TEOREMA SHARKOVSKI ŞI INVERSA EI

Autor: Vladimir Melnic

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Teorema Sharkovski formulează relaţii dintre perioadele posibile ale punctelor periodice ale unei funcţii continui pe segment. Teorema Sharkovski în expunerea extinsă conţine şi afirmaţii despre separarea perioadelor (în literatură se numeşte uneori „inversa" teoremei lui Sharkovski). Cu alte cuvinte se afirmă că pentru orice două numere* $m \prec n$*, se poate găsi o funcţie* $f: I \to I$ *care are puncte* n *- periodice şi n-are puncte* m *- periodice.*

Cuvinte cheie: *Punct fix, punct periodic, teorema Sharkovski, teoria haosului.*

În cele ce urmează vom prezenta o demonstraţie constructivă a acestei inversei teoremei lui Sharkovski. A. Sharkovski în 1964 a demonstrat o teoremă devenită celebră. Din mai multe considerente, acest rezultat nu a devenit imediat cunoscut de către toţi specialiştii. S-a întîmplat ca unele elemente ale teoremei Sharkovski să fie ulterior descoperite şi de alţi autori (Li, Yorke). Dar în literatură teorema a rămas cu numele lui Sharkovski.

Ideea teoremei lui Sharkovski conţine aşa numita rearanjare (Sharkovski) a tuturor numerelor naturale:

$$3\prec 5\prec 7\prec 9\prec \ldots \prec 2\cdot 3\prec 2\cdot 5\prec 2\cdot 7\prec 2\cdot 9\prec \ldots \prec 2^2\cdot 3\prec 2^2\cdot 5\prec 2^2\cdot 7\prec 2^2\cdot 9\prec \ldots \prec \ldots \prec 2^3\prec 2^2\prec 2\prec 1. \tag{1}$$

Semnul „$\prec$" dintre numere permite notarea: elementul se află mai la stînga (în ordinea Sharkovski) de altul.

Teorema 1 (Sharkovski). Dacă f are punct de perioadă *m*, atunci pentru orice *n* astfel încît $m \prec n$, f are punct periodic de perioada *n*.

Demonstrarea teoremei inverse Sharkovski se va baza pe cîteva leme.

Lema 1. Pentru $\forall n \geq 1,\ n \in N$ există o funcţie $f_n(x)$ liniară, continuă, care are puncte de perioadă $(2n+3)$ şi nu are puncte de perioadă $(2n+1)$.

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x+1, & x \in [1,2] \\ -x+2n+5, & x \in (2,n+2] \\ -2x+3n+7, & x \in (n+2,n+3] \\ -x+2n+4, & x \in (n+3,2n+3] \end{cases} \tag{2}$$

Lema 1 ne permite deplasarea funcţiei de separare a perioadelor, pe primul „subşir" al şirului (1).

Definiţie. Fie funcţia $f:[1,1+h] \to [1,1+h]$, considerăm funcţia continuă

$$\tilde{f}:[1,1+3h] \to [1,1+3h],\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)+2h, & x \in [1,1+h] \\ liniar, & x \in (1+h,1+2h) \\ x-2h, & x \in [1+2h,1+3h] \end{cases}, \tag{3}$$

(liniar - graficul funcţiei $\tilde{f}$ pe domeniul $(1+h,1+2h)$ reprezintă un segment ce uneşte punctele $(1+h,\tilde{f}(1+h))$ şi $(1+2h,\tilde{f}(1+2h))$).

Lema 2. Funcţia *f* are puncte periodice de perioda *k* dacă şi numai dacă funcţia $\tilde{f}$ are puncte periodice de perioada $2k$.

Lema 2 ne permite deplasatea funcţiei de separare a perioadelor, pe ultimul „subşir" al şirului (1).

Lema 3. Dacă funcţia f are puncte periodice de perioada $2^k(2n+3)$ şi nu are puncte periodice de perioada $2^k(2n+1)$, atunci $\tilde{f}$ are puncte periodice de perioada $2^{k+1}(2n+3)$ şi nu are puncte periodice de perioada $2^{k+1}(2n+1)$.

Lema 3 ne permite deplasatea funcţiei de separare a perioadelor, de pe un „subşir” pe altul în şirului (1), cu condiţia că această funcţie nu se afla la începutul căruiva „subşir”.

Pentru completarea teoremei se mai demonstrează o lema conform căreia se poate de deplasat funcţia de separare a perioadelor dintr-un „subşir” în altul chiar dacă aceasta se v-a afla la începutul „subşirului”.

Lema 4. Există o funcţie liniară continuă care are puncte periodice de perioada *6* şi nu are puncte periodice de perioadă impară.

$$f_0(x)=\begin{cases} x+1, x\in[1,2] \\ -2x+7, x\in(2,3] \end{cases}. \tag{4}$$

Teorema 1 (inversa teoremei Sharkovski). Pentru fiecare număr întreg pozitiv n există o funcţie continuă $f: I \to I$ care nu are puncte m-periodice şi are puncte n-periodice, unde $m \prec n$.

Demonstraţie: În continuare vom prezenta algoritmul de construcţie a funcţiei care are puncte n-periodice şi nu are puncte m-periodice pentru $m \prec n$:

I. Pentru a construi o funcţie care are puncte periodice de perioada $2^k(2n+3)$ şi nu are puncte periodice de perioada $2^k(2n+1)$ pentru $n,k \in N$, $n \geq 1$ procedăm în felul următor:

1) construim funcţia f_n .

2) construim $\tilde{f}_n$ apoi $\approx{f}_n$, $\stackrel{\approx}{\sim}{f}_n$ pînă cînd funcţia f_n v-a avea k „~” deasupra. Notăm această funcţie cu $\overset{k}{\tilde{f}}_n$.

II. Pentru a construi o funcţie care are puncte de periodice de perioada $2^k \cdot 3$ şi nu are puncte periodice de perioada $2^{k-1}(2j+1)$, $j,k \in N$, $k \geq 1$ procedăm în felul următor:

1) construim funcţia $\tilde{f}_0$,

2) construim funcţia $\overset{k}{\tilde{f}}_0$.

Conform lemelor 2 şi 4 funcţia $\overset{k}{\tilde{f}}_0$ are puncte de perioada $2^k \cdot 3$ şi nu are puncte periodice de perioade aflate mai la stînga de $2^k \cdot 3$.

III. Pentru a construi o funcţie care are puncte periodice de perioada 2^k şi nu are puncte periodice de perioada 2^{k+1} construim funcţia $\overset{k-1}{\tilde{g}}$. Unde $g:[1,2] \to [1,2]$ şi $g = -x+3$ această funcţie are puncte *2*-periodice şi nu are puncte *4*-periodice.

Astfel am demonstrat Teorema inversă Sharkovski.

Bibliografie

1. Alligood K.T., Sauer T.D., Yorke J.A. CHAOS: *An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 2000, 595 p.
2. Bau-Sen Du. *A collection of simple proofs of Sharkovsky's theorem.* Taipei, 2007, 15 p.
3. Devaney R.L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley, Boston, 1989, 336p.
4. Синай Я.Г. *Современные проблемы эргодической теории.* Физико-Математическая Литература, Москва, 1995, 199 p.