ESTIMAȚII ALE SOLUȚIILOR UNOR PROBLEME CE SE REDUC LA ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP HIPERBOLIC

Autor: Iurie Baltag

Universitatea Tehnică a Moldovei

Ideea principală:*Se studiază problemapropagării undelor şi a diferitor oscilații pentru cazul unidimensional. Modelul fizico-matematic al problemei se reduce la problema lui Cauchy pentru ecuațiile hiperbolice unidimensionale de ordinul doi.Se expune ideia reducerii acestei probleme la o problemă mixtă pe un in terval finit şi soluționarea acesteia prin metoda Fourier.*

Cuvinte cheie:*Problema propagării undelor şi a oscilațiilor unidimensionale, problema lui Cauchy, ecuație hiperbolică, problemă mixtă, estimarea soluțiilor.*

Problema propagării undelor , cunoscînd starea procesului la momentul inițial şi viteza inițială, se reduce la o ecuație cu derivate parțiale de tip hiperbolic cu anumite condiții inițiale. Această problemă este de tipul următor:

$$u_{tt} - (a(x)\cdot u_x)_x + q(x)u = 0,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x;\, 0) = f(x),\ \ u_t(x;\, 0) = g(x) \tag{2}$$

Aici coeficientul $a(x)$exprimă mediul ambiant, iar $q(x)$ este coeficientul numit potențialul procesului.

Fixînd un punct arbitrar M(x;y), vom găsi aşa două numere A şi B astfel, încît problema (1),(2) se va reduce la o problemă mixtă de tipul următor:

$$\begin{cases} u_{tt} - (au_x)_x + qu = 0 \\ u(x;0) = \eta(x)f(x); u_t(x;0) = \eta(x)g(x) \end{cases} \tag{3}$$
$$u(A;0) = 0, u(B;0) = 0,$$

unde funcția $\eta(x) = 1, daca..x \in (A;B),.\eta(x) = 0, daca..x \notin (A;B).\cdot$

Efectuînd substituția

$$u(x;t) = a^{-0,25} \cdot v(s;\tau); t = \frac{\tau}{\beta}; s = \frac{1}{\beta}\int_A^x a^{-0,5}dx; \beta = \frac{1}{\pi}\int_A^B a^{-0.5}(x)dx$$

Ajungem la problema următoare:

$$\begin{cases} v_{\tau\tau} = v_{ss} + q_1(s) = 0 \\ v(s;0) = f_1(s); u_\tau(s;0) = g_1(s) \ (4) \end{cases}$$
$$v(0;0) = 0, v(\pi;0) = 0,$$

Rezolvînd problema (3) prin metoda Fourier, obținem soluția problemei de forma următoare:

$$v(s;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}[X_n(s)(\sin\lambda_n\tau)\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\pi} g_1(s)X_n(s)ds + \cos\lambda_n\tau\int_0^{\pi} f_1(s)ds]. \tag{5}$$

Funcțiile $X_n(s); \lambda_n$ sunt funcțiile proprii şi valorile proprii ale problemei lui Şturm-Liuvill.

Comportamentul asimptotic al acestor variabile este de forma următoare:

$$\lambda_n = n + \alpha/n + \beta/n^2 + \ldots; X_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ns) + \frac{\varphi}{n} + \frac{\zeta}{n^2} + \ldots$$

Înlocuind aceste dezvoltări în problema (4) vom obține, că ea se reduce la cîteva probleme.

Inteligența acestei dezvoltări constă înfaptul, că în rezultat vom obține serii Fourier ce corespund ecuație de tip (1) cu coeficienți constanți şi q = 0; iar în rest celelalte serii, fiind estimate , sunt serii convergente.

Un obiectiv particular al acestui studiu este obținerea estimațiilor apriorice pentru soluțiile problemei (1) în spațiile $L_p$de :forma următoare:

$\|u(x;t)\|_p \le C \cdot t^\alpha (\|f\|_p + \|g\|_p)$, unde norma în spațiile L_p este determinată mai jos:

$$\|f(x)\|_p = \begin{cases} (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}, p \in [1;\infty) \\ \sup\limits_{x\in R} |f(x)|, p = \infty \end{cases}.$$

Menționăm, că din aceste estimații rezultă existența, unicitatea şi dependența continuă a soluției problemei (1), (2) de condițiile inițiale în spațiile L_p.

În caz general pentru ecuația hiperbolică de ordinul doi avem următoarea problemă:

$u_{tt} - a(x;t)u_{xx} + b(x;t)u_t + c(x;t)u_x + d(x;t)u = 0$, $t> 0$,$u(x; 0) = f(x)$, $u_t(x; 0) = g(x)$(6)

unde funcția $a(x;t)$verifică condițiile$0<a_0 \le a(x;t) \le a_1$. În ipoteza, că coeficienții ecuației admit derivate mărginite până la ordinul cinci inclusiv, pentru soluțiile problemei (4) au fost obținute estimații de tip (3), în care constantele de estimare admit o creştere exponențială în raport cu timpul t şi depind de coeficienții ecuației şiderivatele lor până la ordinul cinci inclusiv.

În acest caz comportamentul soluției problemei lui Cauchy în raport cu timpul t nu este evidențiat în mod explicit.

Bibliografie

1. Мизохата С. *Теория уравнений с частными производными.* Москва, Мир, 1977.

2. Хермандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными.* Москва, Мир, 1965.

3. Балтаг Ю. *Об ограниченности решения задачи Коши для одномерных гиперболических уравнений второго порядка*. Кишинев, Деп. Рук. в МНИИНТИ, N. 1117-M.89,1989.

4. ПержанА.,Балтаг Ю. *Об ограниченности разрешающегооператора задачи Коши для одномерного гиперболического уравнения в* L_p. Кишинев, Мат. Исслед., N. 112,1990.

5. Балтаг Ю. *Об* L_p-*ограниченности разрешающегооператора задачи Коши для одномерного гиперболического уравнения высокого порядка*. Кишинев, Известия АН РМ, N. 4,1992.

6. Эффендиев М. *Строго гиперболические уравнения высокого порядка в пространствах* L_p. Диф. ур. 27, с. 312-320, 1991