STUDIUL STARII DE TENSIUNI IN JURUL UNUI PUNCT MATERIAL

Autor: std. Petru CORLĂTEANU
Conducator ştiintific: dr., conf. univ.Victor BALAN

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Problema determinarii tensiunilor principale si suprafetelor principale se reduce la rezolvarea sistemului de 3 ecuatii algebrice omogene numita in matematica problema valorilor proprii. Din care rezolvarea lui duce la o ecuatie cubica practic dificila de rezolvat, necesita un efort considerabil si nu se propune pentru rezolvare studentilor. Se propune algoritmul si programul de calcul a tensiunilor principale si directiilor principale in mediul MATHCAD.*

Cuvinte cheie: *MathCAD, Tensiuni Principale, Directii principale, EigenVals, EigenVecs, Interpretare Geometrica.*

La actiunea fortelor exterioare in interiorul corpului apar forte interioare. Toata teoria tensiunilor in interiorul unui corp porneste de la o particula idealizata la marimea unui punct din interiorul corpului. Pe acest punct se pot trasa o infinitate de plane cu directii definite de versorul normal la plan "n" si pe fiecare din aceste plane actioneaza o tensiune de o marime si directictie oarecare. Totalitatea vectorilor tensiune ce actioneaza pe infinitatea de suprafete se numeste stare de tensiune in jurul unui punct. Sa demonstrat ca exista trei tensiuni ce actioneaza pe trei plane care ne permite de a determina starea de tensiuni in jurul unui punct, fiind numite plane si tensiuni principale. Aceste directii sunt raportate la un sistem de coordinate si anume x1, x2 si x3 cu originea in acel punct. In dependenta de fortele ce actioneaza asupra corpului putem completa matricea tensorului tensiunilor in acest punct. Tensorul tensiunilor fiind un obiect matematic care defineste tensiunile principale

Problema determinarii tensiunilor principale si suprafetelor principale se reduce la rezolvarea sistemului de 3 ecuatii algebrice omogene numita in matematica problema valorilor proprii. Din care rezolvarea lui duce la o ecuatie cubica practic dificila de rezolvat, necesita un efort considerabil si nu se propune pentru rezolvare studentilor. Se propune algoritmul si programul de calcul a tensiunilor principale si directiilor principale in mediul MATHCAD.

Mathcad este programul de calculator destinat in primul rind pentru verificare, validare, documentare si re-utilizarea de calcule ingineresti. In primul rind a fost introdus in 1986 pe DOS, fiind primul program in care s-a introdus editarea direct de notatie matematica, combinate cu calculele automate.

Starea de tensiuni in jurul unui punct al mediului continuu este determinata de tensorul tensiunilor T. Matricea acestui tensor, raportata la sistemul de coordonate x1,x2,x3 este cunoscuta, conform datelor initiale.

$ORIGIN := 1$

Matricea tensorului tensiunilor: $$\sigma := \begin{pmatrix} 20 & -10 & 30 \\ -10 & -30 & 20 \\ 30 & 20 & 50 \end{pmatrix} \quad \text{(MPa)}$$

Se determina tensiunile principale si suprafetele principale ale tensorului tensiunilor.

Tensiunile principale: $Vt := \mathrm{eigenvals}(\sigma)$ $Vt = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ -40 \end{pmatrix}$

Aranjam tensiunile principale in ordine descrescatoare:

$t := \mathrm{reverse}(\mathrm{sort}(Vt))$ $t = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ -40 \end{pmatrix}$

Versorii directiilor principale ale tensorului tensiunilor:

$Mn = \begin{pmatrix} -0.492 & 0.816 & 0.302 \\ -0.123 & -0.408 & 0.905 \\ -0.862 & -0.408 & -0.302 \end{pmatrix}$ $Mn := \mathrm{eigenvecs}(\sigma)$

Aranjam notatiile versorilor directiilor principale in corespundere cu notatiile tensiunilor principale:

$n1 := Mn^{\langle 3 \rangle}$ $n2 := Mn^{\langle 1 \rangle}$ $n3 := Mn^{\langle 2 \rangle}$

$t_1 = 70$ $t_2 = 10$ $t_3 = -40$

$n1 = \begin{pmatrix} 0.302 \\ 0.905 \\ -0.302 \end{pmatrix}$ $n2 = \begin{pmatrix} -0.492 \\ -0.123 \\ -0.862 \end{pmatrix}$ $n3 = \begin{pmatrix} 0.816 \\ -0.408 \\ -0.408 \end{pmatrix}$

$ng1 := \mathrm{acos}(n1)$ $ng2 := \mathrm{acos}(n2)$ $ng3 := \mathrm{acos}(n3)$

$ng1 = \begin{pmatrix} 72.452 \\ 25.239 \\ 107.548 \end{pmatrix} \cdot deg$ $ng2 = \begin{pmatrix} 119.496 \\ 97.071 \\ 149.501 \end{pmatrix} \cdot deg$ $ng3 = \begin{pmatrix} 35.264 \\ 114.095 \\ 114.095 \end{pmatrix} \cdot deg$

$$n1 \times n3 = \begin{pmatrix} -0.492 \\ -0.123 \\ -0.862 \end{pmatrix}$$

Versorii directiilor principale in ordinea n1,n3,n2 formeaza un sistem de coordonate ortogonal de dreapta.

3. Se prezinta matricea tensorului tensiunilor raportata la directiile principale si sa se dea interpretare geometrica tensorului tensiunilor, raportat la aceste axe.

$$\sigma p := \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

4. Se determina invariantii tensorului tensiunilor:

$$I1 := \sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3} \qquad I1 = 40$$

$$I2 := \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{3} \sigma_{i,i} \cdot \sum_{i=1}^{3} \sigma_{i,i} - \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\sigma_{i,j} \cdot \sigma_{i,j} \right) \right]$$

$$I3 := |\sigma| \qquad I3 = -2.8 \times 10^{4} \qquad I2 = -2.5 \times 10^{3}$$

5. Se determina tensiunile totale, tensiunile normale si tensiunile tangentiale care actioneaza pe suprafetele paralele cu axa x1 si inclinate cu grade fata de axa x2. Sa se dea interpretare geometrica.

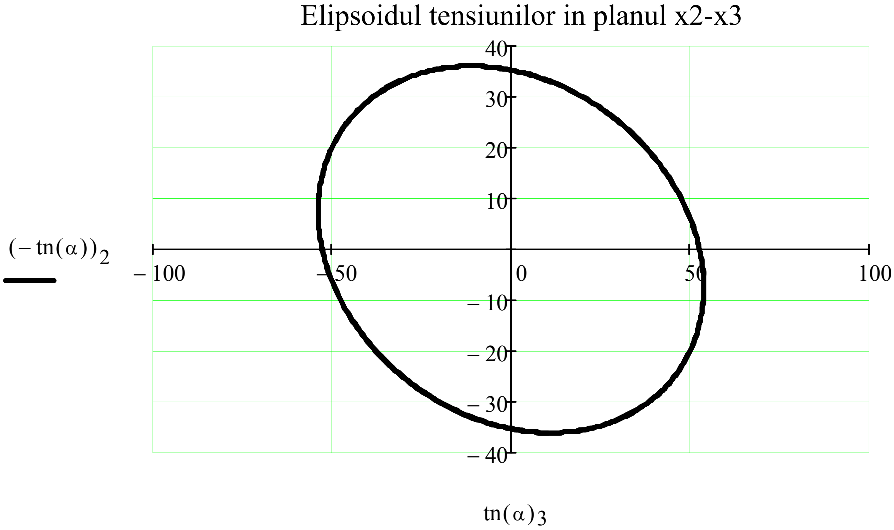
Vectorul unitar al normalei exterioare la suprafata:

$$n(\alpha) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Vectorul tensiune:

$$tn(\alpha) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..3 \\ \quad tn_i \leftarrow \sum_{j=1}^{3} \left(\sigma_{i,j} \cdot n(\alpha)_j \right) \\ tn \end{array} \right.$$

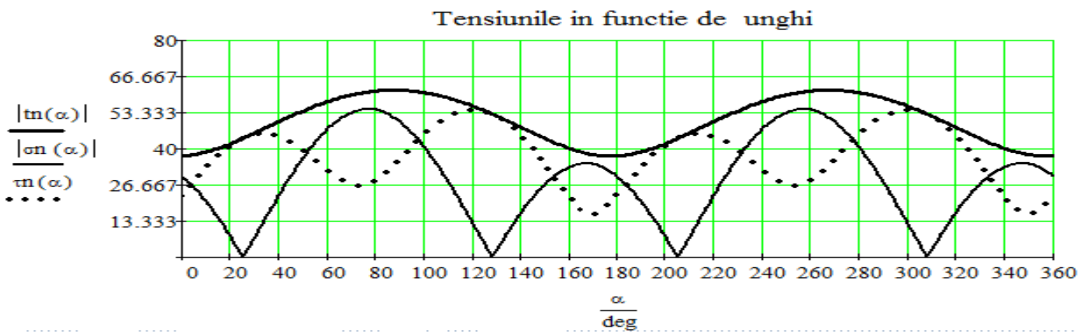
$$\alpha := 0 \cdot deg, 1 \cdot deg .. 360 \cdot deg$$



sau in forma matriceala: $tn(\alpha) := \sigma \cdot n(\alpha)$

Tensiunile normale pe aceste suprafete: $\sigma n(\alpha) := tn(\alpha) \cdot n(\alpha)$

Tensiunile tangentiale: $\tau n(\alpha) := \sqrt{(|tn(\alpha)|)^2 - \sigma n(\alpha)^2}$



6. Se determina in ce stare se afla particula (dupa Mises), reversibila (elastica) sau ireversibila (plastica), daca materialul este Otel 45 cu limita de elasticitate e=360MPa.

Calculam intensitatea tensiunilor pentru acest punct :

$$\sigma i := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_{1,1} - \sigma_{2,2})^2 + (\sigma_{2,2} - \sigma_{3,3})^2 + (\sigma_{1,1} - \sigma_{3,3})^2 + 6 \cdot \left[(\sigma_{1,2})^2 + (\sigma_{2,3})^2 + (\sigma_{1,3})^2\right]}$$

$$\sigma i = 95.394$$

Deoarece intensitatea tensiunilor este mai mica ca limita de elasticitate, materialul in acest punct se afla in stare reversibila.

Bibliografie :

1. Vasile Marina ‘’Introducere in mecanica corpului deformabil si rezistenta materialelor Partea I si Partea II’’ Chisinau,U.T.M. 1994
2. Vasile Masrina ‘’Calcul tensorial pentru ingineri vol.I ‘’ Chisinau,U.T.M. 1994