SUBBUCLE CONSOLIDATE ŞI RELAŢIILE DE ECHIVALENŢĂ INDUSE DE ELE, II

Efrosinia URSU, Vasile URSU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *S-a demonstrat pentru bucle teorema generalizată Puancare; deasemenea se arată că mulţimea subbuclelor normale ale unei bucle formează o sublatice completă şi modulară a laticei complete a subbuclelor acestea și este izomorfă cu laticea congruenților buclei.*

Cuvinte cheie: *nucleu, nucleu de stânga (de dreapta sau de centru), congruență, lattice de subbucle, lattice de congruențe.*

Propoziţia 7 (Teorema Poancare generalizată) *Fie L o buclă şi H, K subbucle consolidate de stânga (respectiv, de dreapta) ale lui L, astfel ca $H \bigcap K$ să verifice condiţia (3) (respectiv, (4)) din Propoziţia 4. Dacă indicii de stânga (respectiv, de dreapta) ai lui H şi K sunt finiţi, atunci indicele lui $H \bigcap K$ în L este finit.*

Demonstraţie. Presupunem că indicii de stânga $|L:H|$ şi $|L:K|$ sunt finiţi. Vom arăta că $|H:H \bigcap K| \leq |L:K|$. În acest scop vom demonstra că aplicaţia

$$\varphi : H/\rho_{H\cap K} \to L/\rho_K,\ \varphi(h(H \bigcap K)) = h \cdot K$$

este injectivă. Mai întâi observăm că definiţia lui φ nu depinde de alegerea reprezentantului h în clasa $h(H \bigcap K)$, deoarece $h' \in h(H \bigcap K) \Rightarrow h' \in hK \Rightarrow h'K = hK.$

Pentru orice $h, h' \in H$ avem

$$\varphi(h(H \bigcap K)) = \varphi(h'(H \bigcap K)) \Rightarrow hK = h'K \Rightarrow h' \backslash hK = K \Rightarrow h' \backslash h \in K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h' \backslash h \in H \bigcap K \Rightarrow h \in h' \cdot (H \bigcap K) \Rightarrow h \cdot (H \bigcap K) = h'(H \bigcap K).$$

Ultima implicaţie rezultă din faptul că intersecţia a două subbucle consolidate de stânga, de asemenea este o subbuclă consolidată de stânga. Aşadar, am arătat că φ este o injecţie. Prin urmare,

$$|H:H \bigcap K| \leq |L:K|.$$

Din această inegalitate şi din (1.3) rezultă

$$|L:H \bigcap K| = |L:H| \cdot |H:H \bigcap K| \leq |L:H| \cdot |L:K|,$$

ceea ce arată că $|L:H \bigcap K|$ este finit. Cazul când H şi K sunt consolidate de dreapta se cerceteauă în mod analog. □

Fie L o buclă, $I \neq \varnothing$ şi $H_i, i \in I$ o familie de subbucle. În mulţimea tuturor subbuclelor lui L avem

$$\inf\{H_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} H_i \text{ şi } \sup\{H_i \mid i \in I\} = lp(\bigcup_{i \in I} H_i).$$

Uneori vom nota pe $\sup\{H_i \mid i \in I\}$ cu $\underset{i\in I}{\vee} H_i$ şi o vom numi subbuclă generată de $H_i, i \in I$, iar pe $\inf\{H_i \mid i \in I\}$ cu $\underset{i\in I}{\wedge} H_i$ şi o vom numi intersecţia subbuclelor $H_i, i \in I$. Atunci este aproape evident că mulţimea tuturor subbuclelor buclei *L* este o latice algebrică completă în raport cu operaţiile $\vee$ şi $\wedge$. În această latice cel mai mare element este *L*, iar cel mai mic element este $E = \{e\}$.

3. Fie *L* o buclă, $I \neq \varnothing$ şi $H_i,\ i \in I$ o familie de subbucle. În mulţimea tuturor subbuclelor lui *L* avem

$$\inf\{H_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} H_i \text{ şi } \sup\{H_i \mid i \in I\} = lp(\bigcup_{i\in I} H_i).$$

Uneori vom nota pe $\sup\{H_i \mid i \in I\}$ cu $\underset{i\in I}{\vee} H_i$ şi o vom numi subbuclă generată de $H_i, i \in I$, iar pe $\inf\{H_i \mid i \in I\}$ cu $\underset{i\in I}{\wedge} H_i$ şi o vom numi intersecţia subbuclelor $H_i, i \in I$. Atunci este aproape evident că mulţimea tuturor subbuclelor buclei *L* este o latice algebrică completă în raport cu operaţiile $\vee$ şi $\wedge$. În această latice cel mai mare element este *L*, iar cel mai mic element este $E = \{e\}$.

Propoziţia 8 *Mulţimea subbuclelor normale ale unei bucle L formează o sublatice completă şi modulară a laticei complete a tuturor subbucleor lui L.*

Demonstraţie. Fie $H_i \lhd L,\ i \in I$. Atunci avem

$$\inf\{H_i \mid i \in I\} = \underset{i\in I}{\wedge} H \text{ şi } \sup\{H_i \mid i \in I\} = \underset{i\in I}{\vee} H.$$

La început vom arăta că

$$H = \underset{i\in I}{\wedge} H_i \text{ şi } H' = \underset{i\in I}{\vee} H_i$$

sunt subbucle normale în *L*. Fie $a \in H$, atunci $a \in H_i$ pentru orice $i \in I$. Întrucât H_i sunt subbucle normale în *L*, atunci pentru orice substituţie internă $\alpha \in IntL$ avem $\alpha(a) \in H_i$ pentru orice $i \in I$. Prin urmare $\alpha(a) \in \bigcap_{i\in I} H_i = \underset{i\in I}{\wedge} H = H$, şi deci *H* este normală în *L*. Fie acum $a \in H'$, atunci $a = a(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ este un element provenind în urmaoperaţiilor buclei aplicate elementelor $a_{ij} \in H_{ij},\ j = 1,\ldots,n$. Deci $a \in H_{j_1} \cdot H_{j_2} \cdot\ldots\cdot H_{j_n} = N \subseteq H'$. Deoarece *N* este subbuclă normală, avem $\alpha(a) \in N$, adică $\alpha(a) \in H'$, pentru orice $\alpha \in IntL$. Prin urmare H' este normală în *L*.

Arătăm acum că laticea subbuclelor normale este modulară. Amintim că o latice este modulară dacă elementele ei satisfac următoarea cvasiidentitate (axioma modularităţii):

$$x \le y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Întrucât $x \le y \Leftrightarrow x \vee y = y$, ultima cvasiidentitate este echivalentă cu identitatea

$$x \vee ((x \vee y) \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Prin urmare, conform ultimei identităţi, este suficient să arătăm că este adevărată egalitatea

$$X(XY \cap Z) = XY \cap XZ$$

pentru orice subbucle normale *X*, *Y*, *Z* ale buclei *L*. Dacă $a \in X(XY \cap Z), a = x \cdot h$, unde $x \in X, h \in XY \cap Z$. Atunci $h \in Z$ şi $h \in XY$. Deoarece $h \in X \cdot Y$, avem $h = u \cdot v$, unde $u \in X$ şi $v \in Y$, adică $a = x \cdot uv \in X \cdot uv = Xv \subseteq X \cdot Y$. Aceasta înseamnă că $a \in XY \cap XZ$. Prin urmare

$X(XY \cap Z) \subseteq XY \cap XZ$. Invers, fie $a \in XY \cap XZ$, atunci $a = uy = vz$, unde $u, v \in X, y \in Y, z \in Z$. De unde $z = v \backslash uy \in XY \cap Z$ şi $a = v(v \backslash uy) \in X(XY \cap Z)$, şi deci $XY \cap XZ \subseteq X(XY \cap Z)$. Prin urmare $X(XY \cap Z) = XY \cap XZ$.□

Pentru orice buclă *L* cu $Sub_n(L)$ vom nota mulţimea tuturor subbuclelor normale ale lui *L*, iar cu $Con(L)$ vom nota mulţimea tuturor congruenţelor pe bucla L, cercetată cu operaţiile de înmulţire şi împărţirile de stânga şi dreapta.

Pentru orice buclă *L* cu $Sub_n(L)$ vom nota mulţimea tuturor subbuclelor normale ale lui *L*, iar cu $Con(L)$ vom nota mulţimea tuturor congruenţelor pe bucla L, cercetată cu operaţiile de înmulţire şi împărţirile de stânga şi dreapta.

Propoziția 9. *Pentru orice buclă L laticile* $Sub_n(L)$ *şi* $Con(L)$ *sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Vom arăta prima dată că, dacă *N* este o subbuclă normală , atunci ρ_N este o congruenţă pe bucla *L*. Din Propoziția 1 rezultă că ρ_N este o relaţie de echivalenţă pe *L*. Întrucât subbucla *N* este normală în bucla *L,* avem

$$x\rho_N y \,\&\, z\rho_N t \Rightarrow y \backslash x \in N \,\&\, t \backslash z \in N \Rightarrow x \in yN \,\&\, z \in tN \Rightarrow xz \in yN \cdot tN =$$

$$yt \cdot N \,\&\, z \backslash x \in tN \backslash yN = (t \backslash y)N \,\&\, x / z \in yN / tN = (y/t)N \Rightarrow xt \backslash yz \in N \,\&$$

$$(t \backslash y) \backslash (z \backslash x) \in N \,\&\, (y/t) \backslash (x/z) \in N \Rightarrow xz\rho_N yt \,\&\, (z \backslash x)\rho_N (t \backslash y) \,\&\, (x/z)\rho_N (y/t).$$

Deci ρ_N este o congruenţă pe bucla *L*. Definim acum aplicaţia $\varphi : Sub_n L \to Con L$
prin formula

$$\varphi(N) = \rho_N \,(N \in Sub_n L).$$

După cum ştim

$$N \subseteq N' \Rightarrow \rho_N \subseteq \rho'_{N'},$$

deci aplicaţia φ este crescătoare pe mulţimea $Sub_n L$ în raport cu incluziunea.

Acum vom arăta că, dacă ρ este o congruenţă, atunci clasa adiacentă $e\rho$, unde *e* este unitatea buclei *L,* este o subbuclă a lui *L*. Într-adevăr,

$$a_1, a_2 \in a\rho \Rightarrow e\rho a_1 \,\&\, e\rho a_2 \Rightarrow e\rho a_1 a_2 \,\&\, e\rho a_1 / a_2 \,\&\, e\rho a_2 \backslash a_1 \Rightarrow a_1 a_2, a_1 / a_2, a_2 \backslash a_1 \in e\rho.$$

Deci $e\rho$ este o subbuclă a lui *L*. Pentru orice $x, y \in L$ şi orice $a \in e\rho$ avem

$$aR_{x,y} = (ax \cdot y) / xy\rho(ex \cdot y) / xy = e,$$

$$aL_{x,y} = xy \backslash (x \cdot ya)\rho xy \backslash (xy \cdot e) = e,$$

$$aT_x = x \backslash ax\rho x \backslash (ex) = e,$$

Aşadar, $aR_{x,y}, aL_{x,y}, aT_x \in e\rho$. Prin urmare, subbucla $e\rho$ este normală în bucla *L*.

În continuare vom arăta că aplicaţia

$$\varphi' : ConL \to Sub_n L,\ \varphi'(\rho) = e\rho$$

este inversă lui φ. Într-adevăr,

$$(\varphi \circ \varphi')(\rho) = \varphi(\varphi'(\rho)) = \varphi(e\upsilon) = \rho_{e\rho}$$

şi

$$(x, y) \in \rho_{e\rho} \Rightarrow x \setminus y \in e\rho \Rightarrow e\rho x \setminus y;$$

iar

$$e\rho x \setminus y \ \& \ x\rho \Rightarrow x\rho y.$$

Deci $\rho_{e\rho} \subseteq \rho$. Invers, presupunem $x\rho y$. Din $x\rho x$ şi $x\rho y$ rezultă $e\rho(x \setminus y)$, adică $x \setminus y \in e\rho$, ceea ce implică $(x, y) \in \rho_{e\rho.}$ Rezultă $\rho = \rho_{e\rho}$.

Deci

$$(\varphi \circ \varphi')(\rho) = \rho.$$

Pe de altă parte

$$(\varphi' \circ \varphi)(N) = \varphi'(\varphi(MN)) = \varphi'(\rho_N) = e\rho_N = 1 \cdot N = N.$$

Prin urmare, φ este o bijecţie şi $\varphi' = \varphi^{-1}$. Trebuie să mai arătăm că φ^{-1} este crescătoare.

Dacă $\rho, \rho' \in ConL$, atunci

$$\rho \subseteq \rho' \Rightarrow e\rho \subseteq e\rho' \Rightarrow \varphi^{-1}(\rho) \subseteq \varphi^{-1}(\rho'),$$

adică φ^{-1} este crescătoare. Aşadar, aplicația $\varphi : Sub_n L \to ConL$ este un izomorfizm al mulţimilor ordonate $Sub_n L$ şi $ConL$. De unde rezultă că φ este un izomorfism de latici.

Din Propozițiile 8 şi 9 rezultă următorul

Corolar 10 *Laticea $Con(L)$ este completă şi modulară.*

Bibliografie

1. Chein, O., Pflugfeider, Y.O., Smith, J. *Quasigroups and loops: Theory and Applications.* Berlin: Heldermann-Verlag, 1990.
2. Belousov, V.D. *Osnovî teorii cvasigrupp i lup.* Moscva: Mir, 1967.
3. Gratzer, G. *Universal algebra.* Berlin: Springer-Verlag, 1979.