TEMPERATURII ÎN STRATURILE COMPENSATOARE DE UZURĂ A PIESELOR RECONDIȚIONATE CU MATERIALE COMPOZITE POLIMERICE

Dumitru ȘEREMET, Grigore MARIAN
Universitatea Agrară de Stat din Moldova

Abstract. The main purpose of this work was to determine the distribution of thermal field in coatings made of composite materials which are applied as a compensating wear layer to recondition machine parts. The proposed purpose is reflected in some objectives, and namely: to obtain a field of axially symmetric temperatures, which is distributed over the layer of composite materials; to validate the results by addressing the limit problem by means of direct integration and Green's functions methods. The authors proposed a methodology to calculate the temperature in different layers of the polymer coating as well as the result of mathematical modeling and theoretical analysis. There have been developed analytical expressions and graphs of both Green's function and temperature field for the problem of an axially symmetric limit of thermal conductivity. The graphical presentation has been developed by means of "Maple 15" software. The obtained data will be used for engineering design calculations and selection of clamping fits renovated with the use of polymer composites.
Keywords: Clamping fit; Polymeric coatings; Temperature field; Direct integration method; Green's function method; Axially symmetric problem.
Rezumat. Scopul principal al acestei lucrări este stabilirea distribuției câmpului termic în acoperirile din materiale compozite aplicate în calitate de strat compensator de uzură la recondiționarea pieselor de mașini. Realizarea scopului propus și-a găsit oglindire în câteva obiective și anume: obținerea câmpului de temperaturi axial simetrice, repartizat pe grosimea stratului de material compozit; validarea rezultatelor obținute prin rezolvarea problemei de limită prin metoda integrării directe și prin metoda funcțiilor Green. În rezultatul modelării matematice și analizei teoretice se propune metodica de calcul al temperaturii în diferite straturi ale acoperirii polimerice. Au fost construite expresiile analitice și graficele atât ale funcției Green, cât și ale câmpului de temperatură pentru problema de limită axial simetrică a conductibilității termice. Prezentarea grafică a fost realizată cu aplicarea softului Maple 15. Datele obținute vor fi folosite în calculele inginerești de proiectare și alegere a ajustajelor cu strângere renovate cu materiale compozite polimerice.
Cuvinte-cheie: Ajustaj cu stranger; Acoperiri polimerice; Câmp de temperatură; Metoda integrării directe; Metoda funcției Green; Problema axial simetrică.

INTRODUCERE

Studierea distribuției câmpului de temperaturi pe grosimea acoperirilor polimerice este extrem de importantă pentru calculul corect al valorilor ajustajelor îmbinărilor metalopolimerice cu strângere. Articolul urmărește scopul de a stabili caracterul distribuției câmpului termic în acoperirile din materiale compozite aplicate în calitate de strat compensator de uzură la recondiționarea pieselor de mașini prin metoda dimensiunilor nominale. Importanța și actualitatea studiului sunt justificate de rolul preciziei calculului ajustajelor cu strângere în asigurarea durabilității și disponibilității îmbinărilor cu strângere recondiționate cu materiale compozite. În baza analizei datelor din literatura de specialitate (Kartašov, E.M. 2001; Marian, G. 2005; Melnikov, Yu. 1995; Nowacki, W. 2005) și a modelărilor matematice proprii a fost formulată o metodică de calcul al temperaturii în diferite straturi ale acoperirilor polimerice. Metodica se bazează pe folosirea funcțiilor Green, care posedă un șir de avantaje față de metodele tradiționale folosite în astfel de calcule. Expresiile analitice și graficele pentru cazurile analizate au fost construite cu ajutorul softului Maple 15. Datele obținute vor fi folosite în calculele ce țin de stabilirea carterului și valorilor deplasărilor și tensiunilor interioare în diferite straturi ale acoperirilor de pe piesele recondiționate cu compozite polimerice. Acest lucru, în final, va contribui la sporirea preciziei calculului ajustajelor cu strângere și, implicit, la sporirea fiabilității îmbinărilor respective.

MATERIAL ȘI METODĂ

Modelele matematice pentru câmpul de temperaturi formate în interiorul acoperirilor de polimer au fost formulate cu ajutorul funcțiilor Green. Pentru prezentarea grafică a funcției Green și a temperaturilor în diferite straturi ale acoperirilor din materiale compozite polimerice, în funcție de locul stratului de polimer unde este necesar să se estimeze valoarea temperaturii, a fost folosit softul Maple 15. Cu ajutorul acestuia pot fi construite grafice pentru diferite condiţii de exploatare. Pentru exemplificare se prezintă graficele deplasărilor şi tensiunilor pentru un caz concret de îmbinare a cărei piesă cuprinzătoare este recondiţionată prin compensarea uzurii cu materiale compozite formate pe bază de polimeri. Pentru validarea rezultatelor obţinute, expresiile analitice s-au determinat prin două metode: metoda integrării directe şi metoda funcţiilor Green.

REZULTATE ŞI DISCUŢII

I. Formularea matematică a problemei Dirichlet de determinare a temperaturii axial simetrice în cilindrul cu pereţii groşi

Pentru determinarea temperaturii $T(r)$ în stratul circular $V \equiv \left(r_1 \le r \le r_2, 0 \le \varphi \le 2\pi\right)$ este necesar să se rezolve următoarea ecuaţie diferenţială:

$$\frac{d^2T(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{S(r)}{a} \qquad (1),$$

cu anumite condiţii de limită pentru $T(r)$ (în această lucrare se vor studia condiţiile de limită de tip Dirichlet). În ecuaţia (1), $S(r)$ şi a sunt, respectiv, sursa de căldură şi conductibilitatea termică. Vom prezenta două metode de rezolvare a acestei ecuaţii: *Metoda integrării directe* şi *Metoda funcţiei Green.*

II. Metoda integrării directe

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (1) se obţine ca suma soluţiei generale a ecuaţiei omogene $S = 0$ şi a soluţiei particulare a ecuaţiei neomogene $S \neq 0$ (Melnikov, Yu. 1995):

$$T(r) = T_{go}(r) + T_p(r) \qquad (2a)$$

Soluţia generală a ecuaţiei (1) omogenă se determină după formula

$$T_{go}(r) = C_1 \ln r + C_2 \qquad (2b),$$

unde r şi 1 sunt două soluţii particulare linear independente, iar C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare de integrare. În cazul unei surse constante de căldură $S(r) = S = const$

$$T_p(r) = -\frac{S}{4a}r^2 \qquad (3)$$

Remarcăm că această soluţie poate fi obţinută în baza soluţiei (2b) considerând C_1 şi C_2 funcţii de raza *r*, cu aplicarea metodei variaţiei constantelor de integrare, care însă implică un volum mare de muncă. Această metodă trebuie repetată pentru fiecare funcţie concretă *S(r)*.

În cazul când $S(r) = S = const$, substituind (3) şi (2b) în (2a) obţinem următoarea expresie finală generală pentru temperatură:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 - \frac{1}{4}a^{-1}Sr^2 \qquad (4),$$

în care constantele arbitrare de integrare C_1 şi C_2 se vor determina din condiţiile termice de limită pe conturele $\Gamma_1 \equiv \left(r = r_1, 0 \le \varphi \le 2\pi\right)$ şi $\Gamma_2 \equiv \left(r = r_2, 0 \le \varphi \le 2\pi\right)$.

În cazul problemei de limită Dirichlet, aceste condiţii se vor formula astfel:

$$T(r = r_1) = T_1; T(r = r_2) = T_2 \qquad (5)$$

Coeficienţii arbitrari de integrare C_1 şi C_2 din soluţia (4) se vor determina din condiţiile de limită (5). Introducem (4) în (5) şi obţinem următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} C_1 \ln r_1 + C_2 = \frac{1}{4}a^{-1}Sr_1^2 + T_1 \\ C_1 \ln r_2 + C_2 = \frac{1}{4}a^{-1}Sr_2^2 + T_2 \end{cases} \qquad (6)$$

Soluţia sistemului (6) o obţinem cu aplicarea metodei lui Kramer:
determinantul principal se calculează prin relaţia:

$$D = \begin{vmatrix} ln\, r_1 & 1 \\ ln\, r_2 & 1 \end{vmatrix} = ln \frac{r_1}{r_2}. \tag{7}$$

iar determinanţii secundari – prin următoarea formulă:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} a^{-1} S r_1^2 + T_1 & 1 \\ \frac{1}{4} a^{-1} S r_2^2 + T_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} a^{-1} S \left(r_1^2 - r_2^2 \right) + \left(T_1 - T_2 \right). \tag{8}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} ln\, r_1 & \frac{1}{4} a^{-1} S r_1^2 + T_1 \\ ln\, r_2 & \frac{1}{4} a^{-1} S r_2^2 + T_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} a^{-1} S \left(r_2^2\, ln\, r_1 - r_1^2\, ln\, r_2 \right) + \left(T_2\, ln\, r_1 - T_1\, ln\, r_2 \right). \tag{9}$$

Coeficienţii sunt

$$C_1 = \frac{D_1}{D} = \left[\frac{1}{4} a^{-1} S \left(r_1^2 - r_2^2 \right) + \left(T_1 - T_2 \right) \right] \left(ln \frac{r_1}{r_2} \right)^{-1} \tag{10}$$

$$C_2 = \frac{D_2}{D} = \left[\frac{1}{4} a^{-1} S \left(r_2^2\, ln\, r_1 - r_1^2\, ln\, r_2 \right) + \left(T_2\, ln\, r_1 - T_1\, ln\, r_2 \right) \right] \left(ln \frac{r_1}{r_2} \right)^{-1} \tag{11}$$

Substituind (10) şi (11) în (4) obţinem soluţia finală în următoarea formă:

$$T(r) = \left(ln \frac{r_1}{r_2} \right)^{-1} \left[\frac{1}{4} a^{-1} S \left(\left(r_1^2 - r_2^2 \right) ln\, r + \left(r_2^2\, ln\, r_1 - r_1^2\, ln\, r_2 \right) - \left(ln \frac{r_1}{r_2} \right) r^2 \right) + T_1\, ln \frac{r}{r_2} - T_2\, ln \frac{r}{r_1} \right] \tag{12}$$

III. Metoda funcţiei Green

Această metodă a fost aplicată la calculul stării de deformaţii şi tensiuni la piesele recondiţionate cu straturi compensatoare de uzură (Şeremet, V. et al. 2004) şi la calculul ajustajelor restabilite cu compozite polimerice (Şeremet, V. et al. 2005). În această lucrare, metoda funcţiei Green se aplică la determinarea câmpului de temperaturi în acoperirile polimerice necesar pentru calculul deplasărilor termoelastice şi tensiunilor termice.

IV. Construirea funcţiei Green pentru ecuaţia (1)

Ecuaţia diferenţială pentru construirea funcţiei Green a ecuaţiei (1) se va prezenta astfel:

$$2\pi r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) G_T(r, \rho) = -\delta(r - \rho) \tag{13),}$$

unde $G_T(r, \rho)$ este funcţia Green, $\delta(r - \rho)$ - funcţia Dirac. Pentru construirea funcţiei Green vom folosi algoritmul expus în monografia lui Yu. Melnikov (1995). Deoarece soluţia ecuaţiei omogene (1) se scrie sub forma (2b), funcţia Green pentru ecuaţia (13) o vom prezenta în felul următor:

$$G_T = \begin{cases} G_T^s = c_1 + c_2\, ln\, r;\ r_1 \le r \le \rho \\ G_T^d = k_1 + k_2\, ln\, r;\ \rho \le r \le r_2 \end{cases} \tag{14}$$

unde G_T^s, G_T^d sunt expresiile funcţiei Green pentru zonele din stânga şi dreapta raportate la punctul de aplicare ρ a sursei unitare de căldură - $\delta(r - \rho)$. Conform acestui algoritm, condiţiile de conjugare a funcţiei Green (14) pot fi calculate astfel:

$$G_T^s(r = \rho) = G_T^d(r = \rho) \tag{15a}$$

$$\frac{d}{dr} G_T^s(r = \rho) - \frac{d}{dr} G_T^d(r = \rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \tag{15b}$$

Substituind expresiile (14) în (15a), (15b) vom obţine următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} c_1 - k_1 = -(c_2 - k_2)\ln\rho \\ (c_2 - k_2)\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{2\pi\rho} \end{cases} \tag{16}$$

Soluţia sistemului (16) este:

$$k_1 = c_1 + \frac{1}{2\pi}\ln\rho\,;\; k_2 = c_2 - \frac{1}{2\pi} \tag{17}$$

Introducem (17) în (14) şi obţinem expresia generală pentru funcţia Green sub următoarea formă:

$$G_T = \begin{cases} G_T^s = c_1 + c_2\ln r;\; r_1 \le r \le \rho \\ G_T^d = G_T^s - \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{r}{\rho};\; \rho \le r \le r_2 \end{cases} \tag{18),$$

unde constantele arbitrare de integrare c_1, c_2 se vor determina din diverse condiţii de limită pe contururile $r = r_1$ şi $r = r_2$. Condiţiile de limită de tip Dirichlet se scriu în felul următor:

$$G_T^s(r = r_1) = 0;\quad G_T^d(r = r_2) = 0 \tag{19}$$

Substituind expresiile (18) în (19) obţinem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} c_1 + c_2\ln r_1 = 0 \\ c_1 + c_2\ln r_2 = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{r_2}{\rho} \end{cases} \tag{20).$$

Folosind metoda lui Cramer expusă mai sus, obţinem constantele:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}\ln\frac{r_2}{\rho}\ln r_1 \text{ şi } c_2 = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}\ln\frac{r_2}{\rho} \tag{21}$$

Substituind (21) în (18), obţinem expresia finală pentru funcţia Green sub două forme:

$$G_T = \begin{Bmatrix} G_T^s \\ G_T^d \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}\begin{cases} \ln\dfrac{r_2}{\rho}\ln\dfrac{r}{r_1};\; r_1 \le r \le \rho \\ \ln\dfrac{r_2}{\rho}\ln\dfrac{r}{r_1} + \ln\dfrac{r}{\rho}\ln\dfrac{r_1}{r_2};\; \rho \le r \le r_2 \end{cases} \tag{22a) sau$$

$$G_T = \begin{Bmatrix} G_T^s \\ G_T^d \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}\begin{cases} \ln\dfrac{r_2}{\rho}\ln\dfrac{r}{r_1};\; r_1 \le r \le \rho \\ \ln\dfrac{r_2}{r}\ln\dfrac{\rho}{r_1};\; \rho \le r \le r_2 \end{cases}. \tag{22b).$$

1. Formule integrale pentru temperatura $T(r)$

Folosind funcţia Green (22a) sau (22b) se poate obţine soluţia problemei de limită (1) şi (5) sub formă de integrale:

Formula generală

$$T(r) = \int_V \frac{S(\rho)}{a}G_T(r,\rho)dV - \int_{\Gamma_1} T_1 \left.\frac{dG_T(r,\rho)}{dn_\rho}\right|_{\rho=r_1} d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} T_2 \left.\frac{dG_T(r,\rho)}{dn_\rho}\right|_{\rho=r_2} d\Gamma_2 \tag{23a}$$

care reprezintă un caz particular (problema de o singură dimensiune) a formulei integrale a problemei tridimensionale (Kartašov, E.M. 2001).

Deoarece în (23a) $dV = \rho d\varphi d\rho$, $d\Gamma_1 = r_1 d\varphi$, $d\Gamma_2 = r_2 d\varphi$ obţinem

$$T(r) = \frac{1}{a}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} S(\rho)G_T(r,\rho)\rho d\rho d\varphi - T_1\int_0^{2\pi}\left.\frac{dG_T(r,\rho)}{dn_\rho}\right|_{\rho=r_1} r_1 d\varphi - T_2\int_0^{2\pi}\left.\frac{dG_T(r,\rho)}{dn_\rho}\right|_{\rho=r_2} r_2 d\varphi \tag{23b}$$

Dacă în (23b) considerăm $S(\rho)=S=const$ şi calculăm integralele pe $d\varphi$, se obţin formulele particulare pentru T(r).

V. Formule particulare

În funcţie de expresiile identice ale funcţiei Green folosite – (22a) sau (22b) –, formula generală (23b) se va scrie în două forme:

b1. Formula particulară în care se foloseşte expresia (22a) a funcţiei Green:

$$T(r)=\frac{2\pi}{a}S\int_{r_1}^{r_2}G_T^s(r,\rho)\rho d\rho+\frac{2\pi}{a}S\int_{r_1}^{r}\overline{G_T}(r,\rho)\rho d\rho+F(r) \quad \text{(24a), unde}$$

$$\overline{G_T}(r,\rho)=-\frac{1}{2\pi}\left(ln\frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}ln\frac{r}{\rho}ln\frac{r_1}{r_2}; \quad (24b)$$

$$F(r)=2\pi\left[T_1r_1\frac{dG_T^d(r,\rho)}{d\rho}\bigg|_{\rho=r_1}-T_2r_2\frac{dG_T^s(r,\rho)}{d\rho}\bigg|_{\rho=r_2}\right] \quad (24c)$$

b2. Formula particulară în care se foloseşte expresia (22b) a funcţiei Green:

$$T(r)=\frac{2\pi}{a}S\left[\int_{r_1}^{r}G_T^d(r,\rho)\rho d\rho+\int_{r}^{r_2}G_T^s(r,\rho)\rho d\rho\right]+F(r) \quad (24d).$$

Calculând integralele (24a) - (24d) obţinute prin substituţia respectivă a expresiilor (22a) şi (22b) pentru funcţia Green, ne putem convinge că expresiile pentru temperatura $T(r)$, obţinute prin metoda funcţiei Green, coincid cu expresia (12) obţinută prin metoda integrării directe.

Folosind softul Maple 15 a fost construit graficul funcţiei Green G_T din expresiile identice (22a) şi (22b) la următoarele valori ale mărimilor: $r_1=0.1m$, $r_2=0.3m$. De asemenea, a fost construit graficul temperaturii *T(r)* din formula (12) la următoarele valori ale constantelor: conductibilitatea termică - $a=0.2(W/mK)$ (pentru polimerul Polypropylene), sursa de căldură - $S=10(W/m^3)$, şi ale mărimilor: $r_1=0.1m$, $r_2=0.3m$, $T_1=25K$ şi $T_2=50K$. Ambele grafice sunt prezentate în figura 1.

Din figura *1a* putem conclude că condiţiile de limită (19) şi de conjugare (15a) şi (15b) sunt satisfăcute. Din figura *1b* se observă că condiţiile de limită (5), de asemenea, sunt satisfăcute.

Modelul matematic (12) poate fi aplicat pentru câmpul de temperaturi generate în grosimea acoperirilor polimerice din îmbinările cu strângere atât la rezolvarea problemelor de conductibilitate

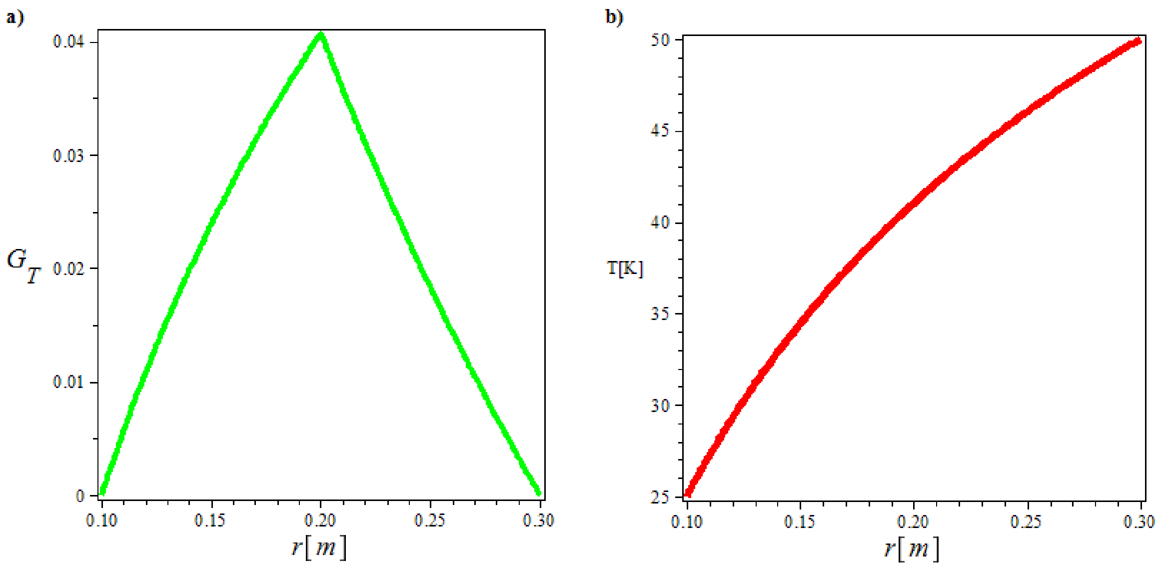

Figura 1. *Graficul funcţiei Green G_T (a) şi graficul temperaturii T (b)*

termică, cât şi a celor de termoelasticitate, deplasare şi tensiuni, care sunt necesare pentru calculul ajustajelor îmbinărilor cu stângere renovate cu materiale compozite polimerice.

CONCLUZII

1. Rezultatele obţinute prin metoda integrării directe şi prin metoda funcţiei Green pentru temperatura *T(r)* coincid şi se scriu sub forma analitică (12).

2. Comparând rezultatele obţinute în soluţia finală cu privire la calculul câmpului de temperaturi (12) prin metoda integrării şi metoda Green, constatăm că mai avantajoasă este totuşi metoda Green, lucru ce este argumentat de faptul că, pentru orice funcţie *S(r)*, prin metoda funcţiei Green se calculează integrala respectivă, iar prin metoda integrării directe soluţiile particulare a ecuaţiei (1) necesită repetarea procedurii anevoioase a metodei variaţiei constantelor de integrare.

3. Rezultatele obţinute pentru câmpul de temperatură (12) reprezintă o parte componentă a cercetărilor ce vizează calculul ajustajelor cu strângere renovate prin compensarea uzurii prin aplicarea straturilor de materiale compozite polimerice.

REFERINŢE BIBLIOGRAFICE

1. KARTAŠOV, E.M. (2001). Analitičeskie metody v teorii teploprovodnosti tverdyh tel. Moskva: Vysšaâ škola. 553 p. ISBN 5-06-004091-7.

2. MARIAN, Gr. (2005). Contribuţii teoretico-experimentale la studiul fiabilităţii pieselor şi îmbinărilor utilajului agricol recondiţionate cu compozite pe bază de polimeri: tz. doct. habilitat în şt. tehnice. Chişinău. 252 p.

3. MELNIKOV, Yu. (1995). Green's Functions in Applied Mechanics. Southampton: Computational Mechanics Publications. 267 p. ISBN 1-85312-387-0.

4. NOWACKI, W. (1983). Thermoelasticity. California: Pergamon Press. 566 p. ISBN 978-0080-247-67-0.

5. ŞEREMET, V., MARIAN, G. (2005). Aplicarea funcţiilor Green la calculul ajustajelor restabilite cu compozite polimerice. In: Lucrări şt., Univ. Agrară de Stat din Moldova, vol. 13: Inginerie agrară, pp. 72-79. ISBN 9975-64-024-9.

6. ŞEREMET, V., MARIAN, G. (2004). Contrbuţii privind aplicarea funcţiilor Green la calculul stării de deformaţii şi tensiuni a pieselor recondiţionate cu straturi compensatoare de uzură. In: Lucrări şt., Univ. Agrară de Stat din Moldova, vol. 12, pp. 65-71. ISBN 9975-9855-7-2.

Data prezentării articolului: 30.09.2015
Data acceptării articolului: 30.10.2015