Se vede imediat că $x = k$ este punct de discontinuitate pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ iar dreapta $y = 2x + 3$ este asimptotă oblică.
În lucrarea sunt prezentate multe alte exemple cu scopul de a ilustra notiunea de asimptotă.

Utilizarea proprietăţilor modulului la rezolvarea inecuaţiilor ce conţin simbolul lui

Andrei Corlat[1], Ion Jardan[1,2]

[1]*Institute of Mathematics and Computer Science,*
[2]*Technical University of Moldova, Chişinău, Republic of Moldova*
e-mail: `an.corlat@gmail.com, ion.jardan@mate.utm.md`

În această comunicare sunt analizate metode de rezolvare a inecuaţiilor algebrice ce conţin simbolul modulului, bazate pe utilizarea proprietăţilor lui, ceea ce permite rezolvări succinte. De regulă, inecuaţiile ce conţin simbolul modulului, se rezolvă cu ajutorul metodei intervalelor: domeniul valorilor admisibile al inecuaţiei se împarte astfel, încât în fiecare interval expresiile de sub simbolul modulului să-şi păstreze semnul; în fiecare din aceste intervale inecuaţia se scrie fără simbolul modulului, se rezolvă, iar soluţia se obţine ca reuniunea soluţiilor pe intervale.

În unele cazuri, cunoaşterea proprietăţilor modulului conduce la rezolvări succinte şi optimale ([1]-[3]). Enumerăm în continuare unele proprietăţi ale modulului, ce vor fi utilizate la rezolvarea inecuaţiilor.

1. $|a| \geq 0$; 2. $|a| \geq a$; 3. $|a| \geq -a$; 4. $|a| < b, b > 0 \Leftrightarrow -b < a < b$; 5. $|a| > b, b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ a < -b \end{cases}$; 6. $|a| > |b| \Leftrightarrow (a-b)(a+b) > 0$;
7. $|a| \leq |b| \Leftrightarrow (a-b)(a+b) \leq 0$.

În continuare vom analiza câteva exerciţii, rezolvarea cărora se bazează pe utilizarea proprietăţilor modulului.

Exemplul I. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\left|\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x-10}\right| > -2$; b) $\left|x^2-x-2\right| \geq x^2-x-2$;

c) $\left|x^2-x-2\right| > 2+x-x^2$; d) $\left|\dfrac{x^2-7}{x^2-1}\right| < 1$;

e) $\left|x^2-5x\right| > 6$; f) $|||x|-1|-4| \leq 3$.

Rezolvare. a) Se aplică proprietatea 1 şi se deduce, că mulţimea soluţiilor inecuaţiei enunţate coincide cu domeniul valorilor admisibile, prin urmare $S = R \setminus \{-5; 2\}$.

b) Se aplică proprietatea 2 şi se obţine $S = R$.

c) Inecuaţia se scrie $\left|x^2-x-2\right| > -\left(x^2-x-2\right)$, apoi în baza proprietăţii 3, conchidem că mulţimea soluţiilor ei se obţine prin excluderea zerourilor funcţiei $f: R \to R$, $f(x) = x^2-x-2$. Astfel $S = R \setminus \{-1; 2\}$.

d) Se aplică proprietatea 4 şi se obţine:

$$\left|\frac{x^2-7}{x^2-1}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x^2-7}{x^2-1} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-7}{x^2-1} - 1 < 0 \\ \dfrac{x^2-7}{x^2-1} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-6}{x^2-1} < 0 \\ \dfrac{2(x^2-4)}{x^2-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-4>0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

e) Se aplică proprietatea 5 şi se obţine:

$$\left|x^2-5x\right| > 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x>6 \\ x^2-5x<-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6>0 \\ x^2-5x+6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x<-1 \\ x>6 \end{cases} \\ 2<x<3 \end{cases},$$

de unde $S=(-\infty;-1)\cup(2;3)\cup(6;+\infty)$.

f) Se aplică proprietăţile 4 şi 5 şi se obţine:

$$|||x|-1|-4| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le ||x|-1|-4 \le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} ||x|-1| \le 7 \\ ||x|-1| \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7 \le |x|-1 \le 7 \\ \begin{cases} |x|-1 \ge 1 \\ |x|-1 \le -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} |x| \le 8 \\ |x| \ge -6 \end{cases} \\ \begin{cases} |x| \ge 2 \\ |x| \le 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -8 \le x \le 8 \\ x \in R \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{cases} x \ge 2 \\ x \le -2 \end{cases} \\ x=0 \end{cases} \end{cases},$$

de unde $S=[-8;-2]\cup\{0\}\cup[2;8]$.

În continuare vom aduce câteva afirmaţii referitor la echivalenţa inecuaţiilor ce conţin simbolul modulului.

Afirmaţia 1. Inecuaţia $|f(x)|<g(x)$ este echivalentă cu sistemul de inecuaţii $\begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>-g(x) \\ g(x)>0 \end{cases}$.

Observaţie. Dacă $g(x) \le 0$ pentru orice $x \in DVA$ al inecuaţiei, atunci mulţimea soluţiilor inecuaţiei este vidă.

Afirmaţia 2. Inecuaţia $|f(x)|>g(x)$ este echivalentă cu totalitatea de inecuaţii $\begin{cases} f(x)>g(x) \\ f(x)<-g(x) \end{cases}$.

Afirmaţia 3. Inecuaţia $|f(x)|<|g(x)|$ este echivalentă inecuaţia $(f(x)-g(x))\,(f(x)+g(x))<0$.

Afirmaţia 4. Inecuaţia $|f(x)+g(x)|<|f(x)|+|g(x)|$ este echivalentă inecuaţia $f(x)\cdot g(x)<0$.

Vom ilustra prin exemple utilizarea afirmaţiilor 1-4.

Exemplul II. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $|x-6|<x^2-2x+6$; b) $\left|x^2-x-2\right|>x+1$;

c) $\left|x^4-x^3+6x^2-5x-16\right|>\left|x^4+x^3-6x^2+5x-16\right|$;

d) $|3x-5|<|x-4|+|2x-1|$.

Rezolvare. a) Se aplică afirmaţia 1 şi se obţine:

$$|x-6|<x^2-2x+6 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6<x^2-2x+6 \\ x-6>-x^2+2x-6 \\ x^2-2x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+12>0 \\ x^2-x>0 \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ \begin{cases} x<0 \\ x>1 \end{cases} \\ x \in R \end{cases},\ \text{de unde}$$

$S=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

b) Se aplică afirmaţia 2 şi se obţine:

$$\left|x^2-x-2\right|>x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2>x+1 \\ x^2-x-2<-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3>0 \\ x^2-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x<-1 \\ x>3 \end{cases} \\ x^2-x-2<-x-1 \end{cases}, \text{ de unde}$$

$S=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(3;+\infty)$.

c) Aplicând afirmaţia 3 şi metoda intervalelor de rezolvare a inecuaţiilor se obţine:
$\left(x^4-x^3+6x^2-5x-16+x^4+x^3-6x^2+5x-16\right)\left(x^4-x^3+6x^2-5x-\right.$
$\left.-16-x^4-x^3+6x^2-5x+16\right)>0 \Leftrightarrow 2\left(x^4-16\right)(-2x)\left(x^2-6x+5\right)>0 \Leftrightarrow$
$x(x-2)(x+2)(x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)\cup(1;5)$.

d) Se observă, că $3x-5=(x-4)+(2x-1)$ şi se aplică afirmaţia 4:
$|3x-5|<|x-4|+|2x-1| \Leftrightarrow (x-4)(2x-1)<0$, de unde $S=\left(\frac{1}{2};4\right)$.

Bibliography

[1] Cojuhari P., Corlat A. *Ecuaţii şi inecuaţii algebrice.* Chişinău, Editura Centrală, 1995, Repub. Moldova.

[2] Cojuhari P. *Ecuaţii şi inecuaţii. Teorie şi practică.* Chişinău, Editura Universitas, 1993, Repub. Moldova.

[3] ***, `https://www.math.md/school`