

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Cu titlu de manuscris
C.Z.U: 539.3:517.9(043.2)

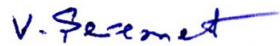
CREȚU ION

SOLUȚII INTEGRALE ÎN
TERMOELASTICITATEA NECUPLATĂ

135.02 - MECANICA CORPULUI SOLID

Teză de doctor în tehnică

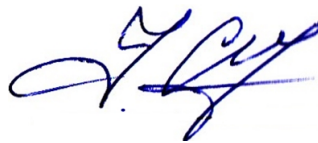
Conducător științific:



Șeremet Victor,

dr. hab., prof. univ.

Autorul:



CHIȘINĂU, 2018

© Crețu Ion, 2018

Aduc sincere mulțumiri conducătorului științific, profesor universitar, doctor habilitat Șeremet Victor, pentru îndrumarea în cercetările realizate, în elaborarea tezei și formarea ca specialist, prin împărtășirea vastelor sale cunoștințe.

Mulțumiri aduc colegilor departamentului “Inginerie Civilă și Geodezie”, Universitatea Tehnică a Moldovei pentru sprijin și ajutor în buna organizare a întregului proces, îndeosebi șefului de departament, conferențiar universitar, doctor Taranenco Anatolie și conferențiar universitar, doctor Bîrcă Mihail ș. a.

Nu în ultimul rând, aș vrea să aduc deosebite mulțumiri familiei mele pentru răbdare, încredere și susținere în tot ceea ce am făcut în această perioadă.

CUPRINS

ADNOTĂRI (română, rusă, engleză)	6
LISTA ABREVIERILOR	9
INTRODUCERE	10
1. METODE DE CALCUL FOLOSITE LA REZOLVAREA PROBLEMELOR DE LIMITĂ ÎN TERMOELASTICITATE	15
1.1. Metodele clasice	15
1.2. Metoda $G\Theta$ convoluției	18
1.3. Metoda reprezentărilor integrale armonice	20
1.4. Concluzii la capitolul 1	21
2. SOLUȚII INTEGRALE TERMOELASTICE PENTRU PROBLEMELE DE LIMITĂ BIDIMENSIONALE	24
2.1. Funcții de influență și soluții integrale termoelastice pentru fâșie	27
2.1.1. Funcția Green a ecuației Poisson pentru fâșie	27
2.1.2. Determinarea câmpului de temperatură în fâșie cu condiții de limită de tip Dirichlet	31
2.1.3. Determinarea câmpului de temperatură în fâșie cu condiții de limită de tip mixt	38
2.1.4. Soluții integrale pentru fâșia termoelastică cu condițiile de limită de tip Dirichlet	41
2.2. Funcții de influență și soluții integrale pentru pătrimea de plan termoelastică ..	52
2.2.1. Determinarea deplasărilor termoelastice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură. Formularea problemei	54
2.2.2. Determinarea tensiunilor termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură	57
2.2.3. Tensiunile termice explicite în pătrimea de plan pentru o problemă particulară de limită	58
2.3. Soluții integrale termoelastice pentru semifâșie	63
2.4. Reprezentarea grafică a funcțiilor Green pentru tensiunile termice într-un dreptunghi	67
2.5. Validarea problemelor de limită bidimensionale	69

2.6. Concluzii la capitolul 2	71
3. SOLUȚII INTEGRALE TERMOELASTICE PENTRU PROBLEMELE DE LIMITĂ TRIDIMENSIONALE	73
3.1. Funcții de influență și soluții integrale pentru semispațiul termoelastic	73
3.1.1. Determinarea deplasărilor termoelastice pentru semispațiu de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură	74
3.1.2. Determinarea tensiunilor termice de la acțiunea unei surse unitare punc- tiforme de căldură pentru semispațiu	77
3.1.3. Deplasările termoelastice u_i în semispațiu S pentru o problemă particu- lară de limită	81
3.2. Funcții de influență, formule integrale și soluții explicite pentru pana sferică termoelastică	86
3.2.1. Formula integrală generală de tip Green în termoelasticitatea necuplată	88
3.2.2. Funcții de influență termoelastice	89
3.2.3. Obținerea funcțiilor Green și a formulei integrale pentru pana sferică termoelastică	93
3.2.4. Exemple de aplicare a dilatării de volum și a formulei integrale de tip Green în termoelasticitate	105
3.3. Validarea problemelor de limită tridimensionale	121
3.4. Concluzii la capitolul 3	122
CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI	124
BIBLIOGRAFIE	126
ANEXE	136
Anexa A. Fâșia	136
Anexa B. Pătrimea de plan	137
Anexa C. Pana sferică	138
Anexa D. Semispațiul	139
DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII	141
CURRICULUM VITAE	142

ADNOTARE

Crețu Ion. Soluții integrale în termoelasticitatea necuplată, teza pentru obținerea titlului de doctor în tehnică, Chișinău, 2018.

Teza include: introducere, trei capitole, concluzii și recomandări, 120 pagini text de bază și 39 figuri, surse bibliografice din 122 titluri și 4 anexe. Rezultatele obținute au fost publicate în 10 lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: soluții integrale, termoelasticitate, funcția Green, funcția de influență, deplasări termoelastice, tensiuni termice, condiții de limită, dilatare de volum.

Domeniul de studiu: teoria termoelasticității.

Scopul tezei: obținerea soluțiilor integrale în termoelasticitatea necuplată prin generalizarea metodei reprezentărilor integrale armonice (MRIA), folosirea metodei Maysel (MM) și a metodei $G\Theta$ convoluției ($MG\Theta-C$) pentru probleme de limită noi a diferitor domenii canonice.

Obiectivele cercetării: construirea funcțiilor Green; obținerea soluțiilor integrale pentru câmpul de temperatură în baza funcțiilor Green; reprezentările generale integrale ale funcțiilor principale termoelastice Green (FPTG); determinarea FPTG în baza reprezentărilor generale folosind MRJA pentru sistemul de coordonate cartezian și a $MG\Theta-C$ pentru domeniul canonic sferic; calcularea unor integrale pe suprafață și pe volum la obținerea soluțiilor integrale; rezolvarea problemelor particulare în termoelasticitatea necuplată în baza soluțiilor integrale prin MRJA și $MG\Theta-C$ și a metodologiei de aplicare a formulei Maysel; trasarea graficelor folosind programa Maple 18 și analiza ulterioară a acestora pentru FPTG și a soluțiilor analitice pentru câmpul de temperatură, deplasările și tensiunile termice; validarea rezultatelor obținute.

Noutatea și originalitatea științifică: lărgirea arsenalului de soluții integrale obținute la rezolvarea problemelor de limită prin generalizarea MRJA pentru domeniile canonice carteziene și a $MG\Theta-C$ pentru domeniul canonic sferic și folosirea soluțiilor integrale la rezolvarea problemelor particulare de limită noi.

Semnificația teoretică: dezvoltarea MRJA și a $MG\Theta-C$ pentru domeniile carteziene și sferice prin obținerea soluțiilor integrale datorită cărora pot fi rezolvate probleme din termoelasticitatea necuplată.

Valoarea aplicativă: MRJA și $MG\Theta-C$ au avut un aport la mărirea arsenalului de soluții integrale din domeniul mecanicii corpului solid deformabil. Acestea au o importanță majoră, fiind posibilă rezolvarea altor probleme de limită noi din domeniu, sau pot fi folosite ca probleme test pentru validarea metodelor clasice și numerice.

Implementarea rezultatelor științifice. Rezultatele obținute pot fi aplicate la determinarea tensiunilor și deplasărilor termice pentru domeniile care au aceeași formă ca și domeniul calculat, inclusiv în elementele de construcție și nu numai (fâșia - peretele unei clădiri, semifâșia - peretele de lângă golul de ușă sau fereastră, pana sferică - cordon de sudură etc.).

АННОТАЦИЯ

Крецу Ион. Интегральные решения в несвязаной термоупругости, диссертация на соискание ученой степени доктора наук, Кишинэу, 2018.

Докторская диссертация включает: введение, три главы, общие выводы (120 стр. текста, 39 рисунков), библиография (122 источников) и 4 приложений. Результаты были опубликованы в 10 научных работах.

Ключевые слова: интегральные решения, термоупругость, функция Грина, функция влияния, термические перемещения, термические напряжения, граничные условия, объемное расширение.

Область исследования: теория термоупругости.

Цель диссертации: Получение интегральных решений в несвязаной термоупругости обобщённым методом гармонических интегральных представлений (МГИП), используя метод Майзеля (ММ) и метод $G\Theta$ свертки ($MG\Theta-C$) для новых граничных задач различных канонических областей.

Задачи исследований: построение функции Грина; получение интегральных решений для температурного поля на основе функций Грина; общие интегральные представления основных термоупругих функций Грина (ОТФГ); построение ОТФГ с использованием МГИП для канонических областей декартовой системы координат и $MG\Theta-C$ для сферического клина; вычисление некоторых поверхностных и объемных интегралов для получение интегральных решений; решение конкретных задач в несвязаной термоупругости на основе интегральных решений используя МГИП, $MG\Theta-C$ и методологии применения формулы Майзеля; построение графиков с использованием программы Maple 18 и их последующий анализ для ОТФГ и аналитические решения для температурного поля, термических перемещений и термических напряжений; проверка и подтверждение полученных результатов.

Научная новизна и оригинальность результатов: расширение арсенала с интегральных решений полученных для граничных задач обобщённым методом гармонических интегральных представлений для декартовых канонических областей и методом $G\Theta$ свертки для сферического клина, а также использование полученных интегральных решений для определения термоупругих перемещений и напряжений новых конкретных граничных задач.

Теоретическая значимость работы: развитие метода гармонических интегральных представлений и метода $G\Theta$ свертки для декартовых и сферических областей и получение на их основе решений в интегралах с помощью которых могут быть решены конкретные задачи в несвязаной термоупругости.

Практическая значимость работы: метод гармонических интегральных представлений и метод $G\Theta$ свертки позволили расширить арсенал интегральных решений краевых задач механики деформированного твердого тела. Полученные решения в интегралах имеют важное практическое значение для получения термоупругих перемещений и напряжений при заданных различных законов изменения термических воздействий. Они также могут быть использованы в качестве тестовых задач для проверки и оценки различных численных методов.

Внедрение научных результатов. Полученные результаты могут быть применены к определению термических перемещений и напряжений для областей, которые имеют ту же форму, что и изучаемое область, в том числе в элементах строительных конструкций, и не только (полоса - стена здания, полуполоса - стена возле двери или окна, сферический клин - сварочный шов и т. д.).

ANNOTATION

Crețu Ion. Integral solutions in uncoupled thermoelasticity for conferring a PhD Degree, Chișinău, 2018.

The thesis structure: introduction, three chapters, conclusions, 120 pages of basic text including 39 figures, bibliography containing 122 sources and 4 Annexes. Results are published in 10 articles.

Key words: integral solutions, thermoelasticity, Green's functions, influence functions, thermal displacements, thermal stresses, boundary conditions, volume dilatation.

The field of the investigation: theory of thermoelasticity.

The thesis aim: obtaining integral solutions in uncoupled thermoelasticity by generalizing the harmonic integral representation method (HIRM), using the Maysel's method (MM) and the $G\Theta$ convolution method ($G\Theta$ -CM) for new boundary value problems for various canonical domains.

The objectives: construction of Green's functions; obtaining integral solutions for the temperature field based on Green's functions; general integral representations of the main thermoelastic Green's functions (MTGFs); determination of MTGFs based on general representations using HIRM for the Cartesian coordinate system and $G\Theta$ -CM for the spherical canonical domain; calculating some surface and volume integrals to get the integral solutions; solving particular problems in uncoupled thermoelasticity based on integral solutions using HIRM, $G\Theta$ -CM and the methodology of application of the Maysel's formula; plotting graphs using the Maple 18 program and their subsequent analysis for the MTGFs and analytical solutions for the temperature field, thermal displacements and stresses; validation of the results obtained.

Scientific novelty and originality of the results: to increase the arsenal with integral solutions obtained in solving boundary value problems by generalizing the HIRM for Cartesian canonical domains and the $G\Theta$ -CM for the spherical canonical domain and use of integral solutions to solve particular new boundary value problems of thermal elasticity.

The theoretical importance: developing the HIRM and the $G\Theta$ -CM for cartesian and spherical domains by obtaining integral solutions with the help of which problems of uncoupled thermoelasticity can be solved.

The applied value: HIRM and the $G\Theta$ -CM had a contribution to increase the arsenal of integral solutions in the field of solid body mechanics. These are of major importance due to the possibilities of solving other new boundary problems in the field, or can be used as test problems for validation classic methods.

The scientific results implementation. The results obtained can be applied to the determination of thermal displacements and stresses for domains that have the same shape as the calculated domain, including building elements, and not only (strip - building wall, half-strip - wall near the door or window, spherical wedge - welding seam etc.).

LISTA ABREVIERILOR

1D - unu dimensional

2D - bidimensional

3D - tridimensional

CL - condiții de limită

FG - funcția Green

FGEP - funcția Green a ecuației Poisson

FPTG - funcții principale termoelastice Green

MG Θ -C - metoda G Θ convoluției

MM - metoda Maysel

MRIA - metoda reprezentărilor integrale armonice

PL - problemă de limită

INTRODUCERE

Actualitatea și importanța problemei studiate. Pentru multe domenii prezența acțiunilor termice (sursa interioară de căldură, gradient de temperatură, flux de căldură etc.) au un efect distructiv privind rezistența elementelor. Posibilitatea realizării unei astfel de construcții, care să suporte influența tuturor acțiunilor termice necesită un calcul minuțios, folosind teoria termoelasticității, plasticității etc. În prezenta teză s-au obținut soluțiile analitice sub formă de integrale în termoelasticitatea necuplată (unde câmpul de temperatură nu depinde de câmpul deplasărilor elastice). Teoria termoelasticității este o combinație atât a teoriei conductibilității de căldură, cât și a teoriei elasticității. Obținerea soluțiilor sub formă integrală prezintă un avantaj la rezolvarea PL în termoelasticitate. În calculele practice cea mai răspândită teorie este cea a tensiunilor termice.

Teoria termoelasticității s-a dezvoltat destul de mult datorită execuției unor piese absolut necesare pentru realizarea unor construcții noi, așa ca: reactoare nucleare, turbine pe gaz, motoare reactive, a pieselor folosite la ansamblarea calculatoarelor etc. Aceste elemente lucrează în condiții de încălzire neuniformă. În urma acestei încălziri neuniforme apar gradienti de temperatură care duc la apariția deformațiilor neuniforme în diferite părți ale elementului.

În caz general, de la încălzirea neuniformă, apar deplasări și tensiuni termice, uneori chiar cu apariția și dezvoltarea fisurilor. Fisurile într-un corp pot apărea fie de la tensiunile termice, fie de la cele mecanice, sau de la ambele tensiuni concomitent. Aceste fisuri pot duce la cedarea elementului. Anume aceste valori ale deplasărilor și tensiunilor termice sunt necesare pentru analiza rezistenței elementului în particular și a construcției în ansamblu. Astfel, obținerea soluțiilor integrale ale deplasărilor și tensiunilor termoelastice sunt apreciate de cercetătorii din domeniu, deoarece ele dau posibilitatea să fie rezolvate (pentru fiecare tip de PL concretă) o mulțime de probleme de la acțiunea diferitor legi de schimbare a sursei interioare de căldură, a temperaturii etc. În baza soluțiilor integrale pot fi obținute soluțiile analitice și comparate cu rezultatele căpătate prin metodele clasice. Dacă aceste soluții sunt în funcții elementare, importanța acestor rezultate crește și mai mult. Din aceste considerente tema tezei "Soluții integrale în termoelasticitatea necuplată" este destul de importantă. Actualitatea temei se explică prin aceea că soluțiile integrale conduc la mărirea arsenalului de PL rezolvate sub formă analitică cu ajutorul cărora pot fi rezolvate un set de probleme de limită concrete noi. Cu atât mai mult, aceste soluții integrale, încă nu au fost obținute pentru toate corpurile posibile a tuturor sistemelor de coordonate.

În baza cercetărilor efectuate au fost obținute soluții integrale și analitice folosind $MG\Theta$ -C și MRIA și a metodologiei de aplicare a formulei Maysel pentru un set de PL noi. Aceste metode s-au dovedit a fi mai eficiente decât metodele clasice.

Scopul lucrării constă în obținerea soluțiilor integrale în termoelasticitatea necuplată prin generalizarea metodei reprezentărilor integrale armonice (MRIA), folosirea metodei Maysel (MM) și a metodei $G\Theta$ convoluției ($MG\Theta$ -C) pentru probleme de limită (PL) noi a diferitor domenii canonice.

Obiectivele de bază:

- construirea FGEP pentru conductibilitate termică;
- obținerea soluțiilor integrale pentru câmpul de temperatură în corpuri din sistemul cartezian de coordonate în baza FG construite;
- reprezentările generale integrale ale FPTG prin FG ale conductibilității termice;
- determinarea FPTG în baza reprezentărilor generale folosind MRIA pentru sistemul de coordonate cartezian și a $MG\Theta$ -C pentru sistemul de coordonate sferic;
- calcularea unor integrale pe suprafață și pe volum la obținerea soluțiilor integrale;
- rezolvarea problemelor particulare în termoelasticitatea necuplată, în baza soluțiilor integrale prin MRIA și $MG\Theta$ -C și a metodologiei de aplicare a formulei Maysel;
- trasarea graficelor folosind programa Maple 18 și analiza ulterioară a acestora pentru FPTG și a soluțiilor analitice pentru câmpul de temperatură, deplasările și tensiunile termice;
- validarea rezultatelor obținute.

Noutatea științifică constă în următoarele:

- obținerea soluțiilor integrale pentru câmpul de temperatură în domeniile canonice ale sistemului de coordonate cartezian;
- extinderea MRIA prin obținerea soluțiilor integrale în termoelasticitate pentru domeniile canonice ale sistemului de coordonate cartezian;
- extinderea $MG\Theta$ -C prin obținerea soluțiilor integrale în termoelasticitate pentru domeniile canonice ale sistemului de coordonate sferic;

- crearea unui procedeu de calcul a unor integrale pe volum de la produsul dintre funcția de tip Green din conductibilitatea termică și funcția de influență a dilatării elastice de volum de la acțiunea unei forțe unitare concentrate pentru $MG\Theta-C$. Calculul mai multor integrale pe suprafață în MRJA;
- lărgirea arsenalului de funcții termoelastice prin generalizarea MRJA pentru domeniile canonice ale sistemului de coordonate cartezian și a $MG\Theta-C$ pentru domeniile canonice ale sistemului de coordonate sferic;
- obținerea soluțiilor integrale ale deplasărilor și tensiunilor termoelastice în funcții elementare pentru unele PL particulare noi.

Problema științifică importantă soluționată constă în generalizarea MRJA și aplicarea acestei metode la obținerea soluțiilor integrale ale deplasărilor și tensiunilor termice, pentru domeniile canonice ale sistemului de coordonate cartezian și generalizarea $MG\Theta-C$ și aplicarea ei la obținerea soluțiilor integrale ale deplasărilor termoelastice, pentru domeniile canonice ale sistemului de coordonate sferic.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării. În baza $MG\Theta-C$ și MRJA, în urma rezolvării unor PL noi au fost obținute soluțiile integrale ale deplasărilor și tensiunilor termice. Aceste soluții obținute în funcții elementare au o importanță destul de mare în domeniul termoelasticității și anume: completează arsenalul de soluții integrale cu rezultatele obținute (folosind aceste rezultate crește și valoarea aplicativă a lucrării), permit rezolvarea altor PL noi, pot fi folosite ca probleme test pentru validarea metodelor clasice etc.

Implementarea rezultatelor științifice. Rezultatele obținute pot fi aplicate la determinarea tensiunilor și deplasărilor termice pentru domeniile, care au aceeași formă ca și domeniul calculat, inclusiv în elementele de construcție și nu numai (fâșia - peretele unei clădiri, semifâșia - peretele de lângă golul de ușă sau fereastră, pana sferică - cordon de sudură etc.).

Aprobarea rezultatelor cercetărilor. Rezultatele cercetărilor au fost validate în cadrul lucrărilor publicate în reviste internaționale și naționale:

- Articol în revistă internațională (cotată ISI): "Acta Mechanica", vol. 224, Nr. 4, 2013;
- Articole în revistă internațională (ISSN): "Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics", vol. 7, Nr. 1, 2015; vol. 8, Nr. 2, 2016;
- Articol în revistă națională (ISSN): "Meridian ingineresc", vol. 7, Nr. 1, 2017.

Rezultatele cercetărilor au fost prezentate și discutate la conferințe, simpozioane internaționale și naționale cu publicarea în lucrările acestora:

- Articole la: "Conferința Tehnico-Științifică a Colaboratorilor, Doctoranzilor și Studenților UTM", Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova, 2012;
- Articole la: "Conferința Jubiliară Tehnico-Științifică a Colaboratorilor, Doctoranzilor și Studenților consacrată celei de-a 50-a Aniversări a UTM", Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova, 2014;
- Articol la conferința internațională: "The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova", Academia de Științe a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova, 2014;
- Articol la simpozionul internațional: "Utilizarea eficientă a resurselor hidro-funciare în condițiile actuale - realizări și perspective", Universitatea Agrară de Stat din Moldova, Chișinău, Republica Moldova, 2016.

Publicații la tema tezei. La tema tezei au fost publicate 10 lucrări științifice: un articol într-o revistă internațională cotate ISI; două articole ca singur autor într-o revistă de circulație internațională; un articol ca singur autor într-o revistă recenzată de circulație națională, șase articole în culegeri de lucrări ale conferințelor și simpozioanelor internaționale și naționale, dintre care 4 fără coautori.

Structura și volumul lucrării. Teza este compusă din adnotări (română, rusă și engleză), introducere, trei capitole, concluzii și recomandări, bibliografie (122 titluri) și 4 anexe. Conținutul de bază al tezei este expus pe 120 pagini și inserează 39 figuri.

Cuvinte-cheie: soluții integrale, termoelasticitate, funcția Green, funcția de influență, deplasări termoelastice, tensiuni termice, condiții de limită, dilatarea de volum.

Conținutul tezei.

Capitolul 1. Metodele de calcul folosite la rezolvarea PL în termoelasticitate. În acest capitol este analizată situația din domeniul teoriei termoelasticității: monografii, articole, materiale ale conferințelor științifice etc., savanții care au pus bazele dezvoltării acestui domeniu. Sunt stipulate metodele clasice aplicate în teoria termolelasticității publicate în țară și peste hotare. În baza literaturii de specialitate studiate s-a făcut o analiză comparativă a situației existente în domeniu. O atenție deosebită s-a acordat metodelor dezvoltate în ultimii ani, acestea fiind

MG Θ -C și MRIA, avantajele și dezavantajele în raport cu celelalte metode. Sunt enunțate publicațiile efectuate în baza acestor metode relativ noi.

Capitolul 2. Soluții integrale termoelastice pentru PL 2D. Este prezentată metodică de obținere a soluțiilor integrale ale deplasărilor și tensiunilor termice folosind MRIA pentru PL 2D sub formă de fâșie cu anumite CL. Pentru aceasta, preventiv s-a construit FG a aceluiași domeniu și s-au dedus FPTG. S-au obținut expresiile pentru câmpul de temperatură cu CL de tip Dirichlet. Folosind aceeași MRIA au fost obținute expresiile analitice ale deplasărilor și tensiunilor termice pentru un domeniu în formă de pătrime de plan. Folosind metoda Maysel au fost deduse soluțiile analitice ale deplasărilor și tensiunilor termoelastice pentru semifâșie. Pentru expresiile obținute: FG, câmpul de temperatură, tensiunile termice în fâșie, pătrime de plan și semifâșie folosind programa Maple 18 au fost prezentate grafic aceste relații, cu analiza ulterioară a lor. Au fost validate rezultatele folosind MRIA, pentru aceasta s-a rezolvat o PL 2D (pătrime de plan). Problema dată a fost rezolvată deja în literatura de specialitate printr-o altă metodă și rezultatele ei sunt cunoscute. În final se demonstrează că aceste rezultate coincid, ceea ce arată că utilizarea MRIA oferă soluții integrale exacte pentru PL 2D noi.

Capitolul 3. Soluții integrale termoelastice pentru PL 3D. Cu aplicarea MRIA au fost obținute FPTG, tensiunile termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură și soluțiile analitice ale deplasărilor termice pentru semispațiu. Folosind programa Maple 18 au fost prezentate grafic expresiile FPTG (3 pentru deplasările termoelastice și 6 pentru tensiunile termice) și ale soluțiilor analitice pentru deplasările termice (9 grafice). Folosind MG Θ -C a fost rezolvată o PL în sistemul de coordonate sferic și au fost deduse FPTG și soluțiile integrale termoelastice pentru pana sferică. Folosind programa Maple au fost prezentate 12 grafice ale soluțiilor integrale ale deplasărilor termice pentru pana sferică, cu analiza ulterioară a acestor grafice. Au fost validate rezultatele prin MRIA. Pentru aceasta s-a rezolvat o PL 3D (semispațiu) la care sunt cunoscute rezultatele în literatura de specialitate, această problemă fiind rezolvată printr-o altă metodă. În final se demonstrează că aceste rezultate coincid, ceea ce arată că utilizarea MRIA oferă soluții integrale exacte pentru PL 3D noi.

Concluzii generale și recomandări. Această secțiune cuprinde sinteza rezultatelor tezei și sugestii privind cercetările de perspectivă.

1. METODE DE CALCUL FOLOSITE LA REZOLVAREA PROBLEMELOR DE LIMITĂ ÎN TERMOELASTICITATE

Rezolvarea PL din teoria termoelasticității ca și în teoria elasticității constă în obținerea a 15 funcții: σ_{ij} - tensiuni, ε_{ij} - deformații, u_i - deplasări, care satisfac 3 ecuații de echilibru, 6 relații fizice și 6 relații geometrice în dependență de CL cunoscute, fie în deplasări, fie în tensiuni.

Pentru simplificarea prezentării soluțiilor obținute la rezolvarea PL în termoelasticitate se folosesc vectorii de deplasări u_i sau tensorul de tensiune σ_{ij} . Folosind aceste notări se diferențiază PL în termoelasticitate în deplasări, dacă în prima fază se determină deplasările u_i și PL în termoelasticitate în tensiuni, dacă înainte de toate se determină tensiunile σ_{ij} .

1.1. Metodele clasice

La baza cercetărilor efectuate în teoria termoelasticității au stat problemele pentru determinarea deplasărilor termice în elementele construcției. Acestea se realizau după teoria dezvoltată de Duhamel M.C. [122] (1837) și Neumann F.E. [121] (1841), care au ajuns la concluzia: deformația totală este egală cu suma deformațiilor elastice și a deformațiilor termoelastice ce are o strânsă legătură cu câmpul de temperatură din conductibilitatea de căldură. În scurt timp s-a ajuns la concluzia că teoria Duhamel-Neumann, pentru termoelasticitatea nestaționară și a acțiunilor mecanice este limitată. Această teorie nu permite exact să fie descrise deplasările corpului elastic, în dependență de acțiunile termice.

Cercetările efectuate în domeniul termoelasticității necuplate au pus baza unei metode elaborate de Papkovici P.F., la rezolvarea problemelor practice, cu obținerea unei soluții generale. În această formă, soluția ecuației omogene pentru vectorul de deplasare conține variabilele vector și scalar. Soluția particulară a soluției neomogene de la câmpul de temperatură se determină folosind o funcție scalară numită potențialul deplasărilor termoelastice.

La dezvoltarea teoriei termoelasticității au avut un aport cercetările efectuate de savanții: Boley B.A. și Weiner I.H. [18], Galerkin B.G. [75] Nowacki W. [30], Covalenco A.D. [87], Maysel V.M. [102], Lomakin V.A. [96], Melan E. și Parcus N. [103], Timošenco S.P. și Goodier Dj. [114]. Metode relativ noi în termoelasticitate sunt prezentate în [26].

În cazul rezolvării PL în termoelasticitate, atât pentru metoda potențialului termoelastic

oferit de Timošenko și Goodier, alte metode a potențialului termoelastic, cât și pentru multe alte metode tradiționale, trebuie să fie rezolvată inițial o PL a conductibilității de căldură pentru a determina câmpul de temperatură (aceasta este prima etapă a soluției) și ulterior, în baza câmpului de temperatură cunoscut, se rezolvă ecuațiile Lamé (cea de-a doua etapă a soluției). Această metodă complică obținerea soluției pentru PL în termoelasticitate.

La rezolvarea PL în termoelasticitatea necuplată poate fi aplicată și metoda Maysel, la baza căreia stă formula lui Maysel [30, 46, 102], [106, p. 483]. Această formulă este caracterizată de deplasările termoelastice în formă de integrală pe volum de la produsul dintre câmpul interior de temperatură și funcțiile de influență a dilatării de volum de la acțiunea forțelor concentrate. În majoritatea cazurilor câmpul interior de temperatură este necunoscut și ca în cazul metodelor precedente, trebuie să fie determinat prin rezolvarea unei PL în conductibilitate termică. Acest câmp interior de temperatură se determină de la acțiunea unor factori de căldură, de volum și de suprafață cunoscuți. Anume necesitatea determinării câmpului interior de temperatură și rezolvarea unei integrale pe volum, crează unele dificultăți în obținerea soluțiilor pentru deplasările termoelastice, la aplicarea formulei Maysel.

Prima etapă în rezolvarea problemelor din termoelasticitatea necuplată se bazează pe determinarea câmpului de temperatură cu aplicarea metodelor din teoria conductibilității de căldură, dezvoltate în monografiile savanților Lăcov A.V. [99, 100], Karlsou G. și Eggher D. [85] ș. a.

Pentru cea de-a doua etapă se folosesc metodele cunoscute în teoria elasticității [13, p. 12], dintre care pot fi remarcate:

- Metoda soluțiilor generale [16, 65, 74, 90, 97, 98, 108, 110]. La baza acestei metode stau reprezentările generale ale vectorului de deplasări, care este redat printr-un vector armonic sau biarmonic arbitrar. Aceste reprezentări trebuie să satisfacă ecuațiile de echilibru în deplasări și a CL de la suprafața corpului elastic.
- Metoda soluțiilor omogene [97, 98, 111, 112]. În această metodă, PL trebuie să fie rezolvată în două etape. Înainte de toate, se utilizează soluțiile omogene, care reprezintă integrale ale ecuațiilor teoriei elasticității. Acestea trebuie să satisfacă condițiile omogene pe o parte a suprafeței corpului elastic. Ulterior, soluția problemei inițiale se reprezintă sub formă de superpoziții a mai multor soluții particulare.
- Metoda separării variabilelor [79, 80, 97, 98, 110] se bazează pe obținerea soluțiilor în formă de serii. Această metodă este eficientă dacă variabilele se separă, iar corpul elastic este mărginit de o suprafață a unui sistem de coordonate.

- Metoda Fourier [97, 98, 119] constă în folosirea diferitor reprezentări a ecuațiilor de echilibru prin funcții de tensiune. Astfel problema inițială se reduce la rezolvarea unor ecuații diferențiale mai simple pentru fiecare funcție de tensiune. Dacă se folosește în continuare metoda separării variabilelor pentru ecuațiile diferențiale mai simple, se obține reprezentarea soluției problemei inițiale care este în formă de serii și integrale. Aceste soluții conțin de obicei funcții speciale.
- Metoda transformărilor integrale [94, 95, 115] constă în utilizarea unei transformate integrale cunoscute: Fourier, Hankel, Mellin, Laplace etc. Pentru aplicarea acestei metode ecuațiile problemei inițiale de limită sunt supuse unor transformări integrale astfel încât PL obținută să fie ușor rezolvabilă. Ulterior se trece de la soluția în imagini la soluția problemei inițiale, care de obicei poate fi efectuată numai prin metode numerice.
- Metodele lui Șvarț și Șvarț-Neumann [113] se folosesc dacă PL reprezintă o intersecție sau o îmbinare din două sau mai multe domenii în cazul în care soluțiile PL a domeniilor ce se îmbină sunt cunoscute. Aceste metode pot fi utilizate la rezolvarea problemelor pentru un domeniu arbitrar.
- Metodele variaționale [83, 84, 104, 116, 117, 118] sau dezvoltat datorită dificultăților care apăreau la verificarea CL pentru metodele enunțate mai sus. Esența și bazele teoretice ale acestei metode sunt redată în [105].
- Metoda potențialilor și metoda potențialilor de elasticitate [25, 64, 76, 81, 89, 91, 92, 93] constă în generalizarea metodei Green din teoria potențialilor armonici. Aceste metode se bazează pe reprezentări în formă de integrale definite cu singularități în punctele interioare sau în punctele suprafeței corpului elastic.

Chiar dacă numărul metodelor analitice este destul de mare, rezolvarea PL și obținerea rezultatelor este foarte anevoioasă fără utilizarea mașinilor electronice de calcul, sau dacă se soluționează ușor, doar pentru un cerc îngust de probleme spațiale. Progresul mașinilor electronice de calcul a adus un aport substanțial la dezvoltarea și utilizarea metodelor numerice în mecanica corpului solid deformabil. Aceste metode se clasifică în două categorii:

- metodele care rezolvă în mod direct ecuațiile diferențiale inițiale. Din acestea fac parte: metoda diferențelor finite [77] și metoda elementelor finite [107];

- metodele care rezolvă alte ecuații echivalente cu cele inițiale. Din acestea fac parte: metodele numerice de rezolvare a ecuațiilor integrale ale teoriei elasticității [69, 109]; metodele de iterație numerică pentru rezolvarea problemelor teoriei plasticității [82, 120] și a teoriei elasticității corpului continuu neomogen [88, 96].

În cazul rezolvării PL a conductibilității de căldură, Green a propus o formulă integrală specială pentru determinarea câmpului de temperatură de la acțiunile termice exterioare și interioare. Același autor (Green) a propus o formulă pentru determinarea câmpului de deplasări elastice, dacă sunt cunoscute acțiunile mecanice, iar V. Șeremet a propus o formulă pentru determinarea deplasărilor termice prin generalizarea formulei integrale Green, direct din acțiunile termice cunoscute, dacă sunt știute FPTG.

La rezolvarea PL a conductibilității de căldură, pentru determinarea câmpului de temperatură, soluțiile sunt prezentate în baza acțiunilor inițial cunoscute (sursă interioară de căldură, gradient de temperatură, flux de căldură etc.). Pentru PL a elasticității liniare la determinarea câmpului de deplasări, soluțiile sunt prezentate în baza acțiunilor inițial cunoscute (forțe de volum, tensiuni pe suprafață, etc.).

Folosind FG pot fi obținute soluțiile integrale pentru diferite PL, însă cel mai complicat este construirea acestor funcții. FG sunt aceleași linii de influență binecunoscute din domeniul Mecanicii Structurilor, care sunt funcții de 1D [1, 2, 15]. Spre deosebire de liniile de influență, FG pot fi utilizate inclusiv, la rezolvarea problemelor de 2D sau 3D.

1.2. Metoda $G\Theta$ convoluției

La baza $MG\Theta$ -C stă rezolvarea unei integrale pe volum de la produsul dintre FG a conductibilității termice și funcția de influență a dilatării de volum elastic de la acțiunea unei forțe unitare concentrate ($\Theta^{(i)}$). De aici provine și denumirea metodei $G\Theta$ convoluției. În acest caz soluțiile obținute în urma rezolvării PL sunt exprimate indirect prin acțiunile termice inițial cunoscute (sursă interioară de căldură, gradient de temperatură, flux de căldură sau alte acțiuni termice).

La rezolvarea PL cu aplicarea formulei Maysel este necesar să fie rezolvată o PL în conductibilitate termică, pentru a fi determinat câmpul de temperatură. Acesta este și dezavantajul pentru metoda Maysel. Deci, FG are un rol extrem de important în obținerea soluțiilor integrale pentru PL din teoria termoelasticității și nu numai. De aceea, obținerea unor astfel

de soluții aduce un aport în domeniul mecanicii corpului solid și este apreciată de specialiștii din domeniu.

Unele rezultate obținute prin MG Θ -C sunt realizate în lucrările [12, 34, 35, 52, 54, 55], [56, p. 105], [57, 59, 66, 67, 101].

În lucrările [68, 69] a fost propusă formula generală pentru funcțiile de influență ale deplasărilor termoelastice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură (a unei temperaturi unitare punctiforme sau a unui flux unitar punctiform aplicat pe suprafața corpului). Tot aici este prezentată generalizarea formulelor integrale Maysel și Green în termoelasticitatea necuplată. Chiar dacă sunt rezolvate un set de probleme concrete folosind această metodă, ele nu au permis să fie dedusă o formulă integrală generală pentru deplasări în PL ale termoelasticității în formulare generală.

Impedimentele la obținerea soluțiilor integrale folosind MG Θ -C sunt:

- construirea FG în conductibilitate termică;
- determinarea funcțiilor de influență a dilatării de volum de la acțiunea unei forțe unitare concentrate;
- rezolvarea unei integrale de volum de la produsul acestor funcții.

O mare parte din aceste funcții au fost deja obținute într-o formă explicită în manualul [50, 72], unde sunt prezentate 190 PL pentru determinarea funcțiilor de tip Green în conductibilitate termică și 250 PL pentru determinarea funcțiilor de influență pentru dilatarea de volum și matricea Green în teoria elasticității. În total, un număr de peste 3000 de funcții de tip Green, funcții de influență a dilatării de volum de la acțiunea unei forțe unitare concentrate și matricea Green, majoritatea fiind pentru domeniul cartezian de coordonate.

Astfel, folosind aceste funcții au fost obținute deplasările termoelastice pentru diferite domenii: spațiu, semispațiu, pătrime de spațiu și optime de spațiu, plan, semiplan și pătrime de plan. În celelalte sisteme de coordonate au fost obținute mai puține rezultate. Aici poate fi remarcat faptul că mai devreme, în lucrările [70, 71] au fost obținute reprezentările integrale generale pentru funcțiile de influență a dilatării de volum de la acțiunea unei forțe unitare concentrate pentru sistemul de coordonate cilindric și sferic.

În această lucrare va fi folosită MG Θ -C pentru PL în coordonate sferice cu obținerea funcțiilor de influență, a formulelor integrale și în final, a soluțiilor integrale pentru deplasările

termoelastice în pana sferică. Determinarea soluțiilor integrale pentru PL noi este înalt apreciată de specialiștii din domeniu și aceste rezultate deschid noi orizonturi pentru cercetători la rezolvarea a noi PL particulare.

Avantajul acestei metode în comparație cu metodele tradiționale, chiar și față de metoda Maysel este că $MG\Theta-C$ unește în sine ambele procese de rezolvare a PL în termoelasticitate. Dacă la rezolvarea PL în termoelasticitate prin aplicarea formulei lui Maysel este necesar de cele mai multe ori, în primul rând, să fie determinat câmpul de temperatură (apriori acesta este cunoscut), apoi să fie obținute funcțiile de influență a dilatării de volum de la acțiunea unei forțe unitare concentrate, atunci folosind $MG\Theta-C$ trebuie să fie obținute doar funcțiile termoelastice de tip Green. Un alt avantaj pentru aplicarea $MG\Theta-C$ este că dacă se rezolvă o PL concretă, atunci pentru această problemă concretă pot fi obținute toate soluțiile integrale posibile pentru diferite legi care descriu acțiunile termice (sursă interioară de căldură, gradient de temperatură, flux de căldură etc.)

Dezavantajul metodei este că la obținerea soluțiilor pentru corpurile carteziene care au linii drepte sau planuri paralele cu axele carteziene, utilizarea $MG\Theta-C$ nu este posibilă. Situația se explică prin faptul că, pentru astfel de domenii, funcțiile potențiale termoelastice sunt încă necunoscute. Aceasta înseamnă că soluția ecuației Poisson $\nabla^2 U = f$, unde funcția potențialului termoelastic U nu este cunoscută (f este soluția fundamentală pentru operatorul Laplace a domeniului considerat).

1.3. Metoda reprezentărilor integrale armonice

Metoda reprezentărilor integrale armonice (MRIA) constă în obținerea FPTG (deplasările termoelastice) printr-o nouă abordare, direct din ecuațiile Lamé sau din ecuațiile Beltrami-Michel, în dependență de tipul CL. Această metodă a fost dezvoltată de prof. univ., dr. hab. Șeremet Victor și expusă în lucrările [33], [56, p. 105].

La baza MRIA au stat determinarea formulelor structurale (de bază) generale a dilatării de volum și a deplasărilor termoelastice. Datorită acestor formule structurale generale nu este necesară determinarea prealabilă a câmpul de temperatură de la acțiunile termice (sursă interioară de căldură, gradient de temperatură, flux de căldură etc.) așa cum se realizează în metodele clasice. Folosind MRIA soluțiile obținute în urma rezolvării PL sunt explimate direct prin acțiunile termice inițial cunoscute (sursă interioară de căldură, gradient de temperatură, flux de căldură sau alte acțiuni termice). De aceea, nu este necesar să se deducă funcțiile de

influență ale dilatării de volum de la acțiunea unei forțe unitare concentrate, ca în $MG\Theta-C$. În final, pentru obținerea soluțiilor, integralele care trebuie să fie rezolvate sunt integrale de suprafață și nu de volum, ceea ce ușurează cu mult calculul integral.

În lucrarea de față, folosind MRIA au fost obținute soluțiile integrale pentru următoarele corpuri din domeniul cartezian de coordonate: fâșia, patrimea de plan și semispațiul cu CL, care în literatura de specialitate până în prezent nu au fost încă rezolvate. Toate rezultatele sunt obținute în termeni de funcții elementare și sunt foarte importante pentru implementarea lor numerică, în special pentru elaborarea a numeroase elemente noi de limită care urmează să fie utilizate în metoda elementului finit etc. Aceste rezultate pot fi tratate ca o nouă contribuție considerabilă la construirea FPTG pentru noi PL din termoelasticitate.

Principalele beneficii ale metodei propuse în comparație cu celelalte metode sunt:

- nu este necesar să fie deduse funcțiile de influență ale dilatării de volum elastic de la acțiunea unei forțe unitare concentrate;
- nu este necesar să fie realizat calculul complex al produsului dintre funcția de influență a dilatării de volum și funcția de tip Green din conductibilitate termică;
- metoda propusă poate fi extinsă pentru mai multe domenii canonice ale sistemului de coordonate cartezian.

Dezavantajul pentru MRIA este necesitatea obținerii formulelor structurale generale, dacă se dorește rezolvarea unor PL noi pentru alte sisteme de coordonate. Pentru fiecare sistem de coordonate (cartezian, polar, cilindric, sferic, curbiliniu etc.) aceste reprezentări integrale sunt diferite, însă odată deduse pot fi folosite la rezolvarea unui set mare de probleme din acel sistem de coordonate.

Probleme rezolvate în termoelasticitate sunt prezentate în lucrările [17, 20, 23, 24, 27, 41, 51, 63] cu obținerea FG, a soluțiilor explicite pentru diferite domenii ale sistemelor de coordonate.

1.4. Concluzii la capitolul 1

Conform celor expuse mai sus, referitor la metodele de rezolvare a PL în termoelasticitate pot fi enunțate următoarele concluzii generale:

- $MG\Theta-C$ este mai eficientă decât celelalte metode clasice deoarece, pentru această metodă nu trebuie să fie inițial determinat câmpul de temperatură. Soluțiile obținute în urma rezolvării PL sunt exprimate indirect prin acțiunile termice inițial cunoscute (sursă interioară de căldură, gradient de temperatură, flux de căldură sau alte acțiuni termice);
- Neajunsurile $MG\Theta-C$ constau în construirea funcțiilor de influență a dilatării de volum elastic de la acțiunea unei forțe unitare concentrate, a funcțiilor de tip Green în conductibilitate termică și convoluția acestor 2 funcții;
- La rezolvarea PL folosind MRIA nu trebuie să fie obținute funcțiile de influență ale dilatării de volum elastic de la acțiunea unei forțe unitare concentrate și ca urmare nu este necesară rezolvarea unei integrale complicate, de cele mai multe ori în această metodă se rezolvă integrale pe suprafață, ceea ce ușurează substanțial calculul efectuat;
- Impedimentele pentru folosirea MRIA la rezolvarea PL pentru alte sisteme de coordonate constau în necesitatea obținerii formulelor structurale generale, dar odată obținute aceste formule structurale pot fi folosite la rezolvarea întregului set de PL a sistemului de coordonate dedus;
- Datorită metodelor propuse $MG\Theta-C$ și MRIA pot fi determinate soluții integrale și respectiv cele analitice pentru mai multe PL noi, sau, să fie folosite în calitate de soluții test pentru metodele clasice.

În baza acestor concluzii generale enunțate anterior, au fost formulate scopul și obiectivele lucrării.

Scopul lucrării constă în obținerea soluțiilor integrale în termoelasticitatea necuplată prin generalizarea MRIA, folosirea MM și a $MG\Theta-C$ pentru PL noi a diferitor domenii canonice.

Scopul a fost atins prin următoarele **obiective**:

- construirea FGEP pentru conductibilitate termică;
- obținerea soluțiilor integrale pentru câmpul de temperatură în corpuri din sistemul cartezian de coordonate în baza FG construite;
- reprezentările generale integrale ale FPTG prin FG a conductibilității termice;

- determinarea FPTG în baza reprezentărilor integrale generale folosind MRIA pentru sistemul de coordonate cartezian și cu aplicarea MG Θ -C pentru sistemul de coordonate sferic;
- calcularea unor integrale pe suprafață și pe volum la obținerea soluțiilor integrale;
- rezolvarea problemelor particulare în termoelasticitatea necuplată, în baza soluțiilor integrale prin MRIA și MG Θ -C și a metodologiei de aplicare a formulei Maysel;
- trasarea graficelor folosind programa Maple 18 și analiza ulterioară a acestora pentru FPTG și a soluțiilor analitice pentru câmpul de temperatură, deplasările și tensiunile termice;
- validarea rezultatelor obținute.

2. SOLUȚII INTEGRALE TERMOELASTICE PENTRU PROBLEMELE DE LIMITĂ BIDIMENSIONALE

Determinarea stărilor de deformații și tensiuni de la acțiunea unei surse interioare de căldură, a unui gradient de temperatură și/sau alte acțiuni termice aplicate pe suprafața corpului este o problemă matematică dificilă, care necesită crearea unor teorii speciale. Datorită FG pot fi determinate soluțiile integrale pentru diferite PL, însă cel mai dificil în această metodă este anume construirea acestor funcții. Pentru obținerea FG și a unor soluții integrale noi a fost necesară dezvoltarea unei noi metode propusă de către V. Șeremet, numită Metoda Reprezentărilor Integrale Armonice (MRIA). Folosind soluțiile integrale pot fi calculate deplasările și tensiunile termice.

Deplasările termoelastice pot fi determinate și după formula lui Maysel [106, p. 483], însă soluția acestei PL nu este reprezentată în mod direct de valorile cunoscute, dar prin intermediul unui câmp de temperatură, care de cele mai multe ori trebuie să fie determinat în fază incipientă, ca mai apoi să fie calculată și o integrală pe volum. Pentru a evita rezolvarea unei PL suplimentară (determinarea câmpului de temperatură) în [46, 49] [50, p. 94] [53], [56, p. 105], autorul V. Șeremet a propus generalizarea formulei lui Maysel și a formulelor integrale Green:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & a^{-1} \int_V F(x) U_i(x, \xi) dV(x) - \int_{\Gamma_D} T(y) \frac{\partial U_i(y, \xi)}{\partial n_y} d\Gamma_D(y) \\
 & + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} U_i(y, \xi) d\Gamma_N(y) + a^{-1} \int_{\Gamma_M} \left[\alpha T(y) + a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} \right] U_i(y, \xi) d\Gamma_M(y); i = 1, 2, 3, \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

unde:

U_i - FPTG (funcțiile principale termoelastice Green sau funcțiile de influență ale deplasărilor termoelastice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură). Aceste deplasări termoelastice se numesc funcții principale termoelastice Green, deoarece, dacă ele sunt cunoscute, atunci pot fi calculate deplasările și tensiunile termoelastice de la acțiunea unei surse interioare de căldură, gradient de temperatură și/sau alte acțiuni termice;

Γ_D , Γ_N și Γ_M - sunt părți componente a suprafeței corpului $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_M$ și reprezintă CL de tip Dirichlet (temperatura $T(y)$), Neumann (fluxul de căldură $a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y}$) și mixt (are loc

schimbul de căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului după legea $\left[\alpha T(y) + a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} \right]$;

a - coeficientul conductivității de temperatură;

$F(x)$ - sursa interioară de căldură;

α - coeficientul conductibilității convective de căldură;

$\gamma = \alpha_t(2\mu + 3\lambda)$ - constanta termoelastică;

α_t - coeficientul dilatării termice liniare;

λ, μ - constantele de elasticitate Lamé.

În formă matriceală, pentru problemele spațiale, deplasările termoelastice se reprezintă:

$$U_i(x, \xi) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}; \quad u_i(\xi) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

În cazul în care, la determinarea deplasărilor se folosește relația (2.1), atunci nu mai este necesară determinarea câmpului de temperatură, ci doar se utilizează date termice deja cunoscute (sursa interioară de căldură, temperatura, fluxul de căldură sau schimbul de căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului etc.).

Dacă sunt cunoscute deplasările termoelastice U_i și u_i , atunci pot fi calculate tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ și $\sigma_{ij}(\xi)$ în baza legii Duhamel-Neumann [29, p. 5], [106, p. 476]:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \mu(U_{i,j} + U_{j,i}) + \delta_{ij}(\lambda\Theta - \gamma G_T); \quad \Theta = U_{k,k}(x, \xi); \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij}(\lambda\theta - \gamma T); \quad \theta = u_{k,k}; \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

unde:

$\bar{\sigma}_{ij}$ - funcțiile de influență ale tensiunilor termice de la o sursă unitară punctiformă de căldură;

σ_{ij} - tensiunile termice calculate de la o sursă interioară de căldură, gradient de temperatură, flux de căldură sau schimbul de căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului;

δ_{ij} - simbolul Kronecker, 1 dacă $i = j$ și 0 dacă $i \neq j$;

Θ - dilatarea de volum elastică;

G_T - FG.

Pentru determinarea tensiunilor termice de la acțiunea unei surse interioare de căldură, gradient de temperatură, fluxul de căldură și/sau schimbul de căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului pentru o problemă tridimensională poate fi utilizată și următoarea formulă

integrală de tip Green [55], dacă sunt cunoscute funcțiile de influență a tensiunilor termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură:

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) = & a^{-1} \int_V F(x) \bar{\sigma}_{ij}(x, \xi) dV(x) - \int_{\Gamma_D} T(y) \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}(y, \xi)}{\partial n_y} d\Gamma_D(y) + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} \bar{\sigma}_{ij}(y, \xi) d\Gamma_N(y) \\ & + a^{-1} \int_{\Gamma_M} \left[\alpha T(y) + a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} \right] \bar{\sigma}_{ij}(y, \xi) d\Gamma_M(y); i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.5)$$

În formă matriceală, pentru problema spațială, tensiunile termice se reprezintă:

$$\sigma(\xi) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}; \quad \bar{\sigma}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{21} & \bar{\sigma}_{22} & \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{31} & \bar{\sigma}_{32} & \bar{\sigma}_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Conform MRIA [56, p. 108] reprezentările generale integrale ale FPTG pentru un domeniu general al sistemului cartezian de coordonate se scriu în felul următor:

$$\begin{aligned} U_i(x, \xi) = & -\frac{\lambda + \mu}{2\mu} \xi_i \Theta(x, \xi) - \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} x_i G_i(x, \xi) + \frac{\gamma \xi_i}{2\mu} G_T(x, \xi) \\ & - \int_{\Gamma} \left[V_i(x, y) \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma}} - \frac{\partial V_i(x, y)}{\partial n_{\Gamma}} \right] G_i(y, \xi) d\Gamma(y), \end{aligned} \quad (2.7)$$

unde:

$$V_i(x, y) = U_i(x, y) + \frac{\xi_i}{2\mu} [(\lambda + \mu)\Theta(x, y) - \gamma G_T(x, y)]; i = 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

$$\Theta(x, \xi) = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} G_{\Theta}(x, \xi) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Theta(x, y)}{\partial n_{\Gamma}} - \Theta(x, y) \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma}} \right] G_{\Theta}(y, \xi) d\Gamma(y), \quad (2.9)$$

- $U_i(x, \xi)$ - deplasările termoelastice;
- $G_T(x, \xi), G_i(x, \xi), G_{\Theta}(x, \xi)$ - FG în dependență de CL pentru U_i și $\partial U_i / \partial n_{\Gamma}$.

Dacă: $U_i = 0 \Rightarrow G_i = 0; \partial U_i / \partial n_{\Gamma} = 0 \Rightarrow \partial G_i / \partial n_{\Gamma} = 0;$

- $\Theta(x, \xi)$ - dilatarea de volum elastică.

Dacă: $\Theta = 0 \Rightarrow G_{\Theta} = 0; \partial \Theta / \partial n_{\Gamma} = 0 \Rightarrow \partial G_{\Theta} / \partial n_{\Gamma} = 0.$

Rezolvarea unei PL 2D este inclusă în lucrarea [60].

2.1. Funcții de influență și soluții integrale termoelastice pentru fâșie

La determinarea FPTG și a soluțiilor integrale este necesar mai întâi de construit FGEP a aceluiași domeniu pentru care se dorește să fie obținute aceste soluții.

2.1.1. Funcția Green a ecuației Poisson pentru fâșie

Formularea generală a problemei.

Să se construiască FG $G(x, \xi)$ pentru o PL de două dimensiuni a unui domeniu sub formă de fâșie $V \equiv (-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$, $x \equiv (x_1, x_2) \in V$, $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \in V$ [3], cu conturul $\Gamma \equiv \Gamma_{20} \cup \Gamma_{21}$, (Figura 2.1) care verifică ecuația Poisson:

$$\nabla^2 G(x, \xi) = -\delta(x - \xi), \quad (2.10)$$

cu CL de tip Neumann:

$$\begin{aligned} - \text{pentru latura } \Gamma_{20} (-\infty < x_1 < +\infty; x_2 = 0) &\rightarrow \partial G(x_1, 0; \xi) / \partial x_2 = 0, \\ - \text{pentru latura } \Gamma_{21} (-\infty < x_1 < +\infty; x_2 = a_2) &\rightarrow \partial G(x_1, a_2; \xi) / \partial x_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

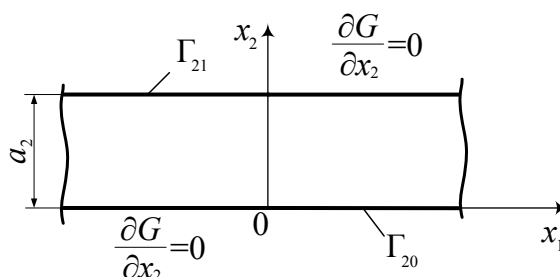


Fig. 2.1. Schema unei fâșii V cu condiții de limită de tip Neumann.

Determinarea funcției Green pentru fâșia V cu condițiile de limită de tip Neumann.

Metodologia de construire a FGEP este prezentată în sursele [10, p. 36], [11, p. 27], [50, p. 302], [58, p. 144]. Conform acestor referințe, construirea FGEP în fâșia V care este o problemă 2D, se reduce la construirea FG de o dimensiune. Ulterior la construirea FG pentru ecuații ordinare se folosește algoritmul prezentat [10, p. 22], [11, p. 9], [50, p. 30].

Pentru rezolvarea problemei conform acestei metode, trebuie de menționat că se va utiliza separarea variabilelor.

Această problemă este pentru domenii nelimitate, de aceea FG $G(x, \xi)$ trebuie să ia o valoare finită la infinit:

$$G(x, \xi)|_{x_1=\pm\infty} < \infty. \quad (2.12)$$

FG poate fi scrisă în serii trigonometrice Fourier infinite în următoarea formă:

$$G = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \nu_1 x_2 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos \nu_1 x_2, \quad (2.13)$$

unde coeficienții a_0, a_m, b_m sunt funcții de variabila x_1 .

Conform CL (2.11) și (2.12) rezultă următoarele:

$$\nu_1 = m\pi/a_2; m = 1, 2, 3... \Rightarrow a_m = 0. \quad (2.14)$$

Astfel seriile trigonometrice din relația (2.13) se reduc la următoarea formă:

$$G = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos \nu_1 x_2. \quad (2.15)$$

Se substituie relația pentru FG (2.15) în ecuația Poisson (2.10) și se obține o ecuație diferențială:

$$G = a_0'' + \sum_{m=1}^{\infty} (b_m'' - \nu_1^2 b_m) \cos \nu_1 x_2 = -\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2), \quad (2.16)$$

unde se are în vedere că în metoda separării variabilelor funcția lui Dirac se scrie în forma următoare: $\delta(x - \xi) = \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2)$.

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale (2.16) se înmulțesc ambele părți ale ecuației la $\cos \nu_2 x_2$, unde: $\nu_2 = s\pi/a_2; s = 1, 2, 3...$

Ulterior se calculează integralele pentru relațiile obținute în raport cu variabila x_2 :

$$\int_0^{a_2} \cos \nu_1 x_2 \cos \nu_2 x_2 dx_2 = \begin{cases} 0; \nu_1 \neq \nu_2, s \neq m; \\ a_2/2; \nu_1 = \nu_2, s = m. \end{cases} \quad (2.17)$$

Dacă se ia în considerație următoarea proprietate a funcției Dirac [7, p. 384]:

$$\int_V \delta(x - \xi) dV(x) = f(\xi), \quad (2.18)$$

atunci următoarea integrală poate fi scrisă astfel:

$$\int_0^{a_2} \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \cos \nu_2 x_2 dx_2 = \delta(x_1 - \xi_1) \cos \nu_1 \xi_2. \quad (2.19)$$

Se înlocuiesc relațiile (2.19) și (2.17) în ecuația diferențială (2.16) și se obține:

$$b + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_2}{2} (b_m'' - \nu_1^2 b_m) = -\delta(x_1 - \xi_1) \cos \nu_1 \xi_2, \quad (2.20)$$

unde b este o constantă.

Se rezolvă ecuația diferențială (2.20) folosind metodologia prezentată în [10, p. 38], [11, p. 28], [50, p. 303], iar rezultatul se substituie în expresia (2.15). În final se obține FG $G(x, \xi)$ pentru PL sub formă de serii infinite cu o exactitate de o constantă arbitrară b :

$$G = b + \begin{cases} G_s(x, \xi) = \frac{1}{a_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_1} e^{\nu_1(x_1 - \xi_1)} \cos \nu_1 x_2 \cos \nu_1 \xi_2; & x_1 \leq \xi_1; \\ G_d(x, \xi) = \frac{1}{a_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_1} e^{-\nu_1(x_1 - \xi_1)} \cos \nu_1 x_2 \cos \nu_1 \xi_2; & x_1 \geq \xi_1. \end{cases} \quad (2.21)$$

Relațiile (2.21) reprezintă expresiile pentru FG din partea stângă $x_1 \leq \xi_1$ a punctului de aplicare a impulsului unitar și respectiv din partea dreaptă $x_1 \geq \xi_1$ a acestui punct. Aceste serii pot fi prezentate și în funcții elementare datorită următoarei egalități [78, p. 55]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^m}{m} \cos(\alpha m) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2p \cos \alpha + p^2); p^2 \leq 1; 0 < \alpha < 2\pi. \quad (2.22)$$

Pentru a putea transforma seriile infinite (2.21) în funcții elementare s-a utilizat și următoarea formulă trigonometrică:

$$\cos \nu_1 x_2 \cos \nu_1 \xi_2 = 1/2 [\cos \nu_1 (x_2 - \xi_2) + \cos \nu_1 (\xi_2 + \xi_2)]. \quad (2.23)$$

$$G = b + \begin{cases} G_s(x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi} e^{\frac{m\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)} \frac{1}{2} \left[\cos \frac{m\pi}{a_2} (x_2 - \xi_2) + \cos \frac{m\pi}{a_2} (\xi_2 + \xi_2) \right]; & x_1 \leq \xi_1; \\ G_d(x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi} e^{-\frac{m\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)} \frac{1}{2} \left[\cos \frac{m\pi}{a_2} (x_2 - \xi_2) + \cos \frac{m\pi}{a_2} (\xi_2 + \xi_2) \right]; & x_1 \geq \xi_1. \end{cases} \quad (2.24)$$

Expresia finală a FGEP în funcții elementare are forma:

$$G = b - \frac{1}{4\pi} \ln EE_2 + \begin{cases} 0; & x_1 \leq \xi_1; \\ \frac{(x_1 - \xi_1)}{a_2}; & x_1 \geq \xi_1, \end{cases} \quad (2.25)$$

unde funcțiile E și E_2 se determină din următoarele relații:

$$\begin{aligned} E &= 1 - 2e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)} \cos \frac{\pi}{a_2}(x_2 - \xi_2) + e^{\frac{2\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)}; \\ E_2 &= 1 - 2e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)} \cos \frac{\pi}{a_2}(x_2 + \xi_2) + e^{\frac{2\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

FGEP pentru fâșie cu CL de tip Neumann mai poate fi reprezentată și sub o altă formă finală:

$$G = b - \frac{1}{4\pi} \ln E^* E_2^*, \quad (2.27)$$

unde funcțiile E^* și E_2^* se obțin folosind următoarele expresii:

$$\begin{aligned} E^* &= 1 - 2e^{-\frac{\pi}{a_2}|x_1 - \xi_1|} \cos \frac{\pi}{a_2}(x_2 - \xi_2) + e^{-\frac{2\pi}{a_2}|x_1 - \xi_1|}; \\ E_2^* &= 1 - 2e^{-\frac{\pi}{a_2}|x_1 - \xi_1|} \cos \frac{\pi}{a_2}(x_2 + \xi_2) + e^{-\frac{2\pi}{a_2}|x_1 - \xi_1|}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

În continuare, în prezenta teză s-a folosit expresia FGEP pentru fâșie cu CL de tip Neumann, scrisă sub forma (2.25) și (2.26).

Construirea graficului funcției Green în fâșia V cu condițiile de limită de tip Neumann.

S-a folosit programa Maple 18 și s-a construit graficul FG (2.25) cu o exactitate de o constantă arbitrară $b = 0$, pentru fâșia V cu intervalul $-c \leq x_1 \leq +c$, $c = 15m$, $0 \leq x_2 \leq a_2$, $a_2 = 10m$, dacă pe laturile $x_2 = 0$, și $x_2 = a_2$, $\partial G / (\partial x_2) = 0$. Punctul de aplicare a impulsului unitar are coordonatele $\xi_1 = 0m$, $\xi_2 = 5m$. Acest grafic este prezentat în Figura 2.2.

Concluzii:

- Graficele din Figura 2.2 reprezintă aceeași funcție prezentată din diferite părți. Dacă se analizează acest grafic, se poate afirma:
 - se respectă CL impuse inițial, cum se vede din Figura 2.2, a), $\partial G / (\partial x_2) = 0$ pentru $x_2 = 0$, și din Figura 2.2, b), $\partial G / (\partial x_2) = 0$ pentru $x_2 = a_2$. Dacă variabila $x_1 \rightarrow \pm\infty$, atunci $G = 0$;
 - dacă punctul de aplicare a impulsului unitar cu coordonatele (ξ_1, ξ_2) va coincide cu punctul de răspuns cu coordonatele (x_1, x_2) , atunci funcția $G \rightarrow \infty$ în comparație cu celelalte mărimi. Aceasta se datorează expresiei $-\ln E$ din relația FG (2.25), și anume: dacă x va

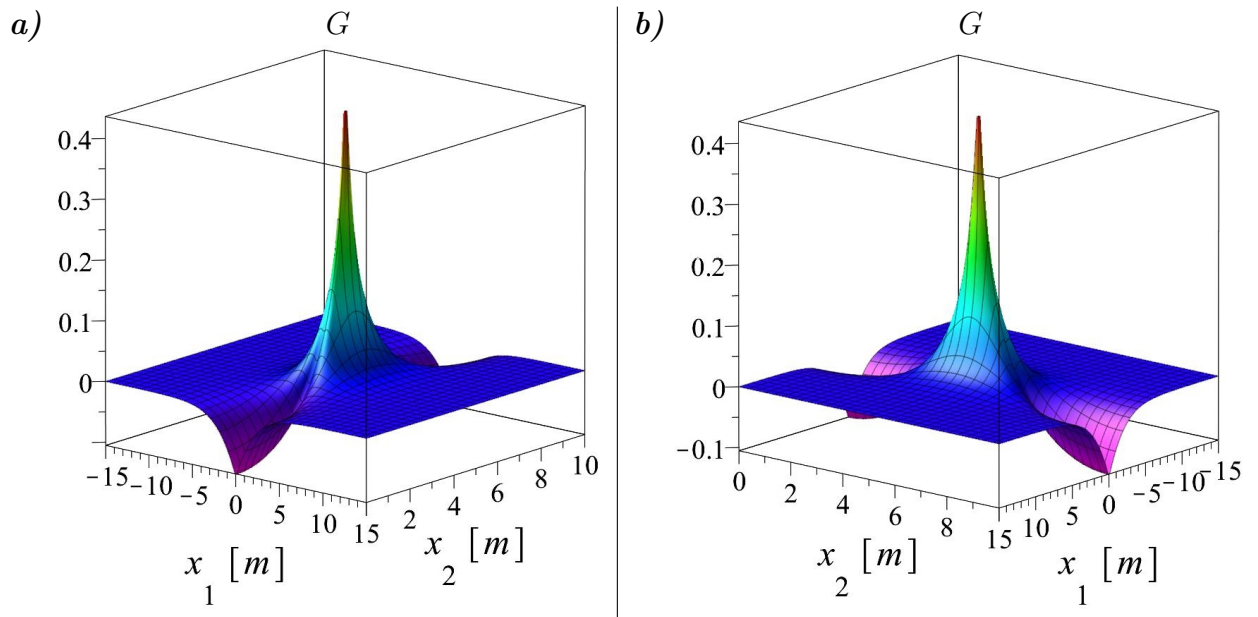


Fig. 2.2. Graficul funcției Green pentru fâșia $V(-15 \leq x_1 \leq 15, 0 \leq x_2 \leq 10)$ cu condițiile de limită de tip Neumann de la un impuls unitar aplicat în punctul $\xi_1 = 0m, \xi_2 = 5m$.

coincide cu ξ atunci $-\ln E = \infty$. Acest punct poartă denumirea de punct de singularitate;

- pentru latura $x_2 = 0$ și pentru $x_2 = a_2$ FG, practic are valoarea $G = 0$ pentru intervalul $+5, 0m \leq x_1 \leq -5, 0m$;
- graficul este simetric în raport cu planul care trece prin punctul $\xi_1 = 0m$ și respectiv planul care trece prin punctul $\xi_2 = 5m$;
- expresia FG (2.25) poate fi folosită în conductibilitatea termică staționară pentru determinarea câmpului interior de temperatură pentru fâșia V , în cazul în care, în interiorul fâșiei este aplicată o sursă de căldură sau pe diferite intervale ale laturilor fâșiei fluxul de căldură este diferit de zero. De asemenea ea se va utiliza la calcularea deplasărilor și tensiunilor termice pentru fâșia V .

2.1.2. Determinarea câmpului de temperatură în fâșie cu condiții de limită de tip Dirichlet

Formularea generală a problemei.

Să se determine câmpul interior de temperatură pentru fâșia $V \equiv (-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$, (Figura 2.3), dacă pe latura $x_2 = 0$ este aplicat un gradient de temperatură $T_{20}(y_1, 0) = const$, iar pe latura $x_2 = a_2$ un gradient de temperatură $T_{21}(y_1, a_2) = const$ [4].

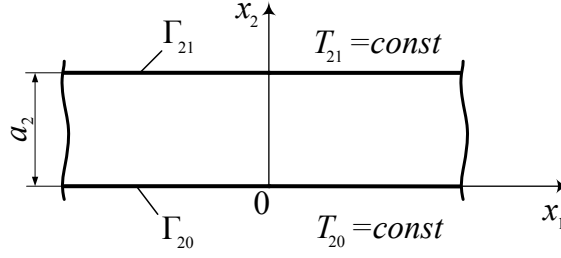


Fig. 2.3. Schema unei fâșii V acționată de un gradient de temperatură pe fiecare latură.

Determinarea câmpului interior de temperatură.

Pentru rezolvarea acestei probleme se folosește următoarea formulă integrală generală pentru domenii tridimensionale [86, p. 382]:

$$\begin{aligned}
 T(x) = a^{-1} \int_V F(\xi)G(x, \xi)dV(\xi) - \int_{\Gamma_D} T(y_0) \frac{\partial G(y_0, x)}{\partial n_0} d\Gamma_D(y_0) + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial T(y_0)}{\partial n_0} G(y_0, x) d\Gamma_N(y_0) \\
 + a^{-1} \int_{\Gamma_M} \left[\alpha T(y_0) + a \frac{\partial T(y_0)}{\partial n_0} \right] G(y_0, x) d\Gamma_M(y_0), \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

unde: a - coeficientul conductivității de temperatură, α - coeficientul conductibilității convective de căldură, $F(\xi)$ - sursa interioară de căldură, $T(y_0)$ - temperatura dată pe o suprafață Γ_D , $\partial T(y_0)/(\partial n_0)$ - fluxul de căldură dat pe o suprafață Γ_N , iar $[\alpha T(y_0) + a \partial T(y_0)/(\partial n_0)]$ este schimbul de căldură dintre suprafața Γ_M și mediul exterior, $G(y_0, x)$ - FG, iar $\partial G(y_0, x)/(\partial n_0)$ - derivata FG pe normala exterioră a suprafeței Γ corpului V . $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_M$ sunt părți componente ale suprafeței pe care sunt date CL pe fiecare suprafață a corpului, de tip Dirichlet, de tip Neumann și respectiv CL de tip mixt.

CL pentru fâșia V (Figura 2.3) sunt de tip Dirichlet (Γ_D), iar sursa interioară de căldură, fluxul de căldură și schimbul de căldură dintre suprafața corpului și mediul exterior lipsesc.

Conform formulării problemei, expresia (2.29) se va scrie în felul următor:

$$T(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} T(y_1, 0) Q_{20}(y_1, x_1; 0, x_2) dy_1 - \int_{-\infty}^{+\infty} T(y_1, a_2) Q_{21}(y_1, x_1; a_2, x_2) dy_1, \quad (2.30)$$

unde:

$$\begin{aligned}
 Q_{20}(y_1, x_1; 0, x_2) &= - \frac{\partial G(y_1, x_1; 0, x_2)}{\partial y_2} = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y_2} (\ln E_2 - \ln E) \Big|_{y_2=0}; \\
 Q_{21}(y_1, x_1; a_2, x_2) &= \frac{\partial G(y_1, x_1; a_2, x_2)}{\partial y_2} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y_2} (\ln E_2 - \ln E) \Big|_{y_2=a_2}.
 \end{aligned} \quad (2.31)$$

În (2.31) s-a avut în vedere schimbarea semnului pentru prima expresie, deoarece direcția normalei pe suprafața $x_2 = 0$ este contrară direcției axei de coordonate x_2 . Tot din aceeași relație se observă că, pentru a determina câmpul interior de temperatură este necesar de a construi FG care verifică ecuația Poisson pentru fâșia V .

Funcția Green pentru fâșia V cu condiții de limită de tip Dirichlet.

Să se determine FG care verifică ecuația Poisson (2.10) pentru un domeniu în formă de fâșia V , cu următoarele CL de tip Dirichlet:

$$\begin{aligned} & - \text{pentru latura } \Gamma_{20}(-\infty < x_1 < +\infty; x_2 = 0) \rightarrow G(x_1, 0; \xi) = 0; \\ & - \text{pentru latura } \Gamma_{21}(-\infty < x_1 < +\infty; x_2 = a_2) \rightarrow G(x_1, a_2; \xi) = 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Conform [58, p. 17], răspunsul la problema 4.1 se dă cu expresia finală a FG în funcții elementare sub formă:

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{E_2}{E}, \tag{2.33}$$

unde funcțiile E și E_2 se determină cu relațiile (2.26).

Construirea graficului funcției Green în fâșia V cu condiții de limită de tip Dirichlet.

Folosind programa Maple 18 s-a construit graficul FG (2.33) pentru fâșia V cu intervalul $-c \leq x_1 \leq +c, c = 15m, 0 \leq x_2 \leq a_2, a_2 = 10m$, dacă pe latura $x_2 = 0$ și $x_2 = a_2, G = 0$. Punctul de aplicare a impulsului unitar are coordonatele $\xi_1 = 0m, \xi_2 = 5m$. Acest grafic este prezentat în Figura 2.4.

Concluzii:

- Graficele din Figura 2.4 reprezintă aceeași funcție arătată din diferite părți. Dacă se analizează, se poate afirma:
 - dacă punctul de aplicare cu coordonatele (ξ_1, ξ_2) va coincide cu punctul de răspuns cu coordonatele (x_1, x_2) , atunci funcția $G \rightarrow \infty$ în comparație cu celelalte mărimi. Aceasta se datorează expresiei $\ln E$ din relația (2.33), dacă x coincide cu ξ atunci $-\ln E = \infty$;
 - se respectă CL impuse inițial, cum se vede din Figura 2.4, a), $G = 0$ pentru $x_2 = 0$, și din Figura 2.4, b), $G = 0$ pentru $x_2 = a_2$. Dacă variabila $x_1 \rightarrow \pm\infty$ atunci $G = 0$;
 - graficul este simetric în raport cu planul care trece prin punctul $\xi_1 = 0m$ și respectiv în raport cu planul care trece prin punctul $\xi_2 = 5m$.

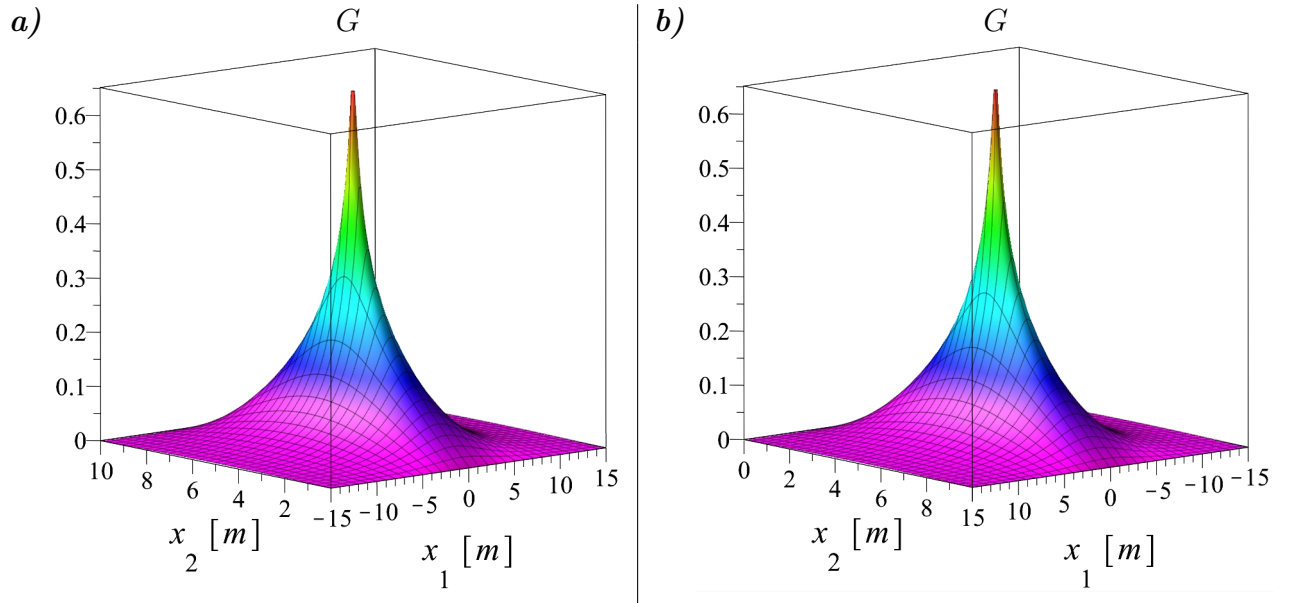


Fig. 2.4. Graficul funcției Green pentru fâșia $V(-15 \leq x_1 \leq 15, 0 \leq x_2 \leq 10)$ cu condițiile de limită de tip Dirichlet de la un impuls unitar aplicat în punctul $\xi_1 = 0m, \xi_2 = 5m$.

- expresia FG (2.33) poate fi folosită în conductibilitatea termică staționară pentru determinarea câmpului interior de temperatură pentru fâșia V , în cazul în care, în interiorul fâșiei este aplicată o sursă de căldură sau pe diferite intervale ale laturilor fâșiei, gradientul de temperatură este diferit de zero. Această funcție se va utiliza la calcularea deplasărilor și tensiunilor termice pentru fâșia V .

Aplicarea funcției Green la determinarea câmpului interior de temperatură.

S-a determinat câmpul interior de temperatură pentru fâșia V , dacă pe latura $x_2 = 0$, pe intervalul $c \leq x_1 \leq d$ acționează un gradient de temperatură $T_{20} = const$, iar pe latura $x_2 = a_2$, pe intervalul $f \leq x_1 \leq g$ un gradient de temperatură $T_{21} = const$.

Expresia de calcul a câmpului de temperatură are forma:

$$T(x_1, x_2) = \int_c^d T(y_1, 0) Q_{20}(y_1, x_1; 0, x_2) dy_1 - \int_f^g T(y_1, a_2) Q_{21}(y_1, x_1; a_2, x_2) dy_1, \quad (2.34)$$

unde:

Q_{20} și Q_{21} se calculează cu relația (2.31).

S-a derivat FG (2.33) pe normala exterioară a laturilor $x_2 = 0$ și $x_2 = a_2$ scrise în relația (2.31) și s-au substituit în expresia (2.34). În urma simplificării termenilor asemenea, s-a obținut următoarea formulă integrală:

$$\begin{aligned}
T(x_1, x_2) = & \int_c^d T_{20} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \sin \frac{\pi x_2}{a_2}}{a_2 \left(1 - 2e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \cos \frac{\pi x_2}{a_2} + e^{\frac{2\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \right)} dy_1 \\
& + \int_f^g T_{21} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \sin \frac{\pi x_2}{a_2}}{a_2 \left(1 + 2e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \cos \frac{\pi x_2}{a_2} + e^{\frac{2\pi}{a_2}(y_1-x_1)} \right)} dy_1. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Pentru a rezolva expresia (2.35) s-a făcut următoarea notare:

$$T(x_1, x_2) = T_1(x_1, x_2) + T_2(x_1, x_2). \tag{2.36}$$

S-a rezolvat $T_1(x_1, x_2)$. Pentru aceasta s-a folosit [73, p. 965], s-au făcut următoarele notări: $t^2 = e^{2\pi/a_2(y_1-x_1)}$, iar $m = -2\cos(\pi x_2/a_2)$ și s-a obținut integrala:

$$T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \sin \frac{\pi x_2}{a_2} \int_c^d \frac{dt}{1 + mt + t^2}. \tag{2.37}$$

Înlocuind notările făcute, și rezolvând integrala (2.37), s-a obținut următoarea expresie:

$$T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1-x_1)} - \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} \Bigg|_c^d. \tag{2.38}$$

Rezultatul final al integrării este:

$$T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(d-x_1)} - \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} - \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(c-x_1)} - \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} \right]. \tag{2.39}$$

În mod analogic s-a rezolvat și $T_2(x_1, x_2)$. Rezultatul final a acestei integrale are forma:

$$T_2(x_1, x_2) = \frac{T_{21}}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(g-x_1)} + \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} - \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(f-x_1)} + \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} \right]. \tag{2.40}$$

În formă finală, câmpul interior de temperatură se va calcula cu următoarea expresie:

$$T(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(d-x_1)} - \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} - \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(c-x_1)} - \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} \right] + \frac{T_{21}}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(g-x_1)} + \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} - \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(f-x_1)} + \cos \frac{\pi x_2}{a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{a_2}} \right]. \quad (2.41)$$

Construirea graficului câmpului interior de temperatură în fâșia V cu condițiile de limită de tip Dirichlet.

S-a folosit programa Maple 18 și s-a construit graficul câmpului interior de temperatură (2.41), pentru fâșia V , cu intervalul $-b \leq x_1 \leq +b, b = 15m, 0 \leq x_2 \leq a_2, a_2 = 10m$, dacă pe latura $x_2 = 0$, pe intervalul $c \leq x_1 \leq d, c = -7m, d = 1m$ acționează un gradient de temperatură $T_{20} = 80K$. Pe latura $x_2 = a_2$, pe intervalul $f \leq x_1 \leq g, f = -2m, g = 5m$ acționează un gradient de temperatură $T_{21} = 100K$. Acest grafic este prezentat în Figura 2.5.

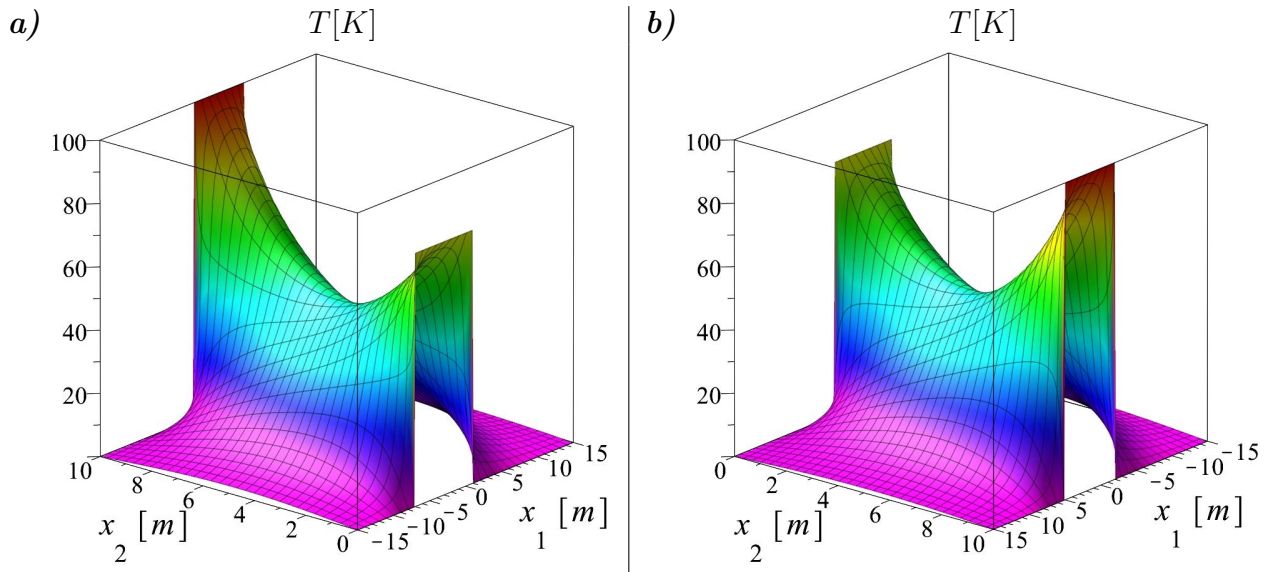


Fig. 2.5. Graficul câmpului interior de temperatură pentru fâșia V ($-15 \leq x_1 \leq 15, 0 \leq x_2 \leq 10$) dacă pe ambele laturi acționează câte un gradient de temperatură T_{20} și T_{21} .

Graficele din Figura 2.5 reprezintă câmpul interior de temperatură pentru fâșia V arătat din diferite părți. Analizând aceste grafice se poate afirma:

- programa nu a construit graficul în imediata apropiere a ordonatei $x_2 = 0$, din motiv că funcția nu este definită în acest punct. Se studiază asimptotica acestei funcții pentru a

verifica CL. Pentru aceasta s-a calculat limita funcției $T_1(x_1, x_2)$ când $x_2 \rightarrow 0$ din partea dreaptă, pe intervalul $c < x_1 < d$ și în afara acestui interval $d < x_1 < c$.

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T_1(x_1, x_2). \quad (2.42)$$

Se calculează limita funcției pentru intervalul $c < x_1 < d$ când $x_2 \rightarrow 0$ din partea dreaptă:

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \left(\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \arctg \infty + \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \arctg \infty \right) = \frac{T_{20}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = T_{20}. \quad (2.43)$$

Se calculează limita funcției pentru intervalul $d < x_1 < c$ când $x_2 \rightarrow 0$ din partea dreaptă:

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} T_1(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \left(\lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \arctg \infty - \lim_{x_2 \rightarrow 0+0} \arctg \infty \right) = \frac{T_{20}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (2.44)$$

- programa nu a construit graficul nici în imediata apropiere a ordonatei $x_2 = a_2$, din motiv că funcția nu este definită nici în acest punct. Se studiază asimptotica acestei funcții pentru a verifica CL. Pentru aceasta s-a calculat limita funcției $T_2(x_1, x_2)$ când $x_2 \rightarrow a_2$ din partea stângă, pe intervalul $f < x_1 < g$ și în afara acestui interval $g < x_1 < f$.

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} T_2(x_1, x_2). \quad (2.45)$$

Se calculează limita funcției pentru intervalul $f < x_1 < g$ când $x_2 \rightarrow a_2$ din partea stângă:

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} T_2(x_1, x_2) = \frac{T_{21}}{\pi} \left(\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} \arctg \infty + \lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} \arctg \infty \right) = \frac{T_{21}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = T_{21}. \quad (2.46)$$

Se calculează limita funcției pentru intervalul $g < x_1 < f$ când $x_2 \rightarrow a_2$ din partea stângă:

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} T_2(x_1, x_2) = \frac{T_{21}}{\pi} \left(\lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} \arctg \infty - \lim_{x_2 \rightarrow a_2-0} \arctg \infty \right) = \frac{T_{21}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (2.47)$$

- se respectă CL impuse iniția și anume: pentru latura $x_2 = 0$ (Figura 2.5, a) și (2.43)), $T_1(x_1, x_2) = T_{20} = 80K$ pentru $c < x_1 < d$, iar din (2.44), $T_1(x_1, x_2) = 0$ pentru intervalul $d < x_1 < c$. Pentru latura $x_2 = a_2$, (Figura 2.5, b) și (2.46)), $T_2(x_1, x_2) = T_{21} = 100K$ pentru $f < x_1 < g$, iar din (2.47), $T_2(x_1, x_2) = 0$ pentru intervalul $g < x_1 < f$. Dacă variabila $x_1 \rightarrow \pm\infty$ atunci $T = 0$;

- deoarece gradientii de temperatură T_{20} și T_{21} sunt aplicați pe diferite intervale ale laturilor fâșiei, graficul funcției este asimetric. Dacă s-ar fi construit graficul de la un singur gradient sau de la ambii gradienti aplicați pe același interval, dar pe laturi diferite, atunci el ar fi fost simetric în raport cu planul care trece prin mijlocul intervalului.

Concluzii:

- Se respectă CL impuse inițial. În limita gradientului de temperatură acesta este maximal, iar în afara acestui interval, temperatura este zero;
- Relația câmpului de temperatură (2.41) poate fi folosită pentru determinarea câmpului de temperatură pentru fâșie, cu orice dimensiune și valoare a gradientului de temperatură care acționează pe orice interval ale laturile $x_2 = 0$ și/sau $x_2 = a_2$. Dacă temperatura nu va fi o constantă ci o funcție, atunci va fi necesar să fie calculată din nou integrala (2.34);
- Câmpul interior de temperatură deja obținut poate fi folosit în domeniul termoelasticității la determinarea deplasărilor și tensiunilor termice în fâșia V cu CL enunțate în problemă.

2.1.3. Determinarea câmpului de temperatură în fâșie cu condiții de limită de tip mixt

Formularea generală a problemei.

Să se determine câmpul interior de temperatură pentru fâșia $V \equiv (-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$, (Figura 2.6), cu condiții mixte de limită, dacă pe latura $\Gamma_{20}(x_2 = 0)$ este aplicat un gradient de temperatură $T_{20}(y_1, 0) = const.$, iar pe latura $\Gamma_{21}(x_2 = a_2)$ fluxul de căldură $\frac{T_{21}(y_1, a_2)}{\partial n_y} = 0$ [5].

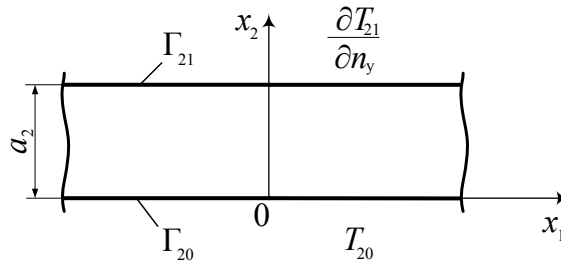


Fig. 2.6. Schema fâșiei V cu condiții mixte de limită.

Rezolvarea problemei formulate se face analog metodologiei folosite pentru problema precedentă (§2.1.2.). De aceea, vor fi expuse doar cele mai importante momente cu rezultatele finale.

Funcția Green pentru fâșia V cu condiții de limită de tip mixt.

Expresia FG în funcții elementare pentru acest tip de problemă este rezolvată în literatura de specialitate [50, p. 112], [58, p. 18] și are următoarea formă:

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\bar{E}\tilde{E}_2}{\tilde{E}_2\bar{E}}, \quad (2.48)$$

unde:

$$\begin{aligned}
 \bar{E} &= 1 + 2e^{\frac{\pi}{2a_2}(x_1-\xi_1)} \cos \frac{\pi}{2a_2}(x_2 - \xi_2) + e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1-\xi_1)} ; \\
 \tilde{E} &= 1 - 2e^{\frac{\pi}{2a_2}(x_1-\xi_1)} \cos \frac{\pi}{2a_2}(x_2 - \xi_2) + e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1-\xi_1)} ; \\
 \bar{E}_2 &= 1 + 2e^{\frac{\pi}{2a_2}(x_1-\xi_1)} \cos \frac{\pi}{2a_2}(x_2 + \xi_2) + e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1-\xi_1)} ; \\
 \tilde{E}_2 &= 1 - 2e^{\frac{\pi}{2a_2}(x_1-\xi_1)} \cos \frac{\pi}{2a_2}(x_2 + \xi_2) + e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1-\xi_1)} .
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Construirea graficului FG în fâșia V cu condiții de limită de tip mixt.

Folosind programa Maple 18 s-a construit graficul funcției Green (2.48) pentru fâșia V cu intervalul $-c \leq x_1 \leq +c, c = 15m, 0 \leq x_2 \leq a_2, a_2 = 10m$, dacă pe latura $x_2 = 0; G = 0$, iar pe latura $x_2 = a_2, \partial G / \partial n_y = 0$. punctul de aplicare a impulsului unitar are coordonatele $\xi_1 = 0m, \xi_2 = 3m$. Acest grafic este prezentat în Figura 2.7.

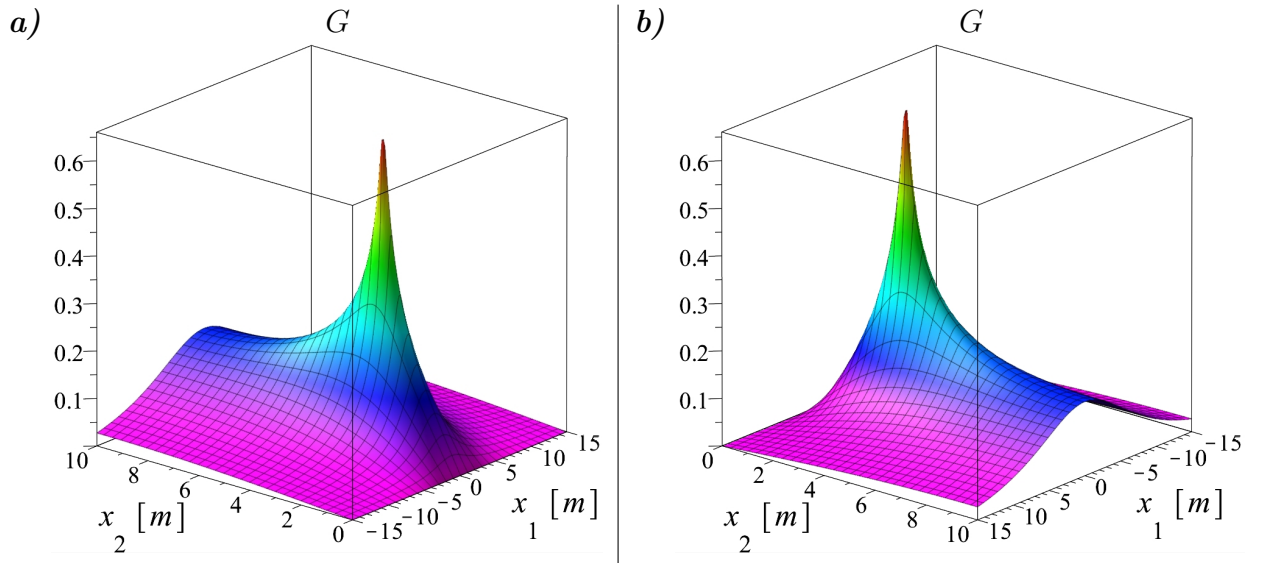


Fig. 2.7. Graficul funcției Green pentru fâșia $V(-15 \leq x_1 \leq 15, 0 \leq x_2 \leq 10)$ cu condiții mixte de limită de la un impuls unitar aplicat în punctul $\xi_1 = 0m, \xi_2 = 3m$.

Aplicarea funcției Green la determinarea câmpului interior de temperatură.

În formă finală, câmpul interior de temperatură pentru fâșie cu CL de tip mixt, se calculează cu următoarea expresie:

$$T(x_1, x_2) = \frac{T_{20}}{\pi} \left[\arctan \frac{e^{\frac{\pi}{2a_2}(c-x_1)} + \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} - \arctan \frac{e^{\frac{-\pi}{2a_2}(c+x_1)} + \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} \right] \tag{2.50}$$

$$+ \arctan \frac{e^{\frac{\pi}{2a_2}(c-x_1)} + \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} - \arctan \frac{e^{\frac{\pi}{2a_2}(c+x_1)} - \cos \frac{\pi x_2}{2a_2}}{\sin \frac{\pi x_2}{2a_2}} \Bigg].$$

Construirea graficului câmpului interior de temperatură în fâșia V cu condiții de limită de tip mixt.

S-a folosit programa Maple 18 și s-a construit graficul câmpului interior de temperatură pentru fâșia V cu relația (2.50), dacă pe latura $x_2 = 0$ pe intervalul $-c \leq x_1 \leq c, c = 4$, acționează un gradient de temperatură $T_{20} = 120K$, iar pe latura $x_2 = a_2$ fluxul de căldură $\frac{T_{21}(y_1, a_2)}{\partial n_y} = 0$. Acest grafic este prezentat în Figura 2.8.

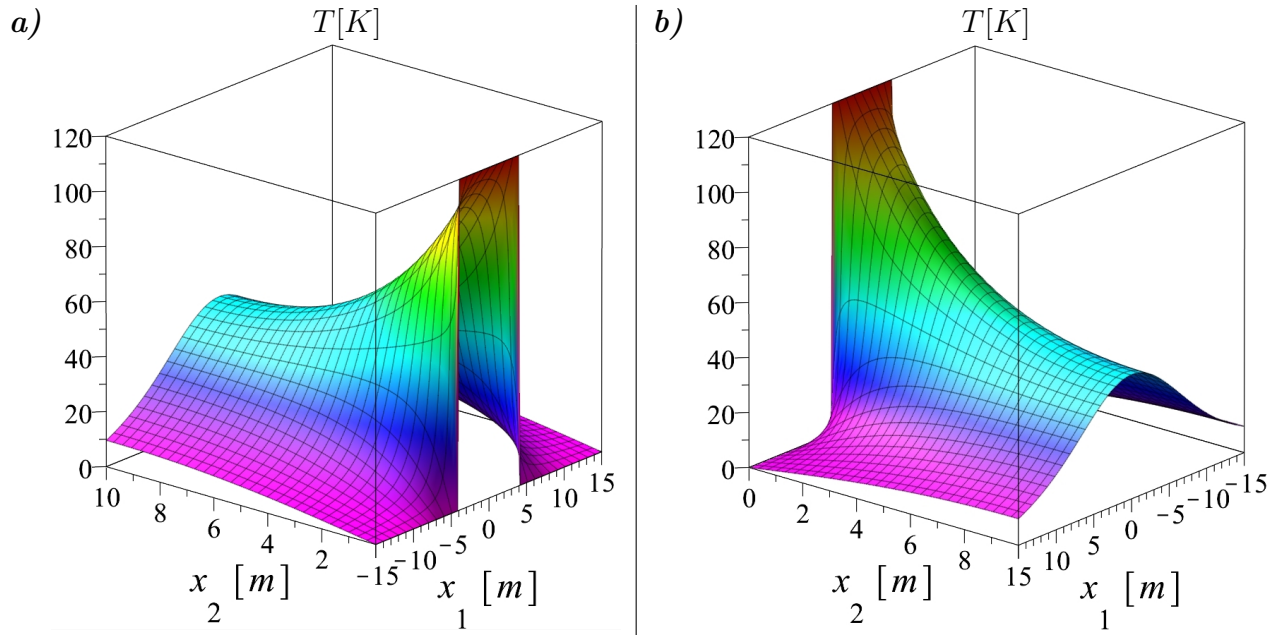


Fig. 2.8. Graficul câmpului interior de temperatură pentru fâșia $V(-15 \leq x_1 \leq 15, 0 \leq x_2 \leq 10)$ dacă pe latura Γ_{20} acționează un gradient de temperatură $T_{20} = 120K$.

Concluzii:

- Se respectă CL impuse inițial. Pe latura Γ_{20} în limita gradientului de temperatură funcția este maximală, iar în afara acestui interval, temperatura este zero. Pe latura Γ_{21} derivata funcției este egală cu zero;
- Relația câmpului interior de temperatură (2.50) poate fi folosită pentru determinarea câmpului de temperatură pentru fâșie cu orice dimensiune și valoare a gradientului de temperatură, care acționează pe orice interval a laturii $x_2 = 0$;
- Câmpul interior de temperatură deja obținut poate fi folosit în domeniul termoelasticității, la determinarea deplasărilor și tensiunilor termice în fâșia V , cu CL enunțate în problemă.

2.1.4. Soluții integrale pentru fâșia termoelastică cu condițiile de limită de tip Dirichlet

Formularea generală a problemei.

Să se determine tensiunile termice $\sigma_{ij}(\xi)$; $i, j = 1, 2$ pentru o problemă particulară de limită sub formă de fâșia $V \equiv (-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$, de la acțiunea unor gradienti de temperatură aplicați pe ambele laturi ale domeniului Γ_{20} și Γ_{21} :

$$T(y) = \begin{cases} T_{20}(y) = T_{20} = const., y \in [b \leq y_1 \leq c; y_2 = 0]; y \in \Gamma_{20}; b < c; \\ T_{20}(y) = 0, y \in [-\infty \leq y_1 < b; y_2 = 0] \cup [c < y_1 < \infty; y_2 = 0]; y \in \Gamma_{20}; \\ T_{21}(y) = T_{21} = const., y \in [f \leq y_1 \leq g; y_2 = a_2]; y \in \Gamma_{21}; f < g; \\ T_{21}(y) = 0, y \in [-\infty \leq y_1 < f; y_2 = a_2] \cup [g < y_1 < \infty; y_2 = a_2]; y \in \Gamma_{21}. \end{cases} \quad (2.51)$$

cu următoarele condiții mecanice:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = 0; u_1 = 0; \xi_2 = 0, 0 \leq \xi_1 < \infty; \\ \sigma_{22} = 0; u_1 = 0; \xi_2 = a_2, 0 \leq \xi_1 < \infty. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Condițiile termice (2.51) și cele mecanice (2.52) sunt prezentate în Figura 2.9.

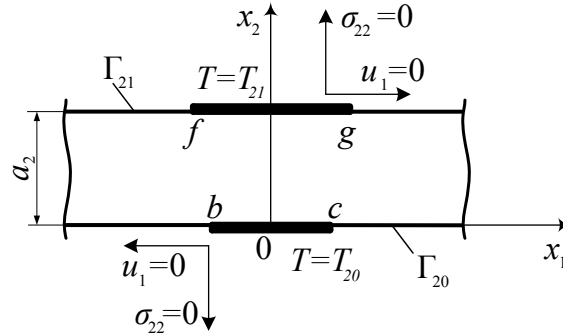


Fig. 2.9. Schema fâșiei V cu condițiile de limită mecanice u_1, σ_{22} și cele termice T de pe laturile Γ_{20} și Γ_{21} .

Conform relației (2.5), pentru a rezolva problema enunțată mai sus și a determina tensiunile termice $\sigma_{ij}(\xi)$, înainte de toate, trebuie să fie determinate tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$; $i, j = 1, 2$ de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură (2.3), dar pentru aceasta este necesar de stabilit după formulele (2.7) - (2.9), expresiile deplasărilor termice $U_i(x, \xi)$; $i = 1, 2$ de la o sursă unitară punctiformă de căldură.

Determinarea deplasărilor termoelastice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură. Formularea problemei.

Să se determine FPTG de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură pentru fâșia $V \equiv (-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$ cu condițiile mecanice și termice de limită indicate în Figura 2.10.

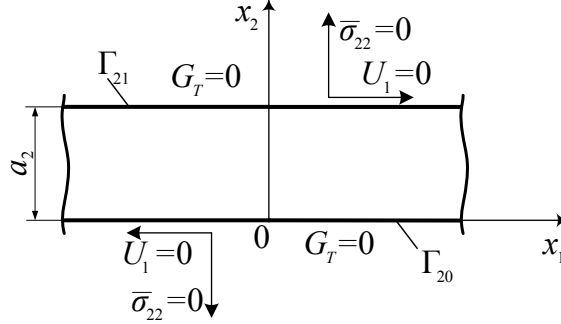


Fig. 2.10. Schema unei fâșii V cu condițiile de limită mecanice $U_1, \bar{\sigma}_{22}$ și cele termice G_T de pe laturile Γ_{20} și Γ_{21} .

Pentru aceasta se va rezolva ecuația Lamé:

$$\mu \nabla_{\xi}^2 U_i(x, \xi) + (\lambda + \mu) \Theta_{,\xi_1}(x, \xi) - \gamma G_{T,\xi_i}(x, \xi); i = 1, 2, \quad (2.53)$$

și ecuația de tipul Poisson:

$$\nabla^2 G_T(x, \xi) = -\delta(x - \xi); x, \xi \in V, \quad (2.54)$$

cu următoarele condiții omogene de limită mecanice ($\bar{\sigma}_{22}$ - tensiunea termică, U_1 - deplasarea termoelastică) și termice (G_T - FG de tip Dirichlet pentru ecuația Poisson):

$$- U_1(x, y) = 0, \bar{\sigma}_{22}(x, y) = 0, G_T(y, \xi) = 0; x, \xi \in V; y \equiv (y_1, 0) \in \Gamma_{20}, \quad (2.55)$$

$$- U_1(x, y) = 0, \bar{\sigma}_{22}(x, y) = 0, G_T(y, \xi) = 0; x, \xi \in V; y \equiv (y_1, a_2) \in \Gamma_{21}.$$

Se scrie legea Duhamel-Neumann (2.3) pentru tensiunea termică $\bar{\sigma}_{22}$, care are următoarea formă:

$$\bar{\sigma}_{22} = 2\mu U_{2,2} + \lambda \Theta - \gamma G_T; \Theta = U_{k,k}(x, \xi); k = 1, 2. \quad (2.56)$$

Conform CL (2.55) pentru laturile Γ_{20} și $\Gamma_{21} \rightarrow \bar{\sigma}_{22} = 0$ și $G_T = 0$. Relația (2.56) se egalează cu zero și se înlocuiește dilatarea de volum $\Theta = U_{1,1} + U_{2,2}$. În final, se obține următoarea expresie:

$$\bar{\sigma}_{22} = 2\mu U_{2,2} + \lambda U_{1,1} + \lambda U_{2,2} - \gamma G_T = (\lambda + 2\mu) U_{2,2} + \lambda U_{1,1} - \gamma G_T. \quad (2.57)$$

Dacă $U_1 = 0$, atunci $U_{1,1} = 0$ și folosind cealaltă CL din (2.55) ($G_T = 0$) rezultă: $U_{2,2} = 0$. Utilizând formula dilatării de volum:

$$\Theta = U_{1,1} + U_{2,2} \Rightarrow \Theta = 0. \quad (2.58)$$

Luând în calcul ultimele rezultate obținute (2.58), se poate completa șirul CL (2.55), astfel toate CL pot fi scrise în felul următor:

- pentru latura marginală Γ_{20} :

$$G_T = 0; U_1 = 0 \Rightarrow U_{1,1} = 0, G_1 = 0; \bar{\sigma}_{22} = 0; U_{2,2} = 0; G_{2,2} = 0 \Rightarrow \Theta = 0; G_\Theta = 0; \quad (2.59)$$

- pentru latura marginală Γ_{21} :

$$G_T = 0; U_1 = 0 \Rightarrow U_{1,1} = 0, G_1 = 0; \bar{\sigma}_{22} = 0; U_{2,2} = 0; G_{2,2} = 0 \Rightarrow \Theta = 0; G_\Theta = 0. \quad (2.60)$$

Se folosește expresia (2.9) și se obține relația generală a dilatării de volum pentru fâșia V :

$$\begin{aligned} \Theta(x, \xi) = & \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} G_\Theta(x, \xi) + \int_{\Gamma_{20}} \left[\frac{\partial \Theta(x, y)}{\partial n_{\Gamma_{20}}} - \Theta(x, y) \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_{20}}} \right] G_\Theta(y, \xi) d\Gamma_{20}(y) \\ & + \int_{\Gamma_{21}} \left[\frac{\partial \Theta(x, y)}{\partial n_{\Gamma_{21}}} - \Theta(x, y) \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_{21}}} \right] G_\Theta(y, \xi) d\Gamma_{21}(y), \end{aligned} \quad (2.61)$$

unde: $y \equiv (y_1, 0) \in \Gamma_{20}$, $d\Gamma_{20}(y) = dy_1$, $\partial/\partial n_{\Gamma_{20}} = -\partial/\partial y_2$;

$y \equiv (y_1, a_2) \in \Gamma_{21}$, $d\Gamma_{21}(y) = dy_1$, $\partial/\partial n_{\Gamma_{21}} = \partial/\partial y_2$.

Din [50, p. 112], [58, p. 17] se extrag expresiile pentru G_T, G_Θ, G_1 , iar din [3] - pentru G_2 , care coincide cu formula (2.25):

$$G_T = G_\Theta = G_1 = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{E_2}{E}; \quad (2.62)$$

$$G_2 = b - \frac{1}{4\pi} \ln EE_2 + \begin{cases} 0; x_1 \leq \xi_1; \\ \frac{(x_1 - \xi_1)}{a_2}; x_1 \geq \xi_1. \end{cases} \quad (2.63)$$

FPTG pentru fâșie se scriu folosind (2.7):

$$\begin{aligned} U_i(x, \xi) = & -\frac{\lambda + \mu}{2\mu} \xi_i \Theta(x, \xi) - \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} x_i G_i(x, \xi) + \frac{\gamma \xi_i}{2\mu} G_T(x, \xi) \\ & - \sum_{i=0}^1 \int_{\Gamma_{2i}} \left\{ \left[U_i(x, y) + \frac{y_i}{2\mu} [(\lambda + \mu)\Theta(x, y) - \gamma G_T(x, y)] \frac{\partial G_i(y, \xi)}{\partial n_{y_2}} \right] \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial n_{y_2}} \left[U_i(x, y) + \frac{y_i}{2\mu} [(\lambda + \mu)\Theta(x, y) - \gamma G_T(x, y)] G_i(y, \xi) \right] \right\} d\Gamma_{2i}(y). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Se folosesc expresiile FG (2.62) - (2.63) și se înlocuiesc în (2.61). Folosind CL (2.59) - (2.60) și știind că $G_{\Theta} = G_T$ se obține relația pentru dilatarea de volum:

$$\Theta(x, \xi) = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} G_{\Theta}(x, \xi). \quad (2.65)$$

Conform (2.62), $G_{\Theta} = G_T$, deci se poate scrie:

$$\Theta(x, \xi) = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} G_T(x, \xi). \quad (2.66)$$

Pentru a obține funcția principală termoelastică a deplasării U_1 se utilizează relația (2.64), pentru $i = 1$. Luându-se în calcul CL (2.59) - (2.60), integralele din expresia (2.64) sunt egale cu zero pentru ambele laturi marginale, astfel se poate scrie:

$$U_1(x, \xi) = -\frac{\lambda + \mu}{2\mu} \xi_1 \Theta(x, \xi) - \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} x_1 G_1(x, \xi) + \frac{\gamma \xi_1}{2\mu} G_T(x, \xi). \quad (2.67)$$

Folosind expresiile pentru FG (2.62) și a dilatării de volum (2.66), în urma transformărilor se obține relația finală de calcul a deplasării termoelastice U_1 :

$$U_1(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} (\xi_1 - x_1) G_T(x, \xi). \quad (2.68)$$

În același mod se determină deplasarea termoelastică U_2 , folosind formula (2.64), pentru $i = 2$. Integrala de pe latura marginală Γ_{20} este egală cu zero conform CL.

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} [\xi_2 G_T(x, \xi) - x_2 G_2(x, \xi)] + \int_{\Gamma_{21}} \frac{y_2}{2\mu} \left[(\lambda + \mu) \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} G_{T,2}(x, y) - \gamma G_{T,2}(x, y) \right] G_2(y, \xi) d\Gamma_{21}(y). \quad (2.69)$$

Fâșia are o lățime egală cu a_2 (Figura 2.10), deci y_2 se substituie prin a_2 . Se reduc termenii asemenea și se obține următoarea expresie a deplasării termice U_2 :

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\xi_2 G_T(x, \xi) - x_2 G_2(x, \xi) - \int_{\Gamma_{21}} a_2 G_{T,2}(x, y) G_2(y, \xi) d\Gamma_{21}(y) \right]. \quad (2.70)$$

Pentru rezolvarea integralei $I_2(x, \xi) = \int_{\Gamma_{21}} a_2 G_{T,2}(x, y) G_2(y, \xi) d\Gamma_{21}(y)$ din (2.70), s-a folosit CL pentru FPTG, care rezultă din CL (2.59), (2.60) cu respectarea punctului $\xi \in \Gamma = \Gamma_{20} \cup \Gamma_{21}$:

$$U_1(x, \xi) = 0; U_{2,2}(x, \xi) = 0; x \equiv (x_1, x_2) \in V; \xi \equiv (\xi_1, 0) \in \Gamma_{20}; \quad (2.71)$$

$$U_1(x, \xi) = 0; U_{2,2}(x, \xi) = 0; x \equiv (x_1, x_2) \in V; \xi \equiv (\xi_1, a_2) \in \Gamma_{21}. \quad (2.72)$$

CL a FPTG pentru ecuația Poisson, care rezultă din aceleași CL (2.59), (2.60) cu respectarea punctului $x = y \in \Gamma = \Gamma_{20} \cup \Gamma_{21}$:

$$U_i(y, \xi) = 0; y \equiv (y_1, 0) \in \Gamma_{20}; \xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \in V; \quad (2.73)$$

$$U_i(y, \xi) = 0; y \equiv (y_1, a_2) \in \Gamma_{21}; \xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \in V. \quad (2.74)$$

O astfel de integrala $I_2(x, \xi)$ este rezolvată în literatura de specialitate [56, p. 214], numai pentru alte CL. Integrala $I_2(x, \xi)$ este o funcție armonică cu respectarea ambelor puncte $x \equiv (x_1, x_2) \in V$ și $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \in V$.

Cu respectarea punctelor $x = y \in \Gamma = \Gamma_{20} \cup \Gamma_{21}$:

$$I_2(x, \xi) = 0; \xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \in V, x \equiv (x_1 = y_1, x_2 = y_2 = 0) \in \Gamma_{20}; \quad (2.75)$$

$$I_2(x, \xi) = 0; \xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \in V, x \equiv (x_1 = y_1, x_2 = y_2 = a_2) \in \Gamma_{21}. \quad (2.76)$$

Cu respectarea punctelor $\xi = y \in \Gamma = \Gamma_{20} \cup \Gamma_{21}$:

$$\partial I_2(x, \xi) / \partial n_{\xi_2} = -\partial I_2(x, \xi) / \partial \xi_2 = 0; x \equiv (x_1, x_2) \in V, \xi \equiv (\xi_1 = y_1, \xi_2 = y_2 = 0) \in \Gamma_{20}; \quad (2.77)$$

$$\partial I_2(x, \xi) / \partial n_{\xi_2} = \partial I_2(x, \xi) / \partial \xi_2 = a_2 G_2(x, \xi); x \equiv (x_1, x_2) \in V, \xi \equiv (\xi_1 = y_1, \xi_2 = y_2 = a_2) \in \Gamma_{21}. \quad (2.78)$$

Se folosesc aceste rezultate și se obține:

$$I_2(x, \xi) = -x_2 G_2(x, \xi) + \xi_2 G_T(x, \xi) + x_1 \int \frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial x_2} dx_1 - \int \xi_1 \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d\xi_1, \quad (2.79)$$

unde:

$$\int \xi_1 \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d\xi_1 = \xi_1 \int \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d\xi_1 - \iint \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d^2 \xi_1^2. \quad (2.80)$$

Se înlocuiește (2.79) și (2.80) în (2.70) și se obține o nouă FPTG pentru deplasarea U_2 :

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} \left[-x_1 \int \frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial x_2} dx_1 + \xi_1 \int \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d\xi_1 - \iint \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d^2 \xi_1^2 \right]. \quad (2.81)$$

Datorită următoarei expresii $\frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial x_2} = \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2}$, funcția finală a deplasării U_2 va avea forma:

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_1 - x_1) \int \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d\xi_1 - \iint \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d^2\xi_1^2 \right]. \quad (2.82)$$

Verificarea expresiilor obținute după CL.

Condițiile mecanice:

- pentru laturile Γ_{20} și $\Gamma_{21} \rightarrow U_1 = 0, U_{1,1} = 0, U_{2,2} = 0$:

$$U_1(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} (\xi_1 - x_1) G_T(x, \xi) = 0; \quad (2.83)$$

$$U_{2,\xi_2}(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} [-(\xi_1 - x_1) G_{T,\xi_1}(x, \xi) + G_T(x, \xi)] = 0. \quad (2.84)$$

Condițiile termice:

- pentru laturile Γ_{20} și $\Gamma_{21} \rightarrow G_T = 0$:

$$U_1(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} (\xi_1 - x_1) G_T(x, \xi) = 0; \quad (2.85)$$

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_1 - x_1) \int \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d\xi_1 - \iint \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d^2\xi_1^2 \right] = 0. \quad (2.86)$$

Determinarea tensiunilor termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură.

Pentru determinarea tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ de la o sursă unitară punctiformă de căldură se folosesc relațiile (2.66), (2.68) și (2.82) care se înlocuiesc în formula Duhamel-Neumann (2.3). Într-o formă intermediară, aceste tensiuni termice se vor scrie astfel:

$$\bar{\sigma}_{11}(x, \xi) = \frac{\mu\gamma}{\lambda + 2\mu} [(\xi_1 - x_1) G_{T,\xi_1}(x, \xi) - G_T(x, \xi)]; \quad (2.87)$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x, \xi) = -\frac{\mu\gamma}{\lambda + 2\mu} [(\xi_1 - x_1) G_{T,\xi_1}(x, \xi) + G_T(x, \xi)]; \quad (2.88)$$

$$\bar{\sigma}_{12}(x, \xi) = \frac{\mu\gamma}{\lambda + 2\mu} [(\xi_1 - x_1) G_{T,\xi_2}(x, \xi)]. \quad (2.89)$$

Expresiile finale ale tensiunilor termice de la o sursă unitară punctiformă de căldură s-au obținut prin substituirea FG $G_T(x, \xi)$ (2.62):

$$\bar{\sigma}_{11}(x, \xi) = \frac{\mu\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] \ln \frac{E_2}{E}; \quad (2.90)$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x, \xi) = -\frac{\mu\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 1 \right] \ln \frac{E_2}{E}; \quad (2.91)$$

$$\bar{\sigma}_{12}(x, \xi) = \frac{\mu\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} (\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln \frac{E_2}{E}. \quad (2.92)$$

Soluțiile obținute pentru fâșie, sunt incluse în Anexa A.

Construirea graficelor tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}$ pentru fâșie.

S-a folosit programa Maple 18 și s-au construit graficele tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ (2.90) - (2.92) pentru fâșia $V \equiv (-10 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10)$, de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură aplicată în punctul cu coordonatele $x_1 = 0, x_2 = 5$. Pentru constantele elastice și termice au fost luate în calcul următoarele valori: coeficientul Poisson $\nu = 0,3$; modulul de elasticitate $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, iar coeficientul dilatarei termice liniare $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} (K^{-1})$. Aceste grafice sunt prezentate în Figura 2.11.

Concluzii:

Dacă se analizează graficele tensiunilor termice normale $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi) \rightarrow$ Figura 2.11, a); $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi) \rightarrow$ Figura 2.11, b) și graficele tensiunilor termice tangențiale $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi) \rightarrow$ Figura 2.11, c, d), care reprezintă același grafic arătat din ambele părți ale fâșiei, se poate afirma:

- se respectă CL impuse inițial, cum se vede din Figura 2.11, b), $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi) = 0$ pentru $x_2 = 0$ și $x_2 = a_2$. Dacă variabila $x_1 \rightarrow \pm\infty$ atunci $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi) = 0$;
- dacă punctul de aplicare cu coordonatele (ξ_1, ξ_2) va coincide cu punctul de răspuns cu coordonatele (x_1, x_2) , atunci funcțiile $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi)$ și $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi)$ vor avea un maximum local, iar funcția $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi)$ va avea un salt în acest punct;
- graficele tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi)$ și $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi)$ sunt simetrice în raport cu planul care trece prin punctul $\xi_1 = 0m$ și respectiv în raport cu planul care trece prin punctul $\xi_2 = 5m$. Graficul tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi)$ este antisimetric în raport cu planul care trece prin punctul $\xi_1 = 0m$ și respectiv în raport cu planul care trece prin punctul $\xi_2 = 5m$.

Determinarea tensiunilor termice de la acțiunea unui gradient de temperatură.

La determinarea tensiunilor termice $\sigma_{ij}(\xi); i, j = 1, 2$ se folosește expresia (2.5), unde rezultă: sursa interioară de căldură $F(x) = 0$, fluxul de căldură $\frac{\partial T(y)}{\partial n_y} = 0$, schimbul de căldură dintre

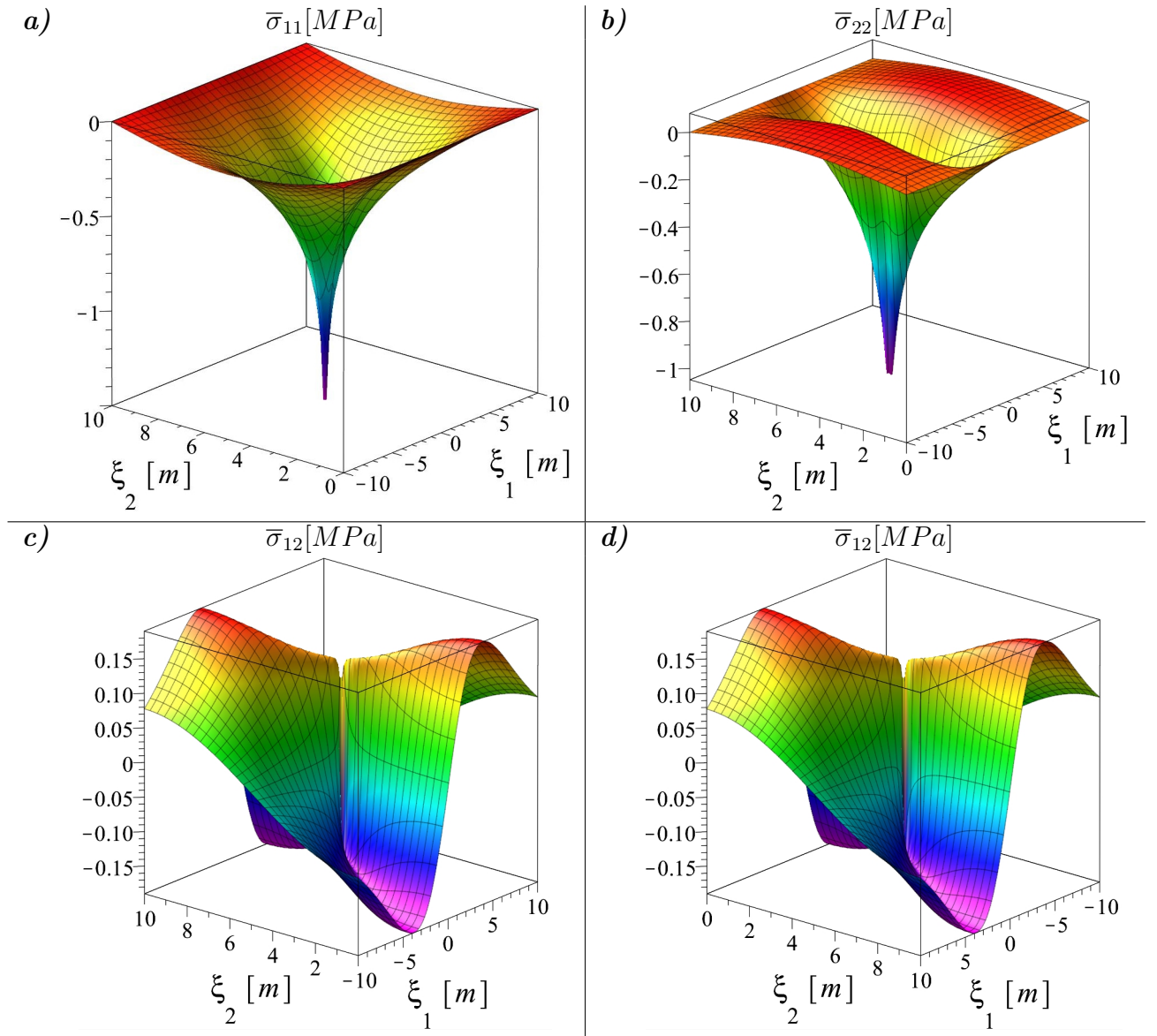


Fig. 2.11. Graficele tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ în fâșia $V \equiv (-10 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10)$ de la acțiunea unei surse unitare de căldură aplicată în punctul cu coordonatele $x_1 = 0, x_2 = 5$.

mediul exterior și suprafața corpului $\left[\alpha T(y) + a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} \right] = 0$. Deci această relație se reduce la următoarea formă:

$$\sigma_{ij}(\xi) = - \int_b^c T_{20}(y_1, 0) Q_{ij}^{20}(y_1, 0; \xi) dy_1 - \int_f^g T_{21}(y_1, a_2) Q_{ij}^{21}(y_1, a_2; \xi) dy_1, \quad (2.93)$$

unde:

$$Q_{ij}^{20}(y_1, 0; \xi) = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}(y_1, 0; \xi)}{\partial n_{y_2}}; \quad Q_{ij}^{21}(y_1, a_2; \xi) = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}(y_1, a_2; \xi)}{\partial n_{y_2}}. \quad (2.94)$$

Pentru determinarea acestor tensiuni termice $\sigma_{ij}(\xi)$ este necesar să fie cunoscute funcțiile de influență ale tensiunilor termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură

$\bar{\sigma}_{ij}(x; \xi)$ pentru fâșia $V \equiv (-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$ cu condițiile mecanice și termice de limită indicate în Figura 2.9. Aceste tensiuni termice $\bar{\sigma}_{ij}$ sunt prezentate în relațiile (2.90) - (2.92). Folosind aceste relații pot fi determinate tensiunile termice σ_{ij} :

$$\sigma_{11}(\xi) = - \int_b^c T_{20} Q_{11}^{20}(y_1, 0; \xi) dy_1 - \int_f^g T_{21} Q_{11}^{21}(y_1, a_2; \xi) dy_1, \quad (2.95)$$

$$Q_{11}^{20}(y_1, 0; \xi) = \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}(y_1, 0; \xi)}{\partial n_{y_2}} = - \frac{\mu\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial y_2} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] \ln \frac{E_{20}}{E_0}. \quad (2.96)$$

Se schimbă variabila de derivare:

$$Q_{11}^{20}(y_1, 0; \xi) = - \frac{\mu\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] \ln E_{20} E_0. \quad (2.97)$$

În formă finală expresia va avea forma:

$$Q_{11}^{20}(y_1, 0; \xi) = - \frac{\mu\gamma}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] \ln E_{20}, \quad (2.98)$$

unde:

$$E_{20} = 1 - 2e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1 - \xi_1)} \cos \frac{\pi}{a_2} \xi_2 + e^{\frac{2\pi}{a_2}(y_1 - \xi_1)} \quad (2.99)$$

Tot în același mod, se derivează și cealaltă expresie pentru latura Γ_{21} :

$$Q_{11}^{21}(y_1, 0; \xi) = \frac{\mu\gamma}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] \ln E_{2a_2}, \quad (2.100)$$

unde:

$$E_{2a_2} = 1 + 2e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1 - \xi_1)} \cos \frac{\pi}{a_2} \xi_2 + e^{\frac{2\pi}{a_2}(y_1 - \xi_1)}. \quad (2.101)$$

Relațiile (2.98) și (2.100) se substituie în (2.93):

$$\sigma_{11}(\xi) = \frac{\mu\gamma}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ T_{20} \int_b^c \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] \ln E_{20} dy_1 - T_{21} \int_f^g \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] \ln E_{2a_2} dy_1 \right\}. \quad (2.102)$$

Pentru rezolvarea integralei $\int_b^c \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{20} \right] dy_1$ se folosește formula de integrare prin părți, unde se obține:

$$\int_b^c \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{20} \right] dy_1 = -(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{20} - \int_b^c \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{20} dy_1. \quad (2.103)$$

Integrala $\int_b^c \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{20} dy_1$ se rezolvă folosind [78, p. 82]. Rezultatul acestei integrale este:

$$\int_b^c \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{20} dy_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1 - \xi_1)} - \cos \frac{\pi}{a_2} \xi_2}{\sin \frac{\pi}{a_2} \xi_2}. \quad (2.104)$$

În această ordine, se rezolvă și cea de-a doua integrală $\int_f^g \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{2a_2} \right] dy_1$ din (2.102).

Rezultatul final se scrie în felul următor:

$$\int_f^g \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{2a_2} \right] dy_1 = -(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{2a_2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1 - \xi_1)} + \cos \frac{\pi}{a_2} \xi_2}{\sin \frac{\pi}{a_2} \xi_2}. \quad (2.105)$$

Expresiile (2.103) - (2.105) se substituie în (2.102) și se obține expresia finală de calcul a tensiunii termice $\sigma_{11}(\xi)$:

$$\sigma_{11}(\xi) = -\frac{\mu\gamma}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ T_{20} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{20} + 4 \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1 - \xi_1)} - \cos \frac{\pi}{a_2} \xi_2}{\sin \frac{\pi}{a_2} \xi_2} \right] \Big|_b^c - T_{21} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{2a_2} - 4 \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{a_2}(y_1 - \xi_1)} + \cos \frac{\pi}{a_2} \xi_2}{\sin \frac{\pi}{a_2} \xi_2} \right] \Big|_f^g \right\}. \quad (2.106)$$

Tensiunea termică normală $\sigma_{22}(\xi)$ se calculează cu relația:

$$\sigma_{22}(\xi) = -\int_b^c T_{20} Q_{22}^{20}(y_1, 0; \xi) dy_1 - \int_f^g T_{21} Q_{22}^{21}(y_1, a_2; \xi) dy_1, \quad (2.107)$$

unde:

$$Q_{22}^{20}(y_1, 0; \xi) = \frac{\mu\gamma}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 1 \right] \ln E_{20}; \quad (2.108)$$

$$Q_{22}^{21}(y_1, a_2; \xi) = -\frac{\mu\gamma}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 1 \right] \ln E_{2a_2}. \quad (2.109)$$

E_{20} și E_{2a_2} sunt prezentate în expresiile (2.99) și respectiv (2.101).

Se înlocuiesc (2.108) și (2.109) în (2.107), se integrează prin părți și se rezolvă integrala urmând etapele folosite la determinarea tensiunii termice $\sigma_{11}(\xi)$. În formă finală, tensiunea termică $\sigma_{22}(\xi)$ se va calcula cu relația:

$$\sigma_{22}(\xi) = \frac{\mu\gamma}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ T_{20} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{20} \right] \Big|_b^c - T_{21} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{2a_2} \right] \Big|_f^g \right\}. \quad (2.110)$$

Tensiunea termică tangențială $\sigma_{12}(\xi)$ se calculează cu formula:

$$\sigma_{12}(\xi) = - \int_b^c T_{20} Q_{12}^{20}(y_1, 0; \xi) dy_1 - \int_f^g T_{21} Q_{12}^{21}(y_1, a_2; \xi) dy_1, \quad (2.111)$$

unde:

$$Q_{12}^{20}(y_1, 0; \xi) = -\frac{\mu\gamma}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{20} \right]; \quad (2.112)$$

$$Q_{12}^{21}(y_1, a_2; \xi) = \frac{\mu\gamma}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln E_{2a_2} \right]. \quad (2.113)$$

E_{20} și E_{2a_2} sunt prezentate în expresiile (2.99) și respectiv (2.101).

Expresia finală a tensiunii termice $\sigma_{12}(\xi)$ are forma:

$$\sigma_{12}(\xi) = \frac{\mu\gamma}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ T_{20} \left[\left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] \ln E_{20} \right] \Big|_b^c - T_{21} \left[\left[(\xi_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] \ln E_{2a_2} \right] \Big|_f^g \right\}. \quad (2.114)$$

Construirea graficelor tensiunilor termice σ_{ij} pentru fâșie.

S-a folosit programa Maple 18 și s-au construit graficele tensiunilor termice $\sigma_{ij}(\xi)$ ((2.106), (2.110) și (2.114)) de la acțiunea unui gradient de temperatură $T_{20} = 80K$, aplicat pe latura Γ_{20} pe intervalul $[b, c]$, $b = -4$, $c = 4$, și de la acțiunea altui gradient de temperatură $T_{21} = 100K$, aplicat pe latura Γ_{21} pe intervalul $[f, g]$, $f = -7$, $g = 7$ a fâșiei $V \equiv (-20 \leq x_1 \leq 20, 0 \leq x_2 \leq 10)$. Pentru constantele elastice și termice au fost luate în calcul următoarele valori:

coeficientul Poisson $\nu = 0,3$; modulul de elasticitate $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, iar coeficientul dilatarii termice liniare $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5}(K^{-1})$. Aceste grafice sunt prezentate în Figura 2.12.

Concluzii:

Dacă se analizează graficele tensiunilor termice normale $\sigma_{11}(\xi) \rightarrow$ Figura 2.12, *a, b*); $\sigma_{22}(\xi) \rightarrow$ Figura 2.12, *c, d*), și graficele tensiunilor termice tangențiale $\sigma_{12}(\xi) \rightarrow$ Figura 2.12, *e, f*), care reprezintă același grafic prezentat din părți diferite a fâșiei, se poate afirma:

- se respectă CL impuse inițial, cum se vede din Figura 2.12, *c, d*), $\sigma_{22}(\xi) = 0$ pentru $x_2 = 0$ și $x_2 = a_2$. Dacă variabila $x_1 \rightarrow \pm\infty$ atunci $\sigma_{ij}(\xi) = 0$;
- tensiunea termică $\sigma_{11}(\xi)$ Figura 2.12, *a, b*) are un salt pe intervalul unde este aplicat gradientul de temperatură;
- tensiunea termică $\sigma_{12}(\xi) \rightarrow$ Figura 2.12, *e, f*) are un maximum local la capetele intervalului, unde este aplicat gradientul de temperatură;
- graficele tensiunilor termice $\sigma_{11}(\xi) \rightarrow$ Figura 2.12, *a, b*) și $\sigma_{22}(\xi) \rightarrow$ Figura 2.12, *c, d*) sunt simetrice, iar graficul tensiunilor termice $\sigma_{12}(\xi) \rightarrow$ Figura 2.12, *e, f*) este antisimetric în raport cu planul care trece prin punctul cu coordonata $\xi_1 = 0$. Aceasta se datorează faptului că gradientii de temperatură de pe ambele laturi sunt aplicați pe un interval simetric în raport cu punctul $\xi_1 = 0$.

2.2. Funcții de influență și soluții integrale pentru pătrimea de plan termoelastică

Formularea generală a problemei.

Să se determine tensiunile termice $\sigma_{ij}(\xi); i, j = 1, 2$ pentru o problemă particulară de limită în formă de pătrime de plan $P(0 \leq x_1, x_2 < \infty)$ cu condițiile termice de limită de tip Dirichlet [22]. În limitele acestui domeniu este aplicat un gradient de temperatură $T = T(y_1, 0)$ pe un anumit segment de pe latura marginală $\Gamma_{20}(0 \leq y_1 < \infty; y_2 = 0)$:

$$T(y) = \begin{cases} T_{10}(0, y_2) = 0, y \in \Gamma_{10}; \\ T_{20}(y_1, 0) = T_0 = const, y \in (a \leq y_1 \leq b; y_2 = 0), y \in \Gamma_{20}; 0 \leq a < b; \\ T_{20}(y_1, 0) = 0, y \in (0 \leq y_1 < a; y_2 = 0) \cup (b < y_1 < \infty; y_2 = 0), y \in \Gamma_{20}. \end{cases} \quad (2.115)$$

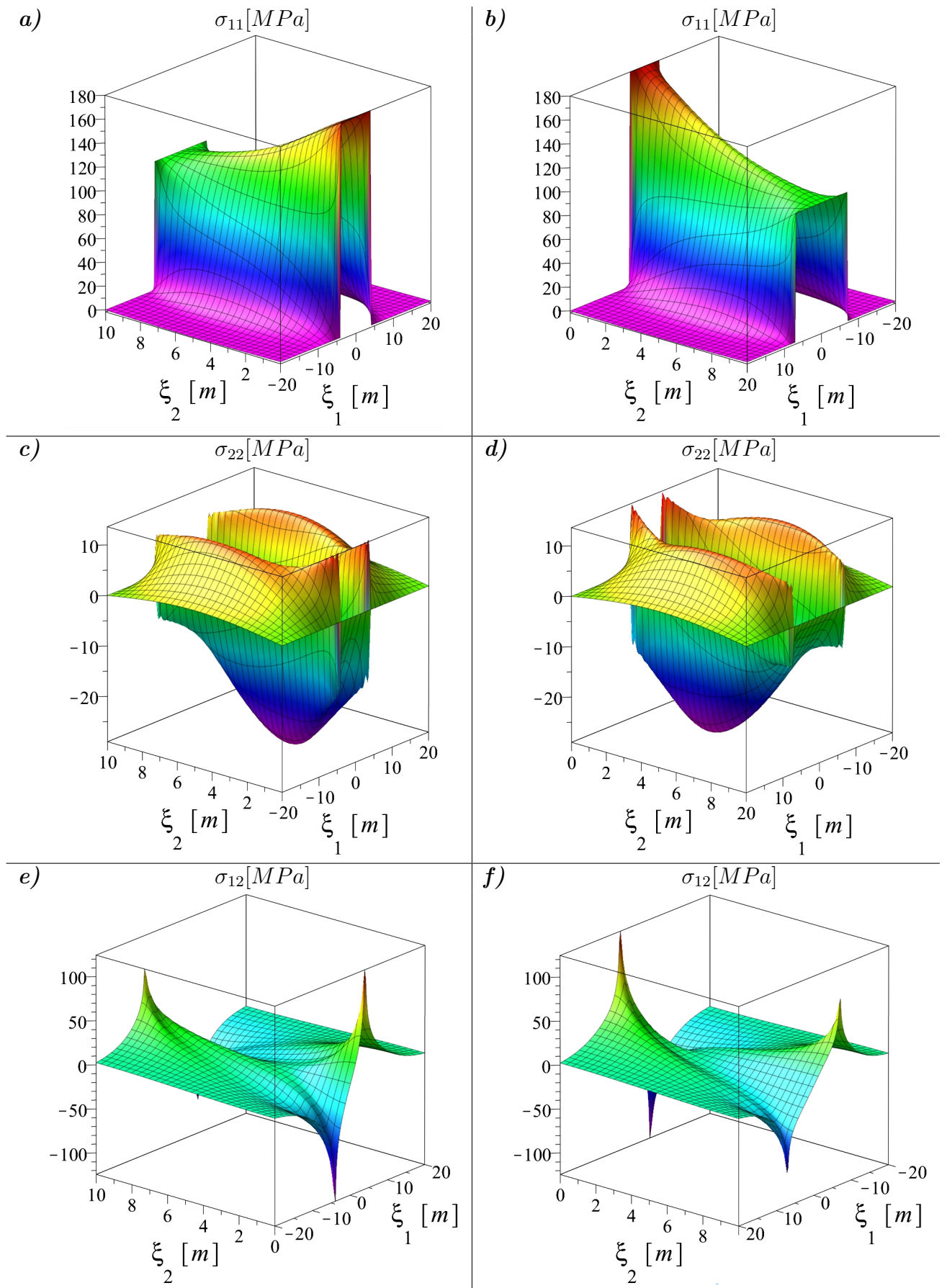


Fig. 2.12. Graficele tensiunilor termice $\sigma_{ij}(\xi)$ în fâșia $V \equiv (-20 \leq x_1 \leq 20, 0 \leq x_2 \leq 10)$ de la acțiunea unor gradienti de temperatură aplicați pe ambele laturi ale fâșiei.

Cu următoarele condiții mecanice de limită :

- latura marginală $\Gamma_{10}(y_1 = 0; 0 \leq y_2 < \infty)$:

$$\Gamma_{10} \longrightarrow \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0; \quad (2.116)$$

- latura marginală $\Gamma_{20}(0 \leq y_1 < \infty; y_2 = 0)$:

$$\Gamma_{20} \longrightarrow u_1 = 0; \sigma_{22} = 0. \quad (2.117)$$

CL mecanice (2.116), (2.117) și cele termice (2.115) pentru problema particulară sunt prezentate în Figura 2.13.

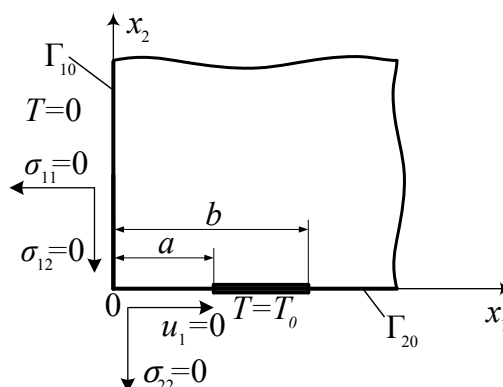


Fig. 2.13. Schema pătrunii de plan cu condițiile de limită mecanice σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} , u_1 și termice T de pe laturile Γ_{10} și Γ_{20} pentru problema particulară.

În literatura de specialitate mai sunt rezolvate PL pentru pătrime de plan, dar prin MG Θ -C, și cu alte condiții mecanice și termice de limită [32, 59].

Pentru a rezolva problema enunțată mai sus este necesar să se determine tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi); i, j = 1, 2$ de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură, dar pentru aceasta este necesar de stabilit valorile deplasărilor termice $U_i(x, \xi); i = 1, 2$ de la o sursă unitară punctiformă de căldură.

2.2.1. Determinarea deplasărilor termoelastice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură. Formularea problemei

Fie pătrimea de plan $P(0 \leq x_1; x_2 < \infty)$ cu condițiile termice de limită de tip Dirichlet în care trebuie să fie calculate deplasările termice $U_i(x, \xi); i = 1, 2$ pentru următoarele condiții

mecanice și termice de limită:

- pe latura marginală $\Gamma_{10}(y_1 = 0; 0 \leq y_2 < \infty)$:

$$\bar{\sigma}_{11}(x, y) = \bar{\sigma}_{12}(x, y) = 0; x \in P; G_T(y, \xi) = 0; y \equiv (0, y_2) \in \Gamma_{10}; \quad (2.118)$$

- pe latura marginală $\Gamma_{20}(0 \leq y_1 < \infty; y_2 = 0)$:

$$\bar{\sigma}_{22}(x, y) = 0; U_1(x, y) = 0; x \in P; G_T(y, \xi) = 0; y \equiv (y_1, 0) \in \Gamma_{20}. \quad (2.119)$$

Toate CL sunt prezentate în Figura 2.14.

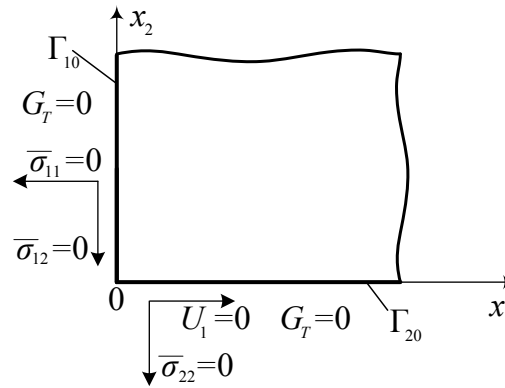


Fig. 2.14. Schema pătrimii de plan cu condițiile de limită mecanice $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{12}$, $\bar{\sigma}_{22}$, U_1 și termice G_T de pe laturile marginale Γ_{10} și Γ_{20} .

La determinarea deplasărilor termoelastice s-au folosit formulele structurale $U_i(x, \xi)$ și $\Theta(x, \xi)$, care au fost demonstrate în teorema 16 din monografia [56, p. 195] pentru un sistem 3D cu CL (2.118) și (2.119) care au fost obținute din expresiile (2.7) - (2.9). Aceste formule structurale sunt valabile și pentru o problemă 2D. În acest caz expresia deplasărilor termoelastice are forma:

$$U_i(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\xi_i G_T(x, \xi) - x_i G_i(x, \xi) - 2 \left(x_1 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \xi_i \right) W_T(x, \xi) \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\int \xi_1 W_T(x, \xi) d\xi_1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} (\delta_{2i} - \delta_{1i}) x_1 \int W_T(x, \xi) d\xi_1 \right) \right]; i = 1, 2, \quad (2.120)$$

unde:

$W_T(x, \xi)$ - partea regulată a FG $G_T(x, \xi)$;

$\delta_{1i}; \delta_{2i}$ - simbolurile Kronecker;

Dilatarea de volum se va calcula cu relația:

$$\Theta(x, \xi) = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} \left(G_T(x, \xi) + \frac{2\mu}{\lambda + \mu} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} W_T(x, \xi) \right). \quad (2.121)$$

FG G_T, G_Θ și $G_i; i = 1, 2$ sunt legate cu CL (2.118) și (2.119) în felul următor, dacă sunt date tensiunile pe latura marginală a pătrimii de plan P , atunci derivatele FG sunt egale cu zero, iar dacă este dată deplasarea, atunci FG este egală cu zero:

- pentru latura $\Gamma_{10}(y_1 = 0; 0 \leq y_2 < \infty)$:

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = 0; G_T = 0 \Rightarrow G_{1,1} = G_{2,1} = G_{\Theta,1} = 0; \quad (2.122)$$

- pentru latura $\Gamma_{20}(0 \leq y_1 < \infty; y_2 = 0)$:

$$\bar{\sigma}_{22} = 0; U_1 = 0; G_T = 0 \Rightarrow U_{1,1} = U_{2,2} = 0 \Rightarrow \Theta = 0; G_1 = G_{2,2} = G_\Theta = 0. \quad (2.123)$$

FG $G_T; G_\Theta; G_1$ și G_2 pentru pătrimea de plan P se extrag din [50, p. 107], [58, p. 14] și se calculează cu următoarele expresii:

$$G_T(x, \xi) = G^{(1)}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r_1 r_2}{r r_{12}}; \quad (2.124)$$

$$G_\Theta(x, \xi) = G_1(x, \xi) = G^{(4)}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r_2 r_{12}}{r r_1}; \quad (2.125)$$

$$G_2(x, \xi) = G^{(2)}(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi} \ln r_2 r_{12} r r_1 + c, \quad (2.126)$$

unde:

$$r = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2; r_1 = (x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2;$$

$$r_2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2; r_{12} = (x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2.$$

FG $G_2(x, \xi) = G^{(2)}(x, \xi)$ conține o constantă nedeterminată c , deoarece soluția acestei PL este caracterizată prin această nedeterminare, iar rezultatul problemei este obținut cu exactitatea unei constante.

Partea regulară a FG $G_T(x, \xi)$ (2.124) reprezintă acea parte a funcției care conține indicele inferior 1, adică partea, care se reflectă față de latura Γ_{10} , deci $W_T(x, \xi)$ din (2.120) și (2.121) s-a calculat cu următoarea relație:

$$W_T(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r_1}{r_{12}}. \quad (2.127)$$

Se înlocuiesc expresiile (2.124) - (2.127) în relația (2.120), iar constanta nedeterminată c din FG $G_2(x, \xi) = G^{(2)}(x, \xi)$ s-a luat egală cu zero $c = 0$. În urma transformărilor necesare se obțin FPTG $U_i(x, \xi); i = 1, 2$ de la o sursă unitară punctiformă de căldură pentru pătrime de plan P :

$$U_1(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(x_1 + \xi_1) \ln \frac{r_1}{r_{12}} + (x_1 - \xi_1) \ln \frac{r}{r_2} ; \right. \\ \left. + 2x_1 \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right]; \quad (2.128)$$

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(x_2 + \xi_2) \ln(r_1 r_2) + (x_2 - \xi_2) \ln(rr_{12}) - 2 \left(x_1 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_2 \right) \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\int \xi_1 \ln \frac{r_1}{r_{12}} d\xi_1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} x_1 \int \ln \frac{r_1}{r_{12}} d\xi_1 \right) \right]. \quad (2.129)$$

2.2.2. Determinarea tensiunilor termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură

La determinarea expresiilor pentru tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ se folosește legea Duhamel-Neumann (2.3), care pentru PL 2D va avea forma:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \mu(U_{i,j} + U_{j,i}) + \delta_{ij}(\lambda\Theta - \gamma G_T); \Theta = U_{k,k}(x, \xi); i, j, k = 1, 2, \quad (2.130)$$

unde: $\Theta(x, \xi)$ - dilatarea de volum se calculează după formula (2.121):

$$\Theta(x, \xi) = \frac{\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left(\ln \frac{r_1 r_2}{rr_{12}} + \frac{2\mu}{\lambda + \mu} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right). \quad (2.131)$$

Substituind expresia pentru FG $G_T(x, \xi)$ (2.124), a dilatarii de volum $\Theta(x, \xi)$ (2.131) și FPTG (2.128), (2.129) în legea Duhamel-Neumann (2.130), se obțin funcțiile de influență ale tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ în pătrimea de plan P de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură:

$$\bar{\sigma}_{11}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left(\ln \frac{rr_{12}}{r_1 r_2} + (x_1 + \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right. \\ \left. + (x_1 - \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln \frac{r}{r_2} - 2x_1 \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right); \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{22}(x, \xi) = & \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left(\ln \frac{rr_{12}}{r_1r_2} + (x_2 + \xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln(r_{12}r_2) \right. \\ & \left. + (x_2 - \xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln(rr_1) - 2x_1\xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \ln \frac{r_1}{r_{12}} + 2(x_1 - \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right); \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{12}(x, \xi) = & \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left((x_1 - \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln \frac{rr_{12}}{r_2r_1} + (x_2 + \xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln(r_{12}r_2) \right. \\ & \left. + (x_2 - \xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln(rr_1) + 2\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln \frac{r_1}{r_{12}} - 4x_1\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right). \end{aligned} \quad (2.134)$$

Soluțiile obținute pentru pătrimea de plan, sunt incluse în Anexa B.

Graficele tensiunilor normale termice $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi)$, $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi)$ și a tensiunii tangențiale termice $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi)$ au fost construite folosind programa Maple 18 și sunt prezentate în Figurile 2.15, a), 2.16, a) și 2.17, a).

2.2.3. Tensiunile termice explicite în pătrimea de plan pentru o problemă particulară de limită

Conform CL termice (2.115), rezultă că fluxul de căldură $a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} = 0$, schimbul de căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului $\left[\alpha T(y) + a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} \right] = 0$. Pătrimea de plan P este acționată doar de un gradient de temperatură aplicat pe latura $\Gamma_{20}(0 \leq y_1 < \infty; y_2 = 0)$, deci, sursa interioară de căldură $F(x) = 0$, astfel formula integrală de tip Green (2.5) capătă următoarea formă:

$$\sigma_{ij}(\xi) = - \int_0^{\infty} T_{20}(y_1, 0) Q_{ij}(y_1, 0; \xi) dy_1, \quad (2.135)$$

unde:

$$Q_{ij}(y_1, 0; \xi) = (\partial / \partial n_{y_2}) \bar{\sigma}_{ij}(y, \xi). \quad (2.136)$$

În formă matriceală, tensiunile termice pentru problema enunțată se va scrie în felul următor:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.137)$$

Pe rând se substituie expresiile (2.132) - (2.134) în formula (2.135) și se obțin următoarele relații a tensiunilor termice:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\xi) = & \frac{\gamma\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)} T_0 \int_a^b \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\ln \frac{r_{10}}{r_0} - (y_1 + \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln r_{10} \right. \\ & \left. - (y_1 - \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln r_0 + 2y_1 \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \ln r_{10} \right] dy_1; \end{aligned} \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(\xi) = & \frac{\gamma\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)} T_0 \int_a^b \left[2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln r_{10} - \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \ln(r_{10} r_0) \right. \\ & \left. - 2y_1 \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln r_{10} - 2(y_1 - \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln r_{10} \right] dy_1; \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(\xi) = & \frac{\gamma\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)} T_0 \int_a^b \left[2\xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \ln r_{10} - (y_1 - \xi_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \ln \frac{r_{10}}{r_0} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln(r_{10} r_0) + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln(r_{10} r_0) + 4y_1 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \ln r_{10} \right] dy_1, \end{aligned} \quad (2.140)$$

unde:

$$r_0 = r(y_1, 0; \xi) = (y_1 - \xi_1)^2 + \xi_2^2; r_{10} = r_1(y_1, 0; \xi) = (y_1 + \xi_1)^2 + \xi_2^2. \quad (2.141)$$

În urma rezolvării integralelor din formulele (2.138) - (2.140) se obțin expresiile finale, pentru tensiunile termice $\sigma_{ij}(\xi)$, în pătrimea de plan P , de la acțiunea unui gradient de temperatură T_0 , aplicat pe latura marginală Γ_{20} în limitele segmentului $a \leq y_1 \leq b$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\xi) = & \frac{\gamma\mu T_0}{2\pi(\lambda+2\mu)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(y_1 - \xi_1) \ln \frac{r_{10}}{r_0} \right. \\ & \left. + 4\xi_2 \left(\arctan \frac{y_1 + \xi_1}{\xi_2} - \arctan \frac{y_1 - \xi_1}{\xi_2} \right) + 2\xi_1 \left(y_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln r_{10} - 4 \right) \right] \Big|_a^b; \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(\xi) = & \frac{\gamma\mu T_0}{2\pi(\lambda+2\mu)} \left\{ 8 \arctan \frac{y_1 + \xi_1}{\xi_2} - \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln \frac{r_{10}}{r_0} \right. \\ & \left. - 2 \left[y_1 - \xi_1 \left(2 - y_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln r_{10} \right\} \Big|_a^b; \end{aligned} \quad (2.143)$$

$$\sigma_{12}(\xi) = \frac{\gamma\mu T_0}{2\pi(\lambda+2\mu)} \left[6\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln r_{10} - (y_1 - \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln(r_{10} r_0) \right]$$

$$+ \left(2 + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \ln \frac{r_{10}}{r_0} + 4y_1 \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \ln r_{10} \Bigg|_a^b. \quad (2.144)$$

Graficele tensiunilor normale termice $\sigma_{11}(\xi)$, $\sigma_{22}(\xi)$ și a tensiunii tangențiale termice $\sigma_{12}(\xi)$ au fost construite folosind programa Maple 18 și sunt prezentate în Figurile 2.15, *b*), 2.16, *b*) și 2.17, *b*).

Construirea graficelor tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}$ și σ_{ij} pentru pătrimea de plan P .

S-a folosit programa Maple 18 și s-au construit graficele tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi)$, $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi)$ și $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi)$ pentru pătrimea de plan P provenite de la o sursă unitară punctiformă de căldură aplicată în punctul $x_1 = 5m, x_2 = 5m$ și tensiunile termice $\sigma_{11}(\xi)$, $\sigma_{22}(\xi)$ și $\sigma_{12}(\xi)$ de la acțiunea unui gradient de temperatură $T_0 = 50K$ aplicat pe segmentul $a \leq y_1 \leq b$, ($a = 4m, b = 6m$) de pe latura marginală $\Gamma_{20}(0 \leq y_1 < \infty; y_2 = 0)$.

Pentru constantele elastice și termice au fost luate în calcul următoarele valori: coeficientul Poisson $\nu = 0,3$; modulul de elasticitate $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, iar coeficientul dilatarei termice liniare $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5}(K^{-1})$.

Tensiunea termică $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi)$ de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură aplicată în punctul $x_1 = 5m, x_2 = 5m$ a fost calculată în baza formulei (2.132) și este prezentată în Figura 2.15, *a*). Tensiunea termică $\sigma_{11}(\xi)$ de la gradientul de temperatură $T_0 = 50K$ a fost calculată în baza formulei (2.142) și este prezentată în Figura 2.15, *b*).

Analizând graficele din Figura 2.15 se observă următoarele:

- se respectă CL enunțate în problemă: pentru latura $\Gamma_{10}(\xi_1 = 0; 0 \leq \xi_2 < \infty) \rightarrow \bar{\sigma}_{11}(x, \xi) = 0$ (Figura 2.15, *a*); $\sigma_{11}(\xi) = 0$ (Figura 2.15, *b*);
- graficul din Figura 2.15, *a*) are un maxim local în punctul de aplicare a sursei unitare punctiforme de căldură $x_1 = 5m, x_2 = 5m$, iar graficul din Figura 2.15, *b*) are valori maxime, în limitele segmentului $4m \leq y_1 \leq 6m$ de pe latura marginală Γ_{20} , de la acțiunea gradientului de temperatură.

Tensiunea termică $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi)$ de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură aplicată în punctul $x_1 = 5m, x_2 = 5m$ a fost calculată în baza formulei (2.133) și este prezentată în Figura 2.16, *a*). Tensiunea termică $\sigma_{22}(\xi)$ de la gradientul de temperatură $T_0 = 50K$ a fost calculată în baza formulei (2.143) și este prezentată în Figura 2.16, *b*).

Analizând graficele din Figura 2.16 se observă următoarele:

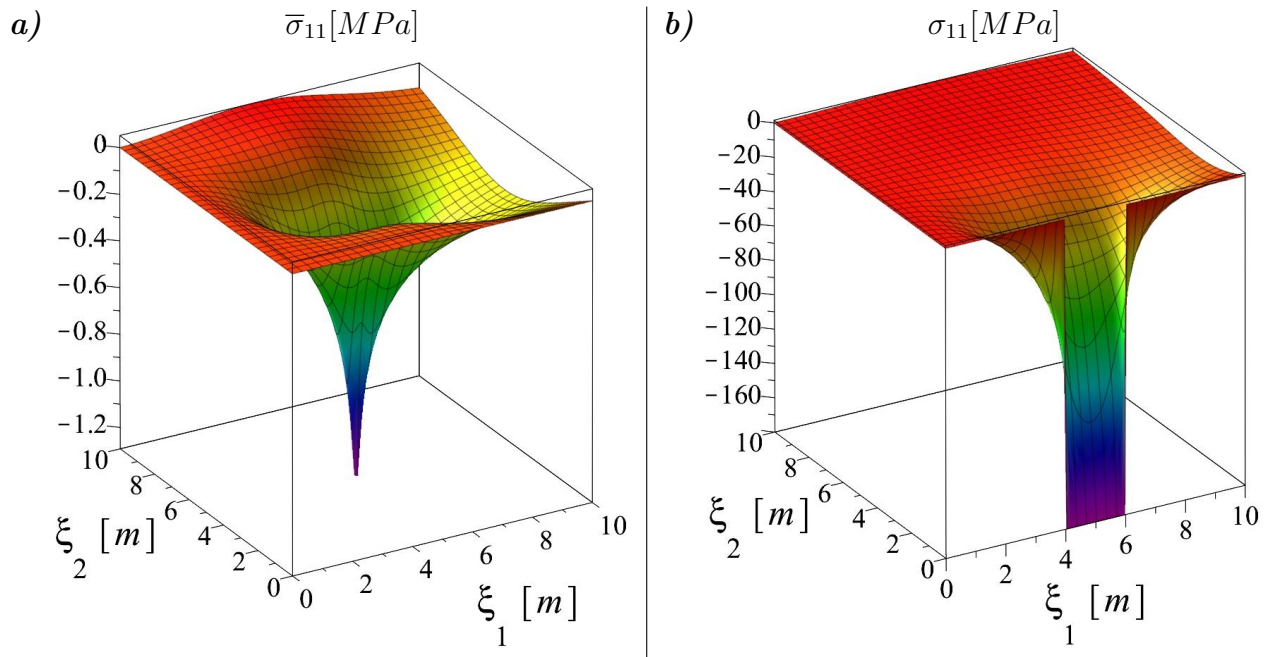


Fig. 2.15. Graficele tensiunilor normale termice $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi)$ și $\sigma_{11}(\xi)$ în pătrimea de plan P în limitele $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 10$, a) de la o sursă unitară punctiformă de căldură și b) de la acțiunea unui gradient de temperatură aplicat pe un segment a laturii marginale Γ_{20} .

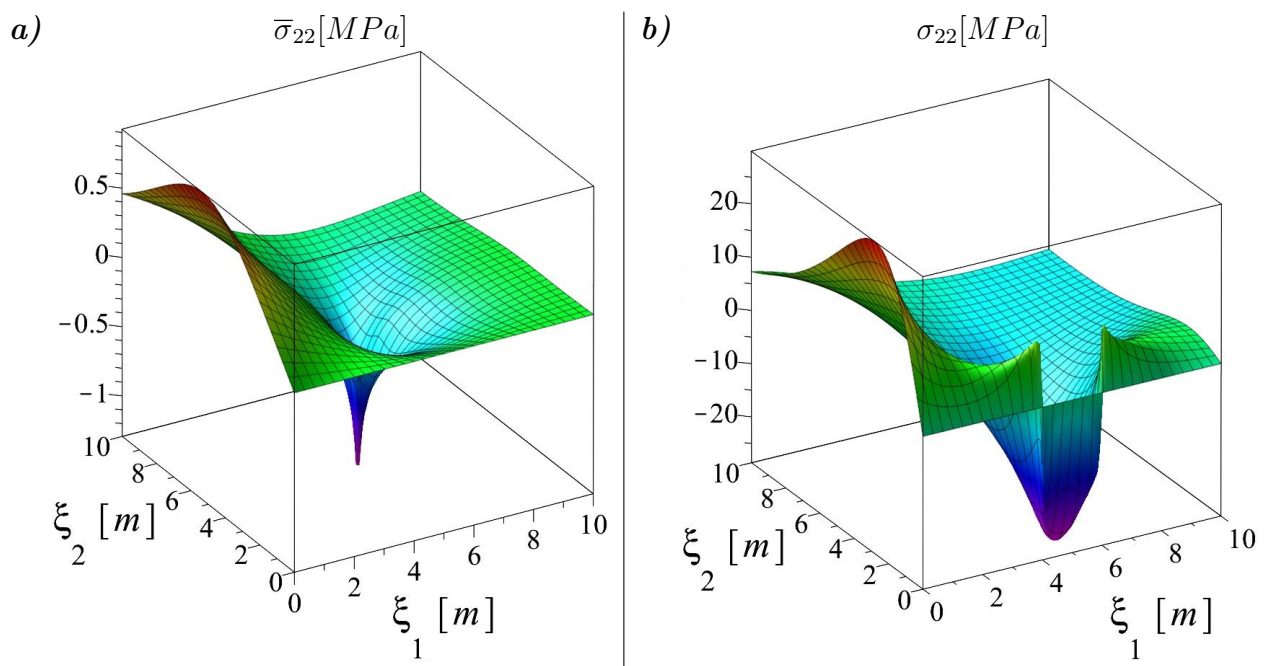


Fig. 2.16. Graficele tensiunilor normale termice $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi)$ și $\sigma_{22}(\xi)$ în pătrimea de plan P în limitele $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 10$, a) de la o sursă unitară punctiformă de căldură și b) de la acțiunea unui gradient de temperatură aplicat pe un segment a laturii marginale Γ_{20} .

- se respectă CL enunțate în problemă: pentru latura $\Gamma_{20}(0 \leq \xi_1 < \infty; \xi_2 = 0) \rightarrow \bar{\sigma}_{22}(x, \xi) = 0$ (Figura 2.16, a); $\sigma_{22}(\xi) = 0$ (Figura 2.16, b):

- graficul (Figura 2.16, a) are un maxim local în punctul de aplicare a sursei unitare punc-

tiforme de căldură $x_1 = 5m, x_2 = 5m$.

Tensiunea termică $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi)$ de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură aplicată în punctul $x_1 = 5m, x_2 = 5m$ a fost calculată în baza formulei (2.134) și este prezentată în Figura 2.17, a). Tensiunea termică $\sigma_{12}(\xi)$ de la gradientul de temperatură $T_0 = 50K$ a fost calculată în baza formulei (2.144) și este prezentată în Figura 2.17, b).

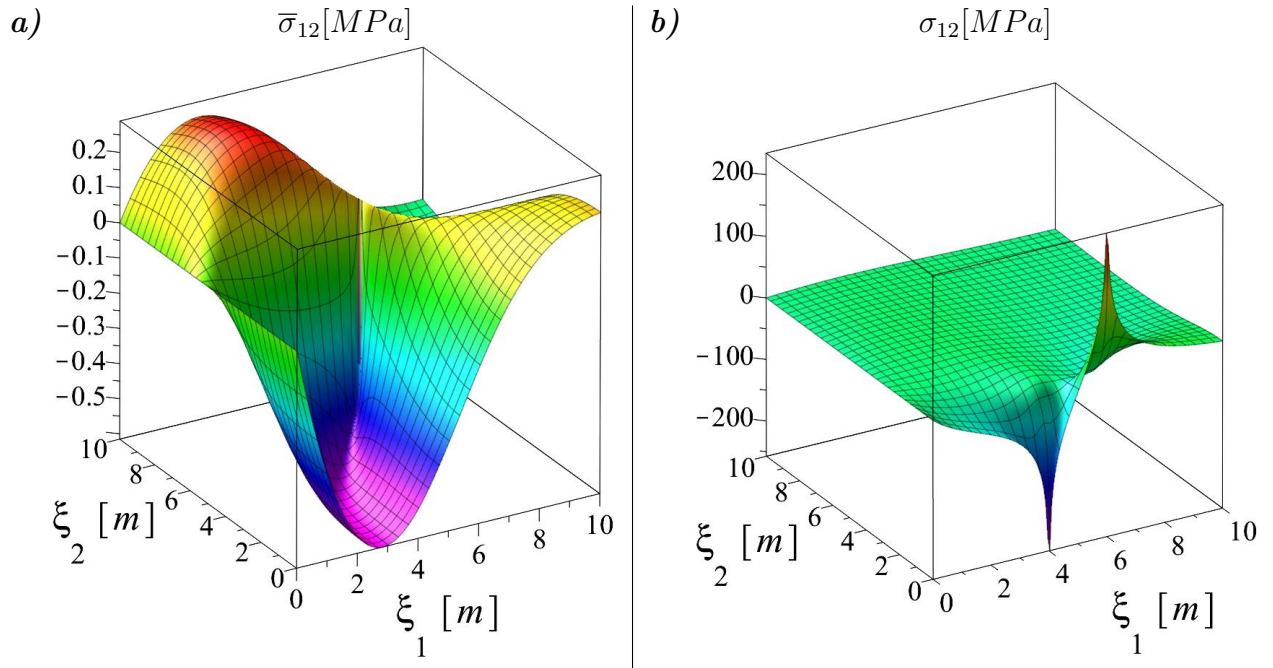


Fig. 2.17. Graficele tensiunilor tangențiale termice $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi)$ și $\sigma_{12}(\xi)$ în pătrimea de plan P în limitele $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 10$, a) de la o sursă unitară punctiformă de căldură și b) de la acțiunea unui gradient de temperatură aplicat pe un segment a laturii marginale Γ_{20} .

Analizând graficele din Figura 2.17 se observă următoarele:

- se respectă CL enunțate în problemă: pentru latura $\Gamma_{10}(\xi_1 = 0; 0 \leq \xi_2 < \infty) \rightarrow \bar{\sigma}_{12}(x, \xi) = 0$ (Figura 2.17, a); $\sigma_{12}(\xi) = 0$ (Figura 2.17, b);
- graficul din Figura 2.17, a) are un salt în imediata apropiere a punctului de aplicare a sursei unitare punctiforme de căldură $x_1 = 5m, x_2 = 5m$, iar graficul din Figura 2.17, b) are maximum local în punctele a și b , ce corespund cu capetele segmentului unde este aplicat gradientul de temperatură $4m \leq y_1 \leq 6m$ de pe latura marginală Γ_{20} .

Concluzii:

- Relațiile pentru deplasările termice $U_i(x, \xi); i = 1, 2$ (2.128) și (2.129), tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi); i, j = 1, 2$ (2.132) - (2.134) și tensiunile termice $\sigma_{ij}(x, \xi); i, j = 1, 2$ (2.142) -

(2.144) pentru pătrimea de plan P cu CL enunțate mai sus, au fost determinate pentru prima dată. Toate expresiile au fost obținute în funcții elementare.

- La determinarea tensiunilor termice $\sigma_{ij}(x, \xi)$ pentru problema particulară nu a fost necesară folosirea formulei lui Maysel și stabilirea câmpului de temperatură, după care să fie calculată o integrală pe volum, ci doar de tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură și de gradientul de temperatură T_0 aplicat la hotarul laturii, după care a fost calculată o integrală pe suprafață. Toate tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ și $\sigma_{ij}(x, \xi)$ au fost construite grafic folosind programa Maple 18 și sunt prezentate în Figurile 2.15 - 2.17.
- Folosind relațiile tensiunilor termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ (2.132) - (2.134) pot fi calculate tensiunile termice pentru o PL provenite de la o sursă interioară de căldură și/sau de la acțiunea gradientului de temperatură aplicat pe una sau ambele laturi cu CL indicate în problemă, iar cu ajutorul expresiilor tensiunilor termice $\sigma_{ij}(\xi)$ (2.142) - (2.144) ușor se determină tensiunile termice de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat în limita oricărui segment de pe latura Γ_{20} .

2.3. Soluții integrale termoelastice pentru semifâșie

Formularea generală a problemei.

Să se determine tensiunile termice $\sigma_{ij}(\xi); i, j = 1, 2$ în semifâșia $K \equiv (0 \leq x_1 < \infty, 0 \leq x_2 \leq a_2)$, de la acțiunea unui gradient de temperatură $\Delta T(x)$ aplicat în limitele unui dreptunghi $K' \equiv [a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d] \in K$ [62]:

$$\Delta T(x) = \begin{cases} T_0 = \text{const.}, x \equiv (x_1, x_2) \in K' \in K, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0; \\ 0, x \equiv (x_1, x_2) \in \Omega \equiv K \setminus K', \end{cases} \quad (2.145)$$

cu următoarele condiții mecanice omogene de limită :

$$\begin{aligned} u_1 = 0; \sigma_{12} = 0; \xi_1 = 0, 0 \leq \xi_2 \leq a_2; \\ \sigma_{22} = 0; u_1 = 0; \xi_2 = 0, 0 \leq \xi_1 < \infty; \\ u_2 = 0; \sigma_{21} = 0; \xi_2 = a_2, 0 \leq \xi_1 < \infty. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Determinarea tensiunilor termice.

Condițiile termice și mecanice de limită pentru semifâșie sunt prezentate în Figura 2.18.

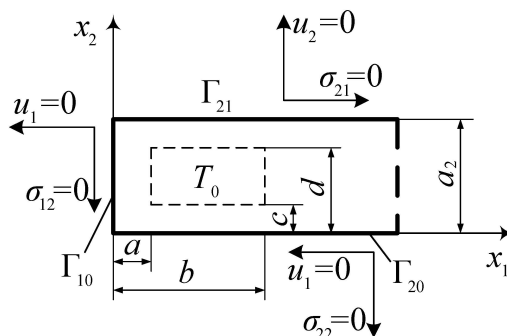


Fig. 2.18. Schema semifâșiei cu condițiile de limită mecanice σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} , u_1 , u_2 și termice T_0 .

Pentru rezolvarea acestei PL se folosește formula lui Maysel din [106, p. 483]:

$$u_i(\xi) = \gamma \int_V \Delta T(x) \Theta^{(i)}(x, \xi) dx_1 dx_2; i = 1, 2, \quad (2.147)$$

unde:

$\Theta^{(i)}(x, \xi)$ - sunt funcțiile de influență de la acțiunea unei forțe unitare concentrate a dilatării de volum; $\gamma = \alpha(2\mu + 3\lambda)$ - constanta termoelastică; α - coeficientul dilatării termice liniare; λ, μ - constantele de elasticitate Lamé.

Expresiile $\Theta^{(i)}(x, \xi)$ sunt extrase din [50, p. 115]. Deci, formula lui Maysel (2.147) poate fi scrisă în felul următor:

$$u_i(\xi) = \gamma T_0 \int_a^b dx_1 \int_c^d \Theta^{(i)}(x, \xi) dx_2 = - \frac{\gamma T_0}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \int_a^b dx_1 \int_c^d \ln \frac{\bar{E} \bar{E}_1 \tilde{E}_2 \tilde{E}_{12}}{\tilde{E} \tilde{E}_1 \bar{E}_2 \bar{E}_{12}} dx_2. \quad (2.148)$$

Funcțiile $\bar{E}, \bar{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_{12}, \tilde{E}, \tilde{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_{12}$ sunt determinate folosind relațiile:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= 1 + 2e^{(\pi/2a_2)(x_1-\xi_1)} \cos(\pi/2a_2)(x_2 - \xi_2) + e^{(\pi/a_2)(x_1-\xi_1)}; \\ \bar{E}_1 &= \bar{E}(x; -\xi_1, \xi_2); \bar{E}_2 = \bar{E}(x; \xi_1, -\xi_2); \bar{E}_{12} = \bar{E}(x; -\xi_1, -\xi_2); \\ \tilde{E} &= 1 - 2e^{(\pi/2a_2)(x_1-\xi_1)} \cos(\pi/2a_2)(x_2 - \xi_2) + e^{(\pi/a_2)(x_1-\xi_1)}; \\ \tilde{E}_1 &= \tilde{E}(x; -\xi_1, \xi_2); \tilde{E}_2 = \tilde{E}(x; \xi_1, -\xi_2); \tilde{E}_{12} = \tilde{E}(x; -\xi_1, -\xi_2). \end{aligned} \quad (2.149)$$

Funcțiile din expresia (2.148) se substituie în legea lui Duhamel-Neumann [29, p. 5], [106, p. 476]:

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij}(\lambda u_{k,k} - \gamma T); i, j = 1, 2. \quad (2.150)$$

Se rezolvă integralele respective și se obțin expresiile finale pentru tensiunile termice $\sigma_{ij}(\xi)$; $i, j = 1, 2$:

$$\sigma_{11}(\xi) = \frac{\mu\gamma T_0}{\pi(\lambda + 2\mu)} F(\xi) + \begin{cases} -\gamma T_0; & \xi \in K^1 \\ 0, & \xi \in \Omega \end{cases}; \quad (2.151)$$

$$\sigma_{22}(\xi) = -\frac{\mu\gamma T_0}{\pi(\lambda + 2\mu)} F(\xi) + \begin{cases} -\gamma T_0; & \xi \in K^1 \\ 0, & \xi \in \Omega \end{cases}; \quad (2.152)$$

$$\sigma_{12}(\xi) = -\frac{\mu\gamma T_0}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \ln \frac{\bar{E}\tilde{E}_1\bar{E}_2\tilde{E}_{12}}{\tilde{E}\bar{E}_1\tilde{E}_2\bar{E}_{12}} \Bigg|_{x_2=c}^{x_2=d} \Bigg|_{x_1=a}^{x_1=b}. \quad (2.153)$$

În formulele (2.151) și (2.152) funcția $F(\xi)$ este exprimată prin următoarele relații:

$$F(\xi) = \left[-\bar{f} + \tilde{f}_1 + \bar{f}_2 - \tilde{f}_{12} - \tilde{f} + \bar{f}_1 + \tilde{f}_2 - \bar{f}_{12} \right]_{x_1=a; x_2=c}^{x_1=b; x_2=d}, \quad (2.154)$$

unde funcțiile $\bar{f}, \tilde{f}_1, \bar{f}_2, \tilde{f}_{12}, \tilde{f}, \bar{f}_1, \tilde{f}_2, \bar{f}_{12}$ sunt determinate cu expresiile:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \arctan \frac{e^{(\pi/2a_2)(x_1-\xi_1)} + \cos(\pi/2a_2)(x_2 - \xi_2)}{\sin(\pi/2a_2)(x_2 - \xi_2)}; \\ \bar{f}_1 &= \bar{f}(x; -\xi_1, \xi_2); \bar{f}_2 = \bar{f}(x; \xi_1, -\xi_2); \bar{f}_{12} = \bar{f}(x; -\xi_1, -\xi_2); \\ \tilde{f} &= \arctan \frac{e^{(\pi/2a_2)(x_1-\xi_1)} - \cos(\pi/2a_2)(x_2 - \xi_2)}{\sin(\pi/2a_2)(x_2 - \xi_2)}; \\ \tilde{f}_1 &= \tilde{f}(x; -\xi_1, \xi_2); \tilde{f}_2 = \tilde{f}(x; \xi_1, -\xi_2); \tilde{f}_{12} = \tilde{f}(x; -\xi_1, -\xi_2). \end{aligned}$$

Construirea graficelor tensiunilor termice σ_{ij} pentru semifâșie.

S-a folosit programa Maple 18 și s-au construit graficele tensiunilor termice $\sigma_{11}(\xi), \sigma_{22}(\xi)$ și $\sigma_{12}(\xi)$ pentru semifâșia K , provenite de la acțiunea unui gradient de temperatură $T_0 = 50K$, aplicat în limita unui dreptunghi $K^1 \equiv [6 \leq x_1 \leq 10, 4 \leq x_2 \leq 6] \in K$.

Pentru constantele elastice și termice au fost luate în calcul următoarele valori: coeficientul Poisson $\nu = 0,3$; modulul de elasticitate $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, iar coeficientul dilatării termice liniare $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} (K^{-1})$. Graficele sunt prezentate în Figura 2.19.

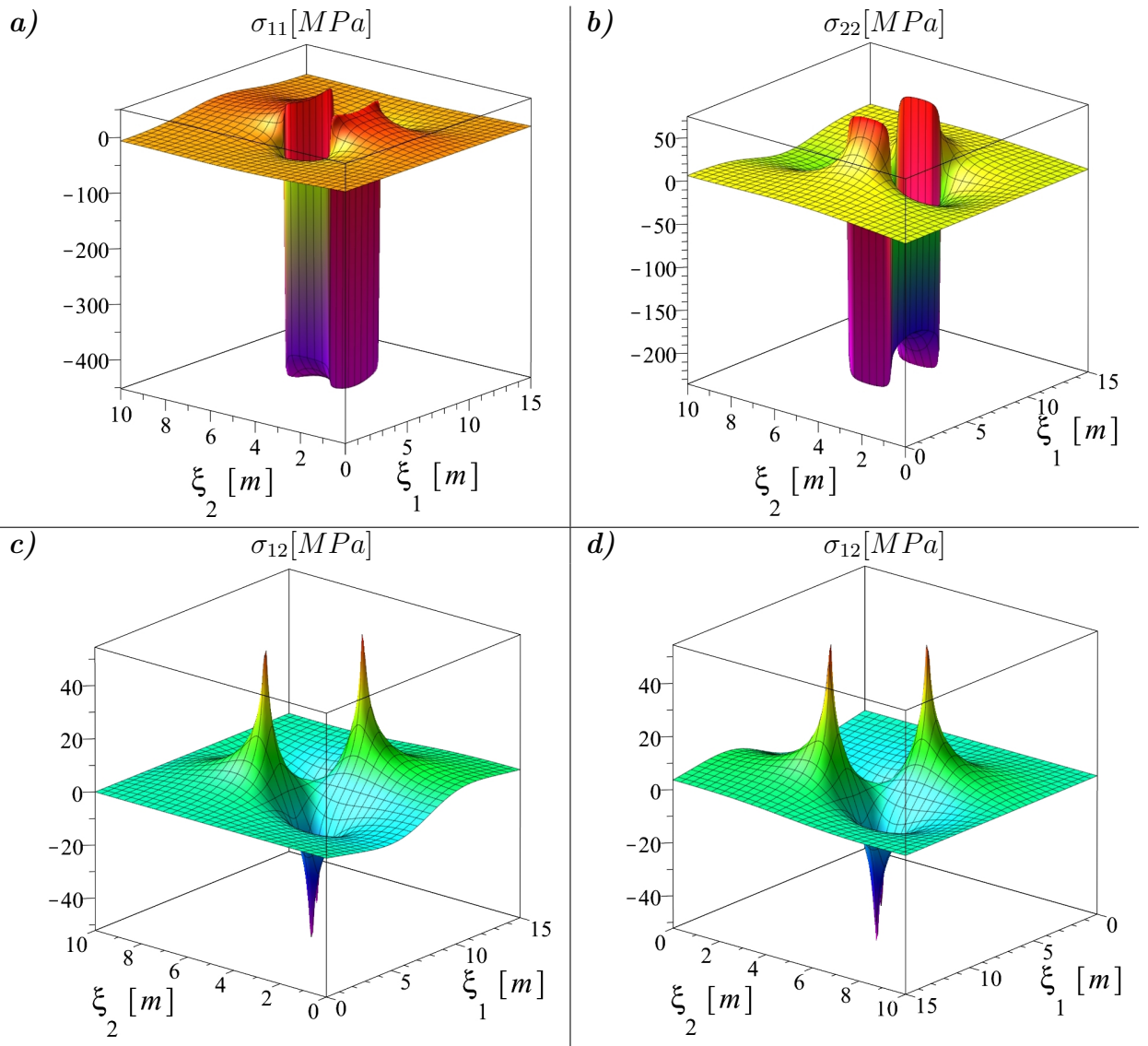


Fig. 2.19. Graficele tensiunilor termice $\sigma_{ij}(\xi)$ în semifâșia $K \equiv (0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10)$ de la acțiunea unui gradient de temperatură, aplicat în limita unui dreptunghi.

Concluzii:

Dacă se analizează graficele tensiunilor termice $\sigma_{ij}(\xi)$ din Figura 2.19 se poate afirma:

- se respectă CL impuse inițial, cum se vede din Figura 2.19, b), $\sigma_{22}(\xi) = 0$ pentru $\xi_2 = 0$. Din Figura 2.19, c), $\sigma_{12}(\xi) = 0$ pentru $\xi_1 = 0$ și din Figura 2.19, d), $\sigma_{21}(\xi) = 0$ pentru $\xi_2 = a_2$. Dacă variabila $\xi_1 \rightarrow \infty$ atunci $\sigma_{ij}(\xi) = 0$;
- tensiunea termică $\sigma_{11}(\xi)$ Figura 2.19, a) și tensiunea termică $\sigma_{22}(\xi)$ Figura 2.19, b) are un salt la hotarul dreptunghiului unde este aplicat gradientul de temperatură;
- tensiunea termică $\sigma_{12}(\xi)$ Figura 2.19, c, d) are un maximum local (puncte singulare) în vârfurile dreptunghiului gradientului de temperatură;

2.4. Reprezentarea grafică a funcțiilor Green pentru tensiunile termice într-un dreptunghi

Câmpul de tensiuni termice, cauzat de o sursă unitară punctiformă de căldură aplicată în interiorul diferitor domenii carteziene poate fi formulat cu ajutorul funcțiilor termoelastice Green. Pentru prezentarea grafică a tensiunilor termice în interiorul unui dreptunghi a fost folosită programa Maple 18. Cu ajutorul acestui soft, pot fi construite graficele pentru diferite expresii voluminoase ale FG, inclusiv pentru expresii analitice, care au formă de sumă a unor funcții singulare conchise și a unor serii ordinare infinite, care conțin funcții trigonometrice și funcții hiperbolice. Pentru exemplificare se prezintă graficele tensiunilor termice, de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură aplicată în interiorul unui dreptunghi cu anumite condiții omogene de limită pentru temperatură, fluxul de căldură, deplasări termoelastice și tensiuni termice date pe laturile lui [14].

Expresiile tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură, au fost deduse în lucrarea [48] pentru dreptunghiul $D \equiv (0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq a_2)$, $a_1 > 0, a_2 > 0$ cu următoarele CL mecanice și termice:

- latura marginală $\Gamma_{10}(y_1 = 0; 0 \leq y_2 \leq a_2)$:

$$U_1(x, y) = 0, \bar{\sigma}_{12}(x, y) = 0; \partial G_T(y, \xi) / \partial n_{10} = 0; x, \xi \in D; y \equiv (0, y_2) \in \Gamma_{10}; \quad (2.155)$$

- latura marginală $\Gamma_{11}(y_1 = a_1; 0 \leq y_2 \leq a_2)$:

$$\bar{\sigma}_{11}(x, y) = 0; U_2(x, y) = 0; G_T(y, \xi) = 0; x, \xi \in D; y \equiv (a_1, y_2) \in \Gamma_{11}. \quad (2.156)$$

- latura marginală $\Gamma_{20}(0 \leq y_1 \leq a_1; y_2 = 0)$:

$$\bar{\sigma}_{22}(x, y) = 0; U_1(x, y) = 0; G_T(y, \xi) = 0; x, \xi \in D; y \equiv (y_1, 0) \in \Gamma_{20}. \quad (2.157)$$

- latura marginală $\Gamma_{21}(0 \leq y_1 \leq a_1; y_2 = a_2)$:

$$\bar{\sigma}_{21}(x, y) = 0; U_2(x, y) = 0; \partial G_T(y, \xi) / \partial n_{21} = 0; x, \xi \in D; y \equiv (y_1, a_2) \in \Gamma_{21}. \quad (2.158)$$

Toate CL (2.155) - (2.158) sunt prezentate în Figura 2.20.

Cum a fost menționat mai sus, această PL a fost rezolvată în [48] și funcțiile de influență ale tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură au următoarea formă:

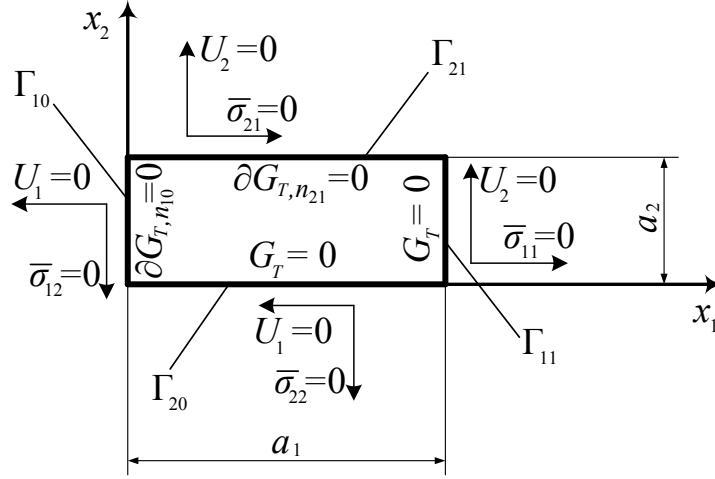


Fig. 2.20. Schema dreptunghiului cu condițiile de limită mecanice $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{12}$, $\bar{\sigma}_{22}$, U_1 , U_2 și termice G_T , $\partial G_{T,n}$ de pe laturile marginale Γ_{10} , Γ_{11} , Γ_{20} și Γ_{21} .

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11}(x, \xi) = & -\frac{\gamma\mu}{(\lambda+2\mu)} \left\{ \left(1 - \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\bar{E}\bar{E}_1\tilde{E}_2\tilde{E}_{12}}{\tilde{E}\tilde{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_{12}} + x_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\bar{E}\tilde{E}_1\tilde{E}_2\bar{E}_{12}}{\tilde{E}\bar{E}_1\bar{E}_2\tilde{E}_{12}} \right. \\
& - \frac{2}{a_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_1 e^{\nu_1 a_1} \cosh \nu_1 a_1} \left[\left(1 - \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) \cosh \nu_1 x_1 \cosh \nu_1 \xi_1 \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{a_1 e^{\nu_1 a_1} \cosh \nu_1 x_1}{\cosh \nu_1 a_1} - x_1 \sinh \nu_1 x_1\right) \nu_1 \cosh \nu_1 \xi_1 \right] \sin \nu_1 x_2 \sin \nu_1 \xi_2 \right\}, \quad (2.159)
\end{aligned}$$

Funcțiile \bar{E} , \bar{E}_1 , \bar{E}_2 , \bar{E}_{12} , \tilde{E} , \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 și \tilde{E}_{12} se determină după relațiile (2.149), iar ν_1 se va calcula în felul următor: $\nu_1 = (2m - 1)\pi/2a_2$; $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{22}(x, \xi) = & -\frac{\gamma\mu}{(\lambda+2\mu)} \left\{ \left(1 + \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\bar{E}\bar{E}_1\tilde{E}_2\tilde{E}_{12}}{\tilde{E}\tilde{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_{12}} - x_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\bar{E}\tilde{E}_1\tilde{E}_2\bar{E}_{12}}{\tilde{E}\bar{E}_1\bar{E}_2\tilde{E}_{12}} \right. \\
& - \frac{2}{a_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_1 e^{\nu_1 a_1} \cosh \nu_1 a_1} \left[\left(1 + \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) \cosh \nu_1 x_1 \cosh \nu_1 \xi_1 \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{a_1 e^{\nu_1 a_1} \cosh \nu_1 x_1}{\cosh \nu_1 a_1} - x_1 \sinh \nu_1 x_1\right) \nu_1 \cosh \nu_1 \xi_1 \right] \sin \nu_1 x_2 \sin \nu_1 \xi_2 \right\}; \\
\bar{\sigma}_{12}(x, \xi) = & \frac{\gamma\mu}{(\lambda+2\mu)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left\{ \xi_1 \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\bar{E}\bar{E}_1\tilde{E}_2\tilde{E}_{12}}{\tilde{E}\tilde{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_{12}} - x_1 \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\bar{E}\tilde{E}_1\tilde{E}_2\bar{E}_{12}}{\tilde{E}\bar{E}_1\bar{E}_2\tilde{E}_{12}} \right.
\end{aligned} \quad (2.160)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2}{a_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_1 e^{\nu_1 a_1} \cosh \nu_1 a_1} [\xi_1 \cosh \nu_1 x_1 \cosh \nu_1 \xi_1 \\
& + \left(x_1 \sinh \nu_1 x_1 - \frac{a_1 e^{\nu_1 a_1} \cosh \nu_1 x_1}{\cosh \nu_1 a_1} \right) \sinh \nu_1 \xi_1] \sin \nu_1 x_2 \sin \nu_1 \xi_2 \}. \tag{2.161}
\end{aligned}$$

Graficele tensiunilor normale termice $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi)$, $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi)$ și tensiunii tangențiale termice $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi)$ în dreptunghiul $D \equiv (0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq a_2)$; $a_1 = 8m, a_2 = 5m$, de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură aplicată în punctul cu coordonatele $x_1 = 4m, x_2 = 2m$ sunt prezentate în Figura 2.21. Aceste grafice au fost construite în baza expresiilor (2.159) - (2.161) la numărul de termeni $n = 20$ cu următoarele valori ale constantelor de elasticitate și termoelasticitate: coeficientul Poisson $\nu = 0,3$; modulul de elasticitate $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, iar coeficientul dilatării termice liniare $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} (K^{-1})$.

Concluzii:

Analizând graficele tensiunilor termice $\sigma_{ij}(\xi)$ din Figura 2.21 se poate afirma:

- tensiunile termice $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$ și $\bar{\sigma}_{12}$ satisfac CL (2.155) - (2.158) impuse inițial, cum se vede din Figura 2.21, a), $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi) = 0$ pentru $\xi_1 = a_1$. Figura 2.21, b), $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi) = 0$ pentru $\xi_2 = 0$. Din Figura 2.21, c), $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi) = 0$ pentru $\xi_1 = 0$ și $\xi_2 = a_2$;
- în punctul de aplicare a sursei unitare punctiforme de căldură $x_1 = 4m, x_2 = 2m$, tensiunile termice normale $\bar{\sigma}_{11}$ și $\bar{\sigma}_{22}$ au un maximum local, iar tensiunea termică tangențială $\bar{\sigma}_{12}$ are un salt în acest punct. Punctul de aplicare a sursei unitare punctiforme de căldură se numește punct de singularitate.

Programa Maple 18 permite calcularea expresiilor voluminoase care conțin atât sume de funcții elementare, cât și serii ordinare infinite ca produse dintre funcții trigonometrice și funcții hiperbolice.

2.5. Validarea problemelor de limită bidimensionale

Folosind MRIA s-au determinat FPTG $U_i(x, \xi); i = 1, 2$ pentru o PL în formă de pătrime de plan $P(0 \leq x_1, x_2 < \infty)$ cu condițiile termice de limită de tip Dirichlet și următoarele condiții de limită mecanice:

- pe latura marginală: $\Gamma_{10}(y_1 = 0; 0 \leq y_2 < \infty)$:

$$U_1(x, y) = U_2(x, y) = 0; x \in P; G_T(y, \xi) = 0; y \equiv (0, y_2) \in \Gamma_{10}; \tag{2.162}$$

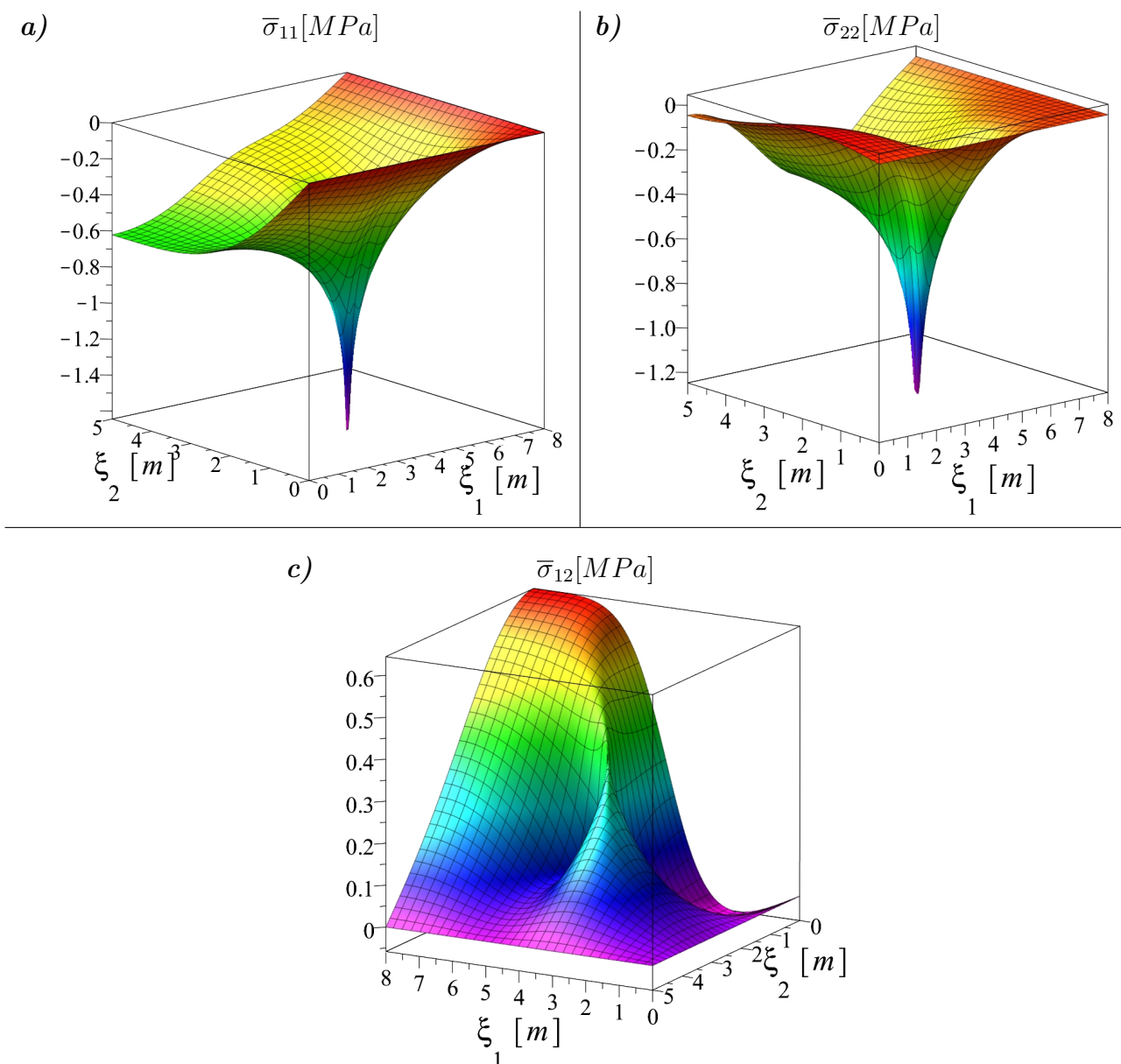


Fig. 2.21. Graficele tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ în dreptunghiul D în limitele $0 \leq \xi_1 \leq 8$; $0 \leq \xi_2 \leq 5$ de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură.

- pe latura marginală $\Gamma_{20}(0 \leq y_1 < \infty; y_2 = 0)$:

$$\bar{\sigma}_{22}(x, y) = 0; U_1(x, y) = 0; x \in P; G_T(y, \xi) = 0; y \equiv (y_1, 0) \in \Gamma_{20}. \quad (2.163)$$

CL mecanice și cele termice (2.162), (2.163) sunt prezentate în Figura 2.22.

Folosind aceeași metodologie de rezolvare a PL în formă de pătrime de plan, expusă în §2.2. au fost obținute FPTG.

Expresiile finale ale funcțiilor de influență ale deplasărilor termice de la o sursă unitară punctiformă de căldură $U_i(x, \xi)$; $i = 1, 2$ au următoarea formă:

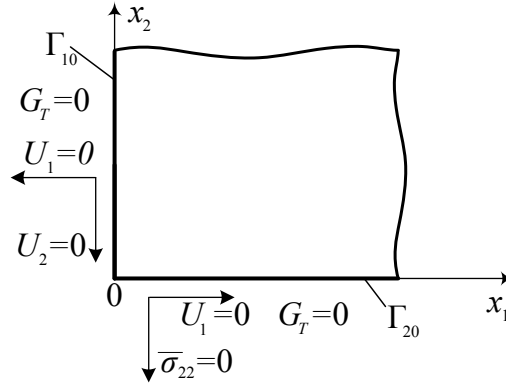


Fig. 2.22. Schema pătrimii de plan cu condițiile de limită mecanice U_1 , U_2 , $\bar{\sigma}_{22}$, U_1 și termice G_T de pe laturile Γ_{10} și Γ_{20} .

$$U_1(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[-(x_1 - \xi_1) \ln \frac{r_1 r_2}{r r_{12}} + 4 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x_1 \xi_1 (x_1 + \xi_1) \left(\frac{1}{r_1} \ln r_{10} - \frac{1}{r_{12}} \right) \right]; \quad (2.164)$$

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ (x_2 - \xi_2) \left[\ln \frac{r}{r_1} - 4 \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \right) \frac{x_1 \xi_1}{r_1} \right] + (x_2 + \xi_2) \left[\ln \frac{r_2}{r_{12}} - 4 \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \right) \frac{x_1 \xi_1}{r_{12}} \right] \right\}. \quad (2.165)$$

În literatura de specialitate [59], sunt cunoscute expresiile deplasărilor termoelastice pentru PL în formă de pătrime de plan de la o sursă unitară punctiformă de căldură cu CL enunțate în problemă. Această PL fiind rezolvată prin MG Θ -C. La compararea acestor rezultate, care au fost obținute prin folosirea ambele metode, se observă, că aceste expresii ale deplasărilor termice $U_i(x, \xi); i = 1, 2$ corespund în totalitate. Deci, rezultatele obținute la rezolvarea PL folosind MRIA sunt exacte.

2.6. Concluzii la capitolul 2

- Expresia FG (2.25) poate fi folosită în conductibilitatea termică staționară pentru determinarea câmpului interior de temperatură pentru fâșia V , în cazul în care, în interiorul fâșiei este aplicată o sursă de căldură și/sau pe diferite intervale ale laturilor fâșiei fluxul de căldură este diferit de zero. Această funcție se va utiliza la calcularea deplasărilor și tensiunilor termice pentru fâșia V .

- Relația câmpului interior de temperatură (2.41) poate fi folosită la determinarea temperaturii pentru fâșie cu CL de tip Dirichlet de orice dimensiune și valoare a gradientului de temperatură, care acționează pe un anumit interval pe laturile $x_2 = 0$ și/sau $x_2 = a_2$. Relația câmpului interior de temperatură (2.50) pentru fâșia cu CL de tip Neumann poate fi folosită la determinarea temperaturii pentru fâșie cu orice dimensiune și valoare a gradientului de temperatură, care acționează pe un anumit interval pe laturile $x_2 = 0$, iar pe latura $x_2 = a_2$ fluxul de căldură este zero. Dacă temperatura nu va fi o constantă ci o funcție, atunci va fi necesar de calculat din nou integrala (2.34). Câmpul interior de temperatură deja determinat poate fi folosit în domeniul termoelasticității la obținerea deplasărilor și tensiunilor termice în fâșie.
- Soluțiile integrale ale FPTG (2.85), (2.86) și relațiile tensiunilor termice (2.90) - (2.92) de la o sursă unitară punctiformă de căldură pentru fâșie, pot fi folosite la obținerea expresiilor termoelastice, de la acțiunea unei surse interioare de căldură cu CL enunțate în problemă;
- Soluțiile integrale ale tensiunilor termice (2.106), (2.110), (2.114) pot fi folosite pentru determinarea tensiunilor termice în fâșie, de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat pe una sau ambele laturi cu CL enunțate în problemă;
- Soluțiile integrale ale FPTG (2.128), (2.129) și relațiile tensiunilor termice (2.132) - (2.134) de la o sursă unitară punctiformă de căldură pentru pătrimea de plan P pot fi folosite la obținerea expresiilor termoelastice, de la acțiunea unei surse interioare de căldură cu CL enunțate în problemă;
- Soluțiile integrale ale tensiunilor termice (2.142) - (2.144) pot fi folosite pentru determinarea tensiunilor termice în pătrimea de plan P , de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare aplicat pe latura Γ_{20} cu CL enunțate în problemă;
- Expresiile deplasărilor termoelastice (2.148) și ale tensiunilor termice (2.151) - (2.153) pot fi folosite pentru determinarea deplasărilor și tensiunilor termice în semifâșie, de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat în limita unui dreptunghi pe suprafața semifâșiei, cu CL enunțate în problemă;
- Au fost validate PL rezolvate prin MRIA, unde s-a demonstrat, că folosind această metodă, se obțin rezultate exacte.

3. SOLUȚII INTEGRALE TERMOELASTICE PENTRU PROBLEMELE DE LIMITĂ TRIDIMENSIONALE

3.1. Funcții de influență și soluții integrale pentru semispațiul termoelastic

Formularea generală a problemei.

Să se determine deplasările termoelastice $u_i(\xi)$; $i = 1, 2, 3$ pentru o problemă particulară de limită într-un domeniu de forma unui semispațiu $S(0 \leq x_1 < \infty, -\infty < x_2, x_3 < \infty)$ cu CL de tip Dirichlet [6]. În limitele acestui domeniu acționează un gradient de temperatură $T_0 = const.$ pe un anumit segment de pe axa x_3 a planului marginal $\Gamma_{10}(y_1 = 0, -\infty < y_2, y_3 < \infty)$:

$$T(y) = \begin{cases} T_{10}(0, y_2, y_3) = T_0 = const, y \in (y_1 = 0; y_2 = c; a \leq y_3 \leq b); y \in \Gamma_{10}; \\ T_{10}(0, y_2, y_3) = 0, \\ y \in (y_1 = 0; -\infty < y_2, y_3 < \infty) / (y_1 = 0; y_2 = c; a \leq y_3 \leq b), y \in \Gamma_{10}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Condițiile mecanice de limită pentru planul marginal Γ_{10} sunt următoarele:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0. \quad (3.2)$$

CL termice 3.1 și cele mecanice 3.2 pentru problema particulară a semispațiului sunt prezentate în Figura 3.1.

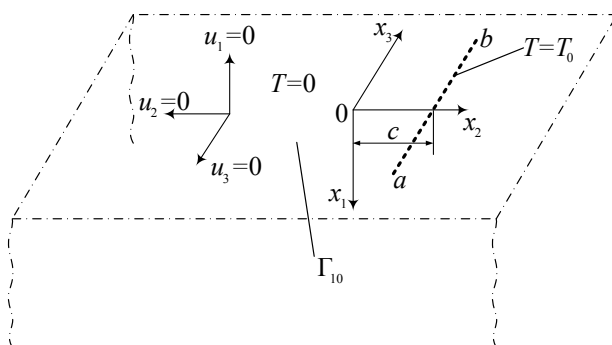


Fig. 3.1. Schema semispațiului $S(0 \leq x_1 < \infty, -\infty < x_2, x_3 < \infty)$ cu condițiile de limită mecanice u_1, u_2, u_3 și termice T de pe planul marginal $\Gamma_{10}(y_1 = 0; -\infty < y_2, y_3 < \infty)$.

Pentru a rezolva problema enunțată mai sus este necesar să se determine FPTG ale deplasărilor $U_i(x, \xi)$; $i = 1, 2, 3$ de la o sursă unitară punctiformă de căldură.

3.1.1. Determinarea deplasărilor termoelastice pentru semispațiu de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură

Să se determine FPTG ale deplasărilor $U_i(x, \xi); i = 1, 2, 3$ pentru o PL într-un domeniu de forma unui semispațiu $S(0 \leq x_1 < \infty, -\infty < x_2, x_3 < \infty)$ cu condițiile termice de limită de tip Dirichlet ($G_T = 0$), de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură aplicată în limita acestui domeniu, pe planul marginal al căruia $\Gamma_{10}(y_1 = 0; -\infty < y_2, y_3 < \infty)$ sunt date și următoarele condiții mecanice de limită [21]:

$$U_1 = U_2 = U_3 = 0; \quad (3.3)$$

Condițiile mecanice și cele termice omogene de limită pentru problema de limită sunt prezentate în Figura 3.2.

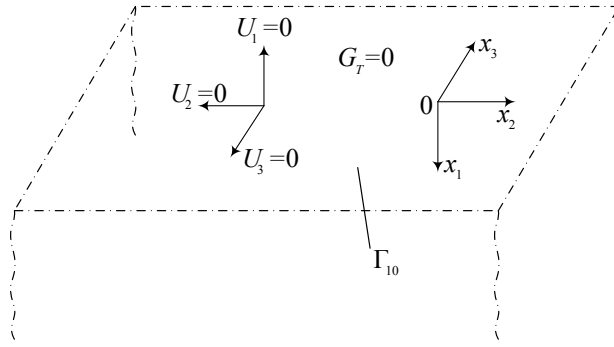


Fig. 3.2. Schema semispațiului $S(0 \leq x_1 < \infty, -\infty < x_2, x_3 < \infty)$ cu condițiile de limită mecanice U_1, U_2, U_3 și termice G_T de pe planul marginal $\Gamma_{10}(y_1 = 0; -\infty < y_2, y_3 < \infty)$.

În literatura de specialitate sunt rezolvate PL pentru semispațiu prin alte metode și cu alte condiții mecanice și termice de limită [35, 39, 106].

Fie $S(0 \leq x_1 < \infty, -\infty < x_2, x_3 < \infty)$ un semispațiu în care trebuie să fie calculate deplasările termice $U_i(x, \xi); i = 1, 2, 3$; $x \equiv (x_1, x_2, x_3), \xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, pentru aceasta s-au rezolvat ecuațiile Lamé:

$$\mu \nabla_{\xi}^2 U_i(x, \xi) + (\lambda + \mu)\Theta_{,\xi_i}(x, \xi) - \gamma G_{T,\xi_i}(x, \xi) = 0; i = 1, 2, 3, \quad (3.4)$$

cu următoarele condiții mecanice și termice de limită:

- pe planul marginal $\Gamma_{10}(y_1 = 0; -\infty < y_2, y_3 < \infty)$:

$$U_1(x, y) = U_2(x, y) = U_3(x, y) = 0; x \in S; G_T(y, \xi) = 0; y \equiv (0, y_2, y_3) \in \Gamma_{10}; \quad (3.5)$$

La rezolvarea acestei probleme s-a utilizat MRIA prin folosirea formulelor structurale $U_i(x, \xi)$ și $\Theta(x, \xi)$ care au fost demonstrate în teorema 13 din monografia [56, p. 154], pentru un sistem 3D cu CL (3.5) și au următoarea formă:

$$U_i(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\xi_i G_T(x, \xi) - x_i G_i(x, \xi) - 2x_1 \xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_i} W_T(x, \xi) \right]; i = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

unde:

$W_T(x, \xi)$ - partea regulată a FG $\overline{G}_T(x, \xi)$;

$$B = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu};$$

$\overline{G}_T(x, \xi)$ - FG cu CL inversă, adică pentru planul marginal Γ_{10} , derivata funcției pe normala exterioară la planul marginal ia valoarea zero $\frac{\partial \overline{G}_T(x, \xi)}{\partial n_y} = -\frac{\partial \overline{G}_T(x, \xi)}{\partial y_1} = 0$.

Dilatarea de volum s-a determinat folosind relația:

$$\Theta(x, \xi) = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} \left(G_T(x, \xi) + \frac{2\mu}{\lambda + \mu} B^{-1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} W_T(x, \xi) \right). \quad (3.7)$$

FG $G_T; G_\Theta$ și $G_i; i = 1, 2, 3$ sunt legate cu CL (3.5) în felul următor: dacă este dată deplasarea, atunci FG este egală cu zero, deci, pentru planul marginal Γ_{10} :

$$U_1 = U_2 = U_3 = 0; G_T = 0 \Rightarrow G_1 = G_2 = G_3 = G_\Theta = 0. \quad (3.8)$$

FG $G_T; G_\Theta; G_1; G_2$ și G_3 pentru semispațiul S se extrag din [10, p. 191], [50, p. 134] și se calculează cu următoarele expresii:

$$G_1 = G_2 = G_3 = G_T = G_\Theta = G^{(1)} = \frac{1}{4\pi} (R^{-1} - R_1^{-1}), \quad (3.9)$$

unde:

$$R = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}; R_1 = \sqrt{(x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}.$$

FG $\overline{G}_T(x, \xi)$ cu CL inversă, adică $\overline{G}_{T,1} = 0$ pentru Γ_{10} se stabilește din [10, p. 191], [50, p. 134] și are forma:

$$\overline{G}_T(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} (R^{-1} + R_1^{-1}). \quad (3.10)$$

Partea regulată a FG $\overline{G}_T(x, \xi)$ (3.10) reprezintă acea parte a funcției, care conține indicele inferior 1, adică partea, care se reflectă față de suprafața Γ_{10} , deci $W_T(x, \xi)$ din (3.6) și (3.7) s-a determinat cu următoarea relație:

$$W_T(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} (R_1^{-1}). \quad (3.11)$$

Se înlocuiesc expresiile (3.9) și (3.4.) în relația (3.6) și în urma transformărilor necesare se obțin expresiile finale ale funcțiilor de influență pentru deplasările termice $U_i(x, \xi)$; $i = 1, 2, 3$ în semispațiul S :

$$U_1(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_1 - x_1)(R^{-1} - R_1^{-1}) - 2x_1\xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} R_1^{-1} \right]; \quad (3.12)$$

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_2 - x_2)(R^{-1} - R_1^{-1}) - 2x_1\xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} R_1^{-1} \right]; \quad (3.13)$$

$$U_3(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_3 - x_3)(R^{-1} - R_1^{-1}) - 2x_1\xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_3} R_1^{-1} \right]. \quad (3.14)$$

Construirea graficelor deplasărilor termoelastice U_i pentru semispațiu.

Folosind programa Maple 18 au fost construite graficele deplasărilor termoelastice $U_i(x, \xi)$; $i = 1, 2, 3$, în semispațiul S , în limitele $0 \leq \xi_1 \leq 10$, $-10 \leq \xi_3 \leq 10$ și a planului care trece prin punctul $\xi_2 = 1$. Sursa unitară punctiformă de căldură a fost aplicată în punctul cu coordonatele $x_1 = 5m, x_2 = 2m, x_3 = 0$. Pentru constantele elastice și termice s-au luat în calcul următoarele valori: coeficientul Poisson $\nu = 0,3$; modulul de elasticitate $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, iar coeficientul dilatarei termice liniare $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} (K^{-1})$.

Deplasările termoelastice $U_1(x, \xi)$, $U_2(x, \xi)$ și $U_3(x, \xi)$ au fost determinate în baza formulelor (3.12) - (3.14) și sunt prezentate în Figura 3.3.

Concluzii:

Dacă se analizează graficele din Figura 3.3 se observă următoarele:

- se respectă CL (3.5) enunțate în problemă: pentru planul marginal Γ_{10} unde $U_1(x, \xi) = 0$ (Figura 3.3, a); $U_2(x, \xi) = 0$ (Figura 3.3, b); $U_3(x, \xi) = 0$ (Figura 3.3, c); $\xi \equiv (\xi_1 = 0; -\infty \leq \xi_2, \xi_3 \leq \infty)$;
- graficul deplasării termice $U_2(x, \xi)$ are un maxim local în punctul de aplicare a sursei unitare punctiforme de căldură (Figura 3.3, b). Celelalte grafice $U_1(x, \xi)$ și $U_3(x, \xi)$ au un salt în imediata apropiere de acest punct. Aceasta se datorează planului ($\xi_2 = 1$) față de care s-a ales să fie construite graficele.
- dacă valorile $\xi_1 \rightarrow \infty$ și/sau $\xi_3 \rightarrow \pm\infty$, atunci deplasările termice $U_1(x, \xi)$; $U_2(x, \xi)$ și $U_3(x, \xi) \rightarrow 0$.

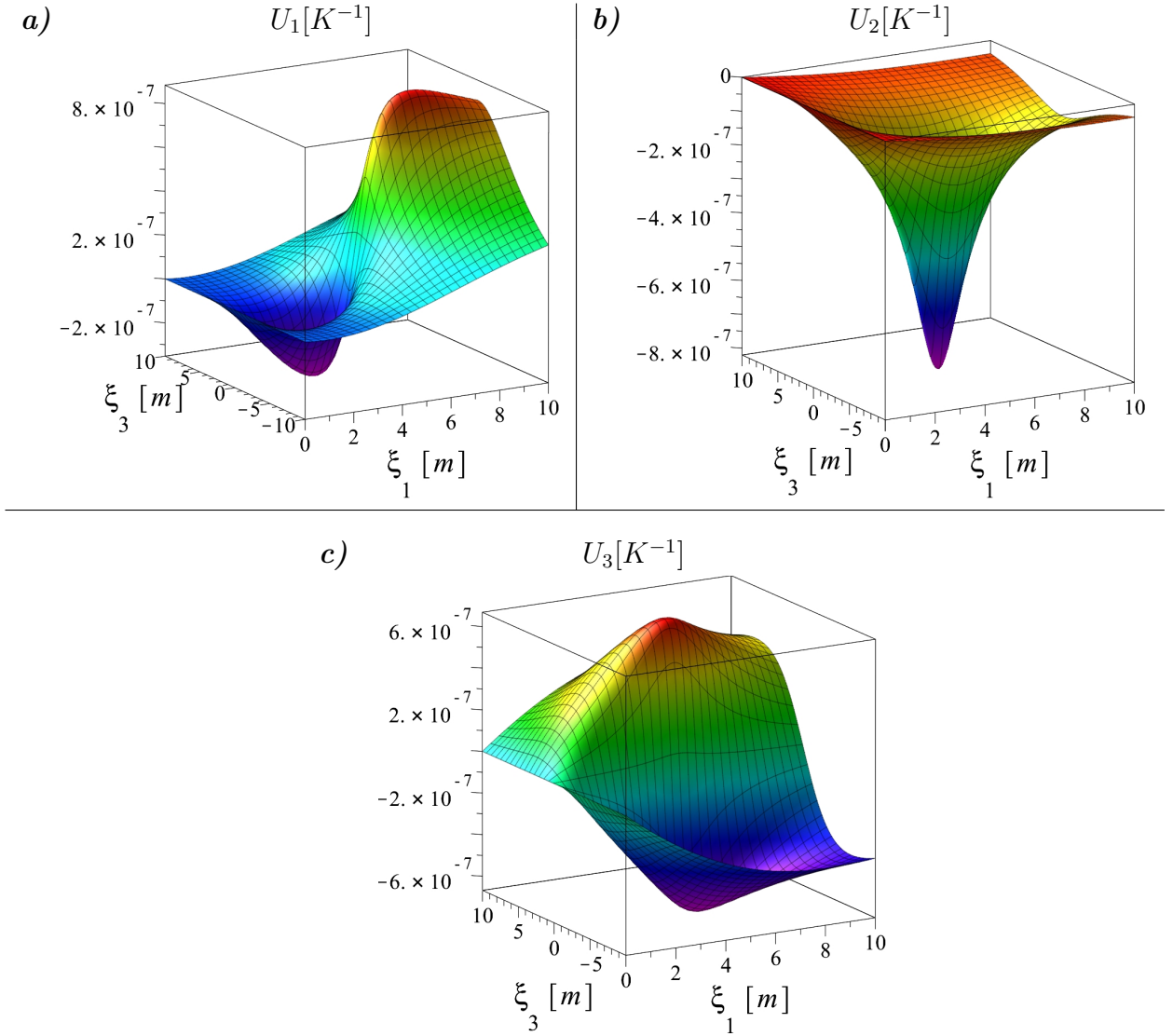


Fig. 3.3. Graficele deplasărilor termice $U_i(x, \xi)$ în semispațiul S în limitele $0 \leq \xi_1 \leq 10$; $\xi_2 = 1$; $-10 \leq \xi_3 \leq 10$ de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură.

3.1.2. Determinarea tensiunilor termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură pentru semispațiu

La determinarea expresiilor pentru tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ se folosește legea Duhamel-Neumann (2.3), unde $\Theta(x, \xi)$ - dilatarea de volum se calculează după formula (3.7), care pentru această problemă are forma:

$$\Theta(x, \xi) = \frac{\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left(R^{-1} - R_1^{-1} + \frac{2\mu}{\lambda + \mu} B^{-1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} R_1^{-1} \right). \quad (3.15)$$

Substituind expresia pentru FG $G_T(x, \xi)$ (3.9), a dilatarii de volum $\Theta(x, \xi)$ (3.15) și a funcțiilor de influență a deplasărilor termice $U_i(x, \xi)$; $i = 1, 2, 3$ (3.12) - (3.14) în legea Duhamel-

Neumann (2.3) se obțin funcțiile termoelastice pentru tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}$ [21]:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] R^{-1} - \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right) R_1^{-1} \right. \\ \left. + 2x_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} R^{-1} \left(1 - 2\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} R_1^{-1} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{12}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + (\xi_2 - x_2) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right] (R^{-1} - R_1^{-1}) \right. \\ \left. - 4x_1 \xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} R_1^{-1} \right\}; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{22}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_2 - x_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 1 \right] (R^{-1} - R_1^{-1}) \right. \\ \left. + 2x_1 B^{-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{\partial}{\partial \xi_1} R_1^{-1} - \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} R_1^{-1} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{23}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_2 - x_2) \frac{\partial}{\partial \xi_3} + (\xi_3 - x_3) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right] (R^{-1} - R_1^{-1}) \right. \\ \left. - 4x_1 \xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} R_1^{-1} \right\}; \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{33}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_3 - x_3) \frac{\partial}{\partial \xi_3} - 1 \right] (R^{-1} - R_1^{-1}) \right. \\ \left. + 2x_1 B^{-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{\partial}{\partial \xi_1} R_1^{-1} - \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} R_1^{-1} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{13}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_3} + (\xi_3 - x_3) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right] (R^{-1} - R_1^{-1}) \right. \\ \left. - 4x_1 \xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_3} R_1^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Soluțiile obținute pentru semispațiu, sunt incluse în Anexa D.

Construirea graficelor tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ pentru semispațiu.

Folosind programa Maple 18 au fost construite graficele tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$, în

semispațiul S , în limitele $-10 \leq \xi_2, \xi_3 \leq 10$ și a planului care trece prin punctul $\xi_1 = 0, 5$. Sursa unitară punctiformă de căldură a fost aplicată în punctul cu coordonatele $x_1 = 5m$, $x_2 = 0, x_3 = 0$. Pentru constantele elastice și termice au fost luate în calcul aceleași valori ca și pentru deplasările termice $U_i(x, \xi)$; $i = 1, 2, 3$.

Graficele tensiunii normale termice $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi)$ și a celei tangențiale $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi)$ au fost construite în baza formulelor (3.16), (3.17) și sunt prezentate în Figura 3.4.

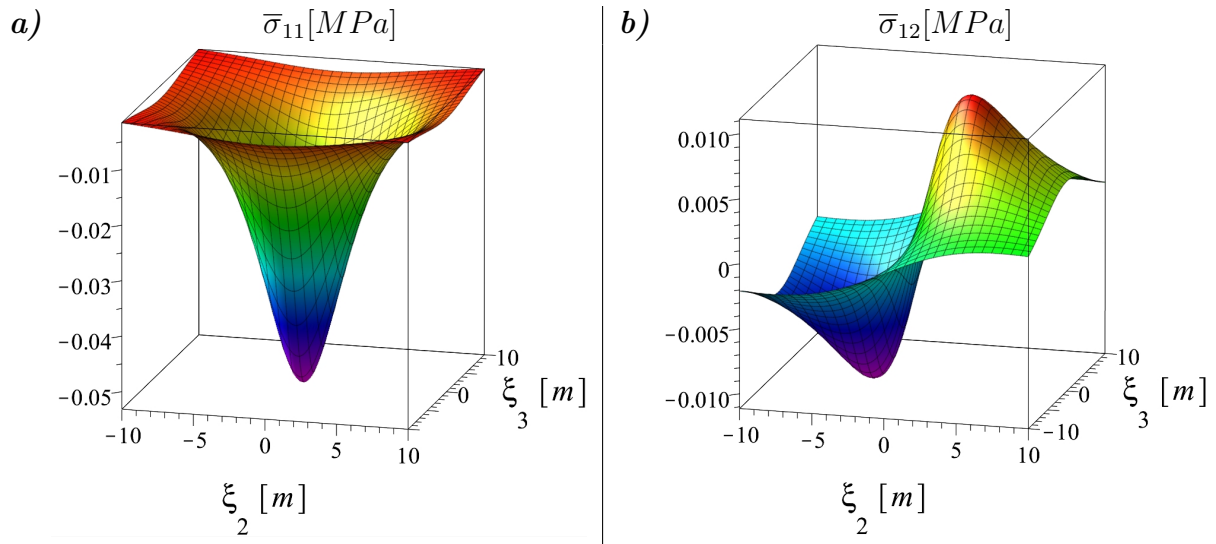


Fig. 3.4. Graficele tensiunii normale termice $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi)$ și a tensiunii tangențiale termice $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi)$ în semispațiul S în limitele $\xi_1 = 0, 5$; $-10 \leq \xi_2, \xi_3 \leq 10$, cauzate de o sursă unitară punctiformă de căldură.

Analizând graficele din Figura 3.4 se observă următoarele:

- graficul din Figura 3.4, a) are un maximum local în punctul de aplicare a sursei unitare punctiforme de căldură $x_1 = 5m, x_2 = 0, x_3 = 0$, iar graficul din Figura 3.4, b) are un salt în imediata apropiere a acestui punct;
- dacă valorile $\xi_2, \xi_3 \rightarrow \pm\infty$, atunci tensiunile termice $\bar{\sigma}_{11}(x, \xi)$ și $\bar{\sigma}_{12}(x, \xi) \rightarrow 0$.

Graficele tensiunii normale termice $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi)$ și a celei tangențiale $\bar{\sigma}_{23}(x, \xi)$ au fost construite în baza formulelor (3.18), (3.19) și sunt prezentate în Figura 3.5.

Analizând graficele din Figura 3.5 se observă următoarele:

- graficul din Figura 3.5, a) are un maximum local în punctul de aplicare a sursei unitare punctiforme de căldură $x_1 = 5m, x_2 = 0, x_3 = 0$, iar graficul din Figura 3.5, b) are un salt în imediata apropiere a acestui punct;
- dacă valorile $\xi_2, \xi_3 \rightarrow \pm\infty$, atunci tensiunile termice $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi)$ și $\bar{\sigma}_{23}(x, \xi) \rightarrow 0$.

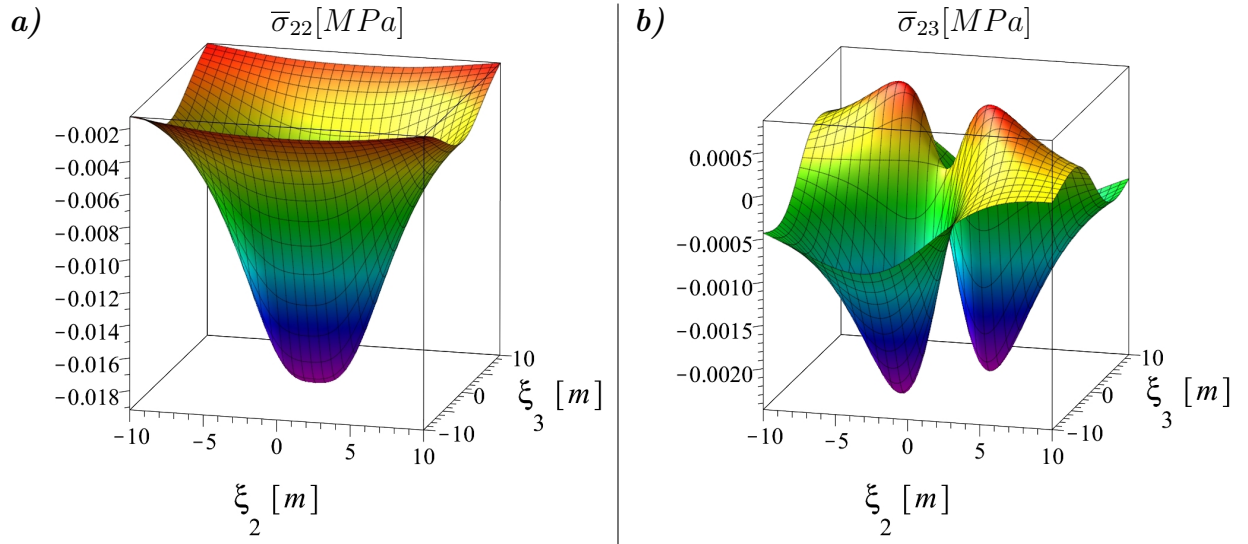


Fig. 3.5. Graficele tensiunii normale termice $\bar{\sigma}_{22}(x, \xi)$ și a tensiunii tangențiale termice $\bar{\sigma}_{23}(x, \xi)$ în semispațiul S în limitele $\xi_1 = 0, 5; -10 \leq \xi_2, \xi_3 \leq 10$, cauzate de o sursă unitară punctiformă de căldură.

Graficele tensiunii normale termice $\bar{\sigma}_{33}(x, \xi)$ și a celei tangențiale $\bar{\sigma}_{13}(x, \xi)$ au fost construite în baza formulelor (3.20), (3.21) și sunt prezentate în Figura 3.6.

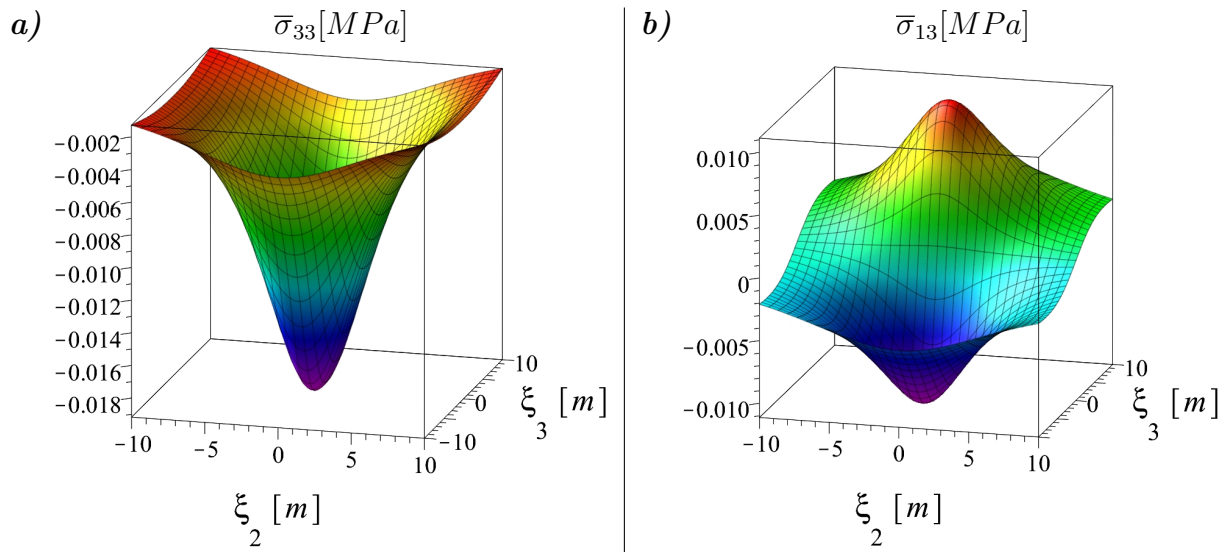


Fig. 3.6. Graficele tensiunii normale termice $\bar{\sigma}_{33}(x, \xi)$ și a tensiunii tangențiale termice $\bar{\sigma}_{13}(x, \xi)$ în semispațiul S în limitele $\xi_1 = 0, 5; -10 \leq \xi_2, \xi_3 \leq 10$, cauzate de o sursă unitară punctiformă de căldură.

Analizând graficele din Figura 3.6 se observă următoarele:

- graficul din Figura 3.6, a) are un maximum local în punctul de aplicare a sursei unitare punctiforme de căldură $x_1 = 5m, x_2 = 0, x_3 = 0$, iar graficul din Figura 3.6, b) are un salt în imediata apropiere a acestui punct;
- dacă valorile $\xi_2, \xi_3 \rightarrow \pm\infty$, atunci tensiunile termice $\bar{\sigma}_{33}(x, \xi)$ și $\bar{\sigma}_{13}(x, \xi) \rightarrow 0$.

Concluzii:

- Relațiile pentru deplasările termoelastice $U_i(x, \xi); i = 1, 2, 3$ (3.12) - (3.14) și tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi); i, j = 1, 2, 3$ (3.16) - (3.21) pentru semispațiul S cu CL (3.5) au fost determinate pentru prima dată. Toate expresiile au fost obținute în funcții elementare.
- Deplasările termoelastice $U_i(x, \xi); i = 1, 2, 3$ și tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi); i, j = 1, 2, 3$ au fost prezentate grafic folosind programa Maple 18, cu analiza ulterioară a acestor grafice.
- Cu ajutorul acestor expresii pot fi obținute reprezentările grafice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură, aplicată în orice punct din acest domeniu. Folosind relațiile deplasărilor termoelastice $U_i(x, \xi); i = 1, 2, 3$ (3.12 - 3.14) și a tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi); i, j = 1, 2, 3$ (3.16 - 3.21) de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură pot fi calculate deplasările termoelastice (folosind relația (2.1)), respectiv tensiunile termice (folosind relația (2.5)) pentru o problemă de limită particulară, de la acțiunea unei surse interioare de căldură aplicată în limita acestui domeniu și/sau de la acțiunea unui gradient de temperatură aplicat pe planul marginal Γ_{10} .

3.1.3. Deplasările termoelastice u_i în semispațiu S pentru o problemă particulară de limită

Conform condițiilor termice de limită (3.2), rezultă: sursa interioară de căldură $F(x) = 0$, fluxul de căldură $a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} = 0$, schimbul de căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului $\left[\alpha T(y) + a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} \right] = 0$. Semispațiul S este acționat doar de un gradient de temperatură aplicat pe segmentul ($y_1 = 0; y_2 = c; a \leq y_3 \leq b$), de pe planul marginal $\Gamma_{10}(a, b, c \in \Gamma_{10}; a < b)$ [6]. Astfel, formula integrală de tipul Green (2.1) se scrie în felul următor:

$$u_i(\xi) = - \int_a^b T_{10}(0, y_2, y_3) Q_i(0, y_2, y_3; \xi) dy_3, \quad (3.22)$$

unde:

$$Q_i(0, y_2, y_3; \xi) = (\partial/\partial y_1)U_i = -(\partial/\partial n_y)U_i. \quad (3.23)$$

Se substituie expresiile U_i din relațiile (3.12) - (3.14) în formula (3.23):

$$Q_1 = \frac{\partial U_1}{\partial y_1} = \frac{\gamma}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1^2}{R_{10}^3}; \quad (3.24)$$

$$Q_2 = \frac{\partial U_2}{\partial y_1} = \frac{\gamma}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1(\xi_2 - c)}{R_{10}^3}; \quad (3.25)$$

$$Q_3 = \frac{\partial U_3}{\partial y_1} = \frac{\gamma}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1(\xi_3 - y_3)}{R_{10}^3}, \quad (3.26)$$

unde: $R_{10} = \sqrt{\xi_1^2 + (c - \xi_2)^2 + (y_3 - \xi_3)^2}$; iar y_2 s-a luat egal cu c , deoarece pe ordonata $y_2 = c$ se află gradientul de temperatură.

Relațiile (3.24) – (3.26) se înlocuiesc pe rând în formula (3.22), se rezolvă integralele și se obțin expresiile finale ale deplasărilor termoelastice $u_i(\xi)$, în semispațiul S , de la acțiunea gradientului de temperatură aplicat pe axa x_3 , a planului marginal Γ_{10} conform CL (3.1) și (3.2).

$$u_1 = \frac{\gamma T_0}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1^2(y_3 - \xi_3)}{[\xi_1^2 + (c - \xi_2)^2] R_{10}} \Big|_a^b; \quad (3.27)$$

$$u_2 = \frac{\gamma T_0}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1(\xi_2 - c)(y_3 - \xi_3)}{[\xi_1^2 + (c - \xi_2)^2] R_{10}} \Big|_a^b; \quad (3.28)$$

$$u_3 = \frac{\gamma T_0}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1}{R_{10}} \Big|_a^b. \quad (3.29)$$

Construirea graficelor deplasărilor termoelastice u_i pentru semispațiu.

Folosind programa Maple 18 au fost construite graficele deplasărilor termice u_i , în semispațiul S , de la acțiunea unui gradientul de temperatură $T_0 = 50K$, aplicat pe segmentul $y_1 = 0$; $y_2 = c$; $a \leq y_3 \leq b$; ($a = -4m$, $b = 4m$, $c = 2m$) a planului marginal Γ_{10} .

Deoarece, aceasta este o problemă 3D, atunci, pentru a construi graficele deplasărilor termoelastice, pe rând, se va fixa câte o variabilă, iar graficele vor fi prezentate în raport cu variabilele rămase. Pentru constantele elastice și termice au fost luate în calcul următoarele valori: coeficientul Poisson $\nu = 0.3$; modulul de elasticitate $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, iar coeficientul dilatării termice liniare $\alpha_t = 1.2 \cdot 10^{-5}(K^{-1})$.

S-au construit graficele deplasărilor termoelastice $u_i(\xi)$; $i = 1, 2, 3$, în semispațiul S , în limitele $-10 \leq \xi_2, \xi_3 \leq 10$ și a planului care trece prin punctul $\xi_1 = 1$. Deplasările termice u_1, u_2 și u_3 au fost obținute în baza formulelor (3.27) – (3.29) și sunt prezentate în Figura 3.7.

S-au construit graficele deplasărilor termice $u_i(\xi)$, în semispațiul S , în limitele $0 \leq \xi_1 \leq 10$; $-10 \leq \xi_3 \leq 10$ și a planului care trece prin punctul $\xi_2 = 1$. Deplasările termice u_1, u_2 și u_3 au fost calculate folosind formulele (3.27) – (3.29) și sunt prezentate în Figura 3.8.

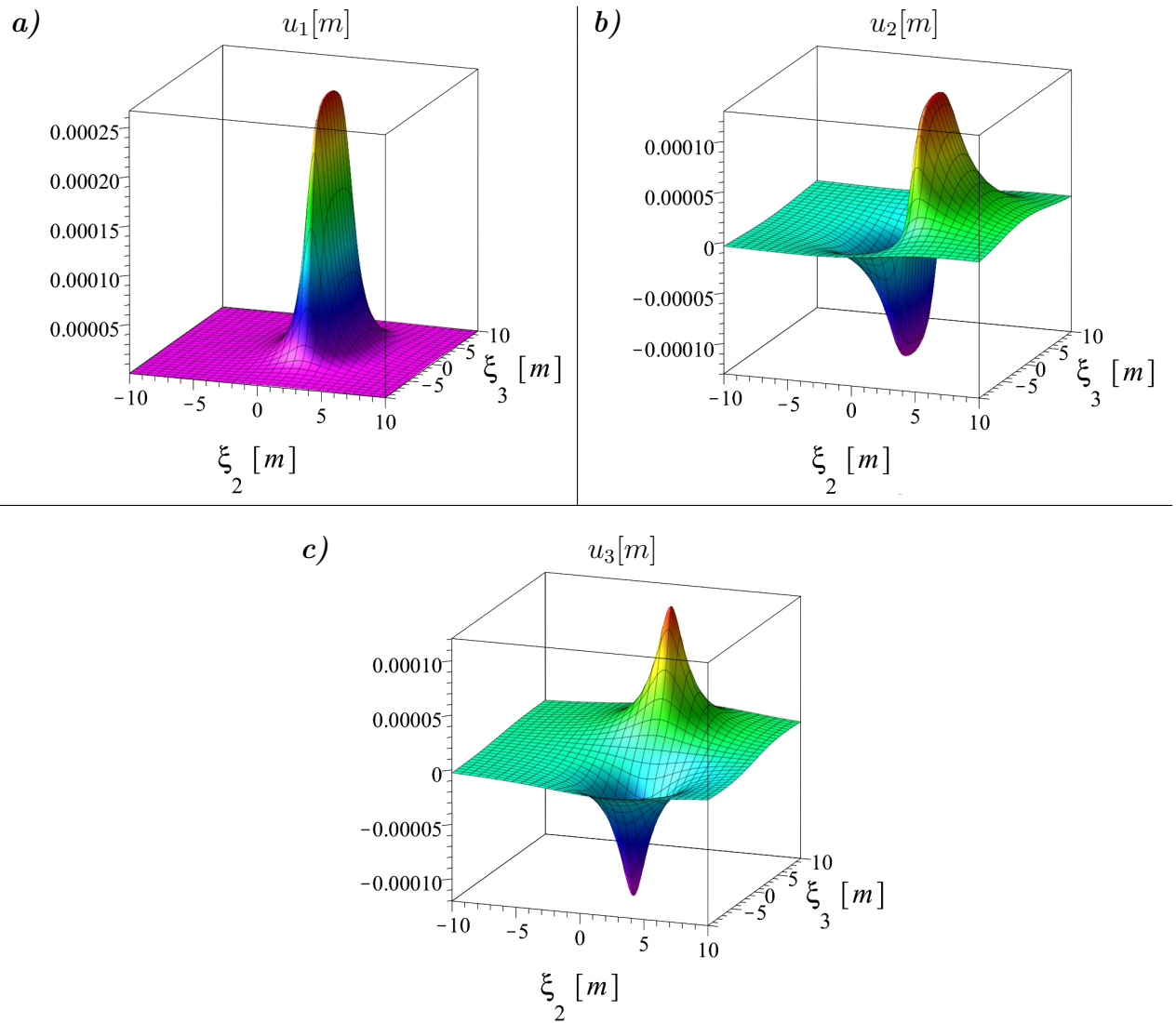


Fig. 3.7. Graficele deplasărilor termoelastice $u_i(\xi)$, în semispațiul S , în limitele $\xi_1 = 1$; $-10 \leq \xi_2, \xi_3 \leq 10$ de la acțiunea unui gradient de temperatură.

S-au construit graficele deplasărilor termice $u_i(\xi)$ în semispațiul S în limitele $0 \leq \xi_1 \leq 10$; $-10 \leq \xi_2 \leq 10$ și a planului care trece prin punctul $\xi_3 = 1$. Deplasările termice u_1, u_2 și u_3 au fost determinate în baza formulelor (3.27) – (3.29) și sunt prezentate în Figura 3.9.

Analizând graficele din Figurile 3.7 – 3.9 se observă următoarele:

- se respectă CL din relațiile (3.1) și (3.2) enunțate în problemă: pentru planul marginal $\Gamma_{10} \rightarrow u_1 = u_2 = u_3 = 0$;
- graficele deplasărilor termoelastice u_1 și u_2 au un salt de-a lungul segmentului unde este aplicat gradientul de temperatură (Figura 3.7, a,b), Figura 3.8, a,b) și Figura 3.9, a,b);
- graficele deplasărilor termoelastice u_3 au un maximum local la capătul segmentului unde

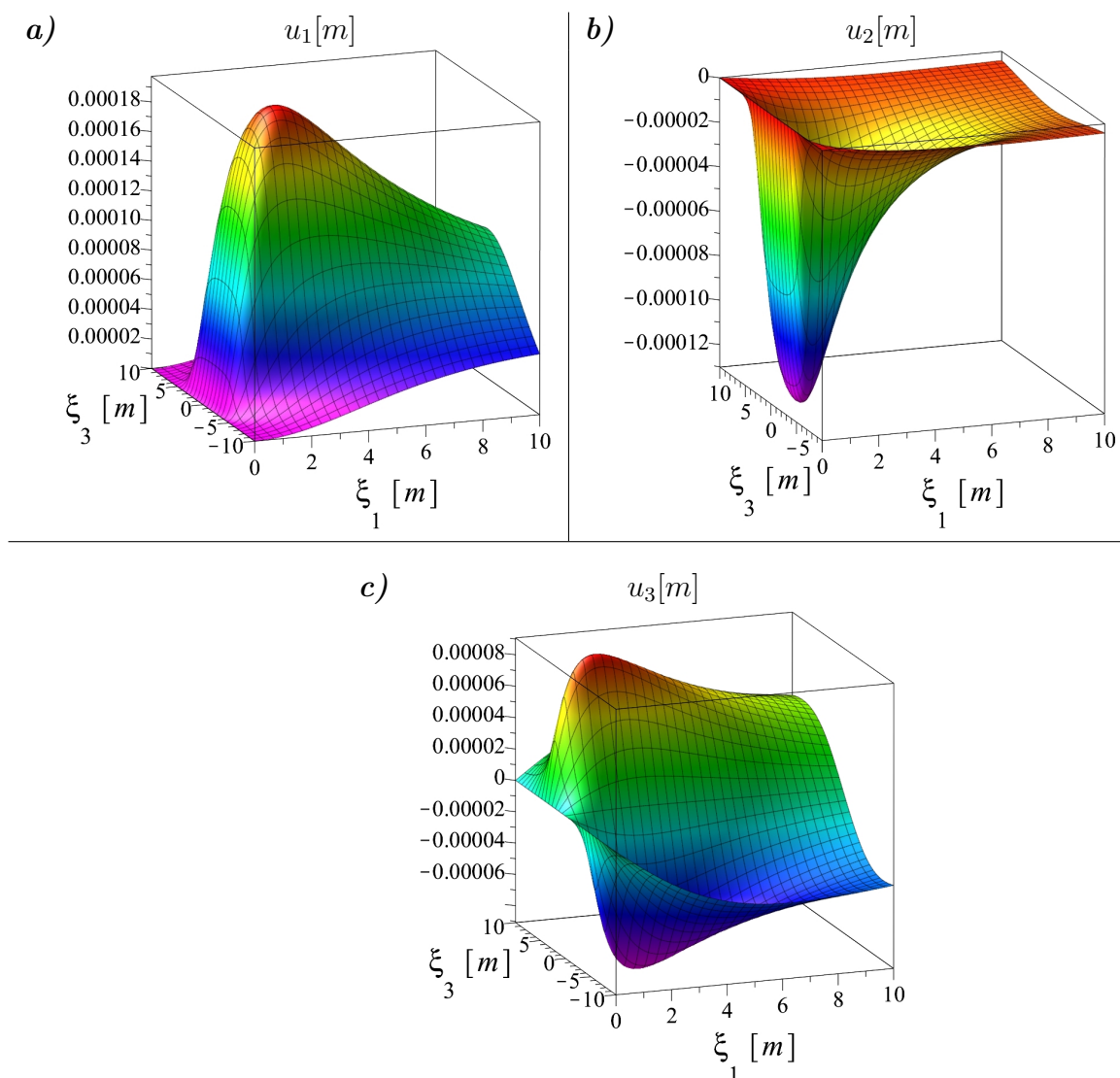


Fig. 3.8. Graficele deplasărilor termoelastice $u_i(\xi)$, în semispațiul S , în limitele $0 \leq \xi_1 \leq 10$; $\xi_2 = 1$; $-10 \leq \xi_3 \leq 10$ de la acțiunea unui gradient de temperatură.

este aplicat gradientul de temperatură (Figura 3.7, *c*), Figura 3.8, *c*) și Figura 3.9, *c*);

- dacă valorile $\xi_1 \rightarrow \infty$ sau $\xi_2, \xi_3 \rightarrow \pm\infty$, atunci deplasările termoelastice din semispațiu, $u_1 = u_2 = u_3 \rightarrow 0$.

Concluzii:

- Relațiile deplasărilor termoelastice $u_i(\xi)$ (3.27) – (3.29) pentru semispațiul S cu CL (3.2), de la acțiunea unui gradient de temperatură (3.1), au fost determinate pentru prima dată. Toate expresiile au fost obținute în funcții elementare;
- Deplasările termoelastice $u_i(\xi)$ au fost reprezentate grafic în raport cu fiecare ordonată: pentru $\xi_1 = 1$; $-10 \leq \xi_2, \xi_3 \leq 10$, pentru $0 \leq \xi_1 \leq 10$; $\xi_2 = 1$; $-10 \leq \xi_3 \leq 10$ și pentru

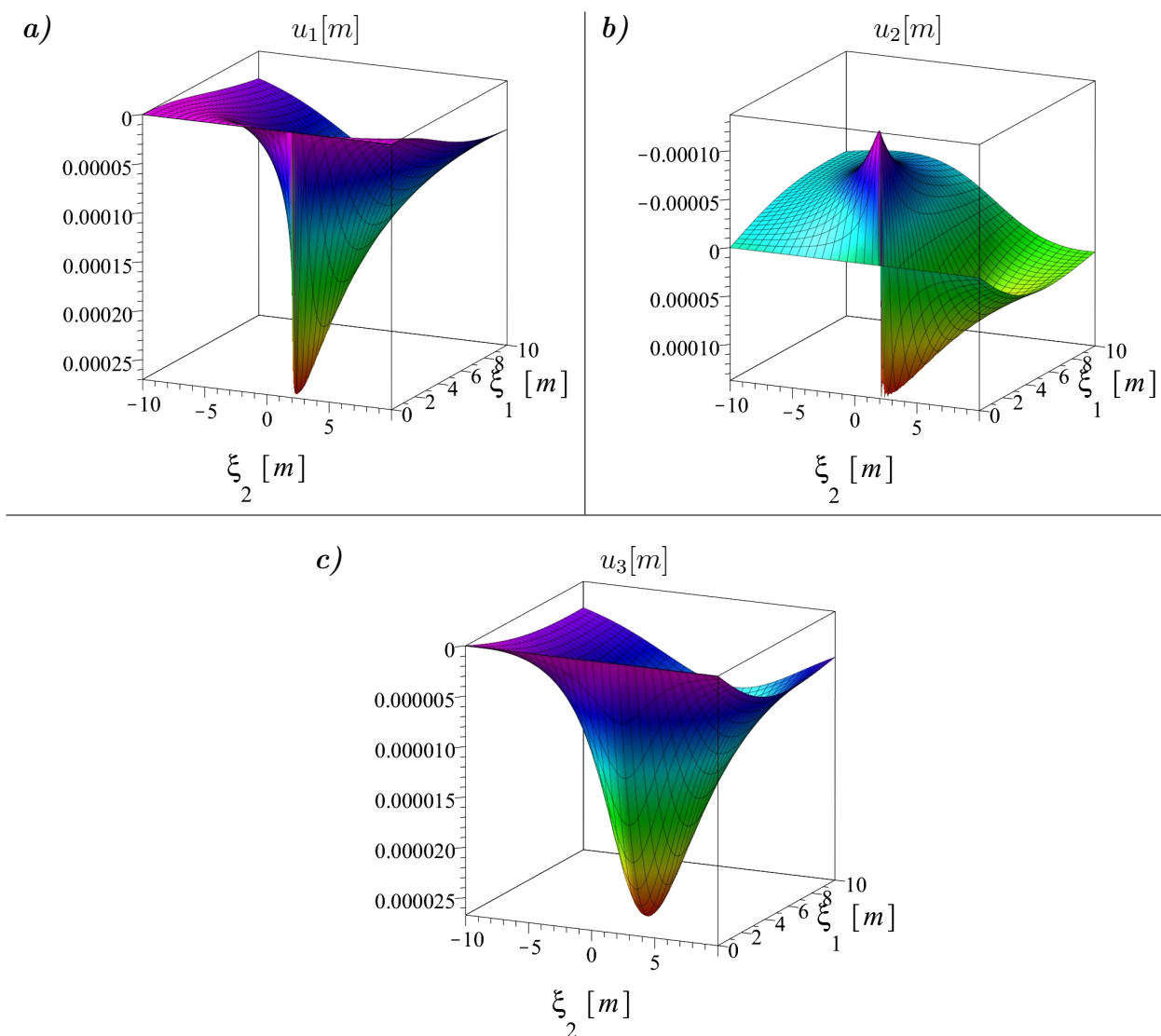


Fig. 3.9. Graficele deplasărilor termoelastice $u_i(\xi)$, în semispatiul S , în limitele $0 \leq \xi_1 \leq 10$; $-10 \leq \xi_2 \leq 10$; $\xi_3 = 1$ de la acțiunea unui gradient de temperatură.

$0 \leq \xi_1 \leq 10$; $-10 \leq \xi_2 \leq 10$; $\xi_3 = 1$, folosind programa Maple 18, cu analiza ulterioară a acestor grafice;

- Folosind expresiile (3.27) – (3.29) pot fi obținute reprezentările grafice de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat în limita oricărui segment pe direcția axei x_3 a planului marginal Γ_{10} . Aplicând formula Duhamel-Neumann (2.4) și relațiile de deplasărilor termoelastice $u_i(\xi)$, de la acțiunea unui gradient de temperatură, pot fi calculate tensiunile termice pentru o problemă particulară de limită, provenite de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat în limita oricărui segment, pe direcția axei x_3 a planului marginal Γ_{10} . Fiind cunoscute expresiile analitice pot fi construite graficele acestor tensiuni termice.

3.2. Funcții de influență, formule integrale și soluții explicite pentru pana sferică termoelastice

Obiectivul principal al rezolvării acestei probleme este de a demonstra teorema redată în §3.2.3., referitor la obținerea funcțiilor termoelastice Green și a formulei integrale de tip Green pentru o pană sferică izotropă tridimensională $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi)$; $\alpha = \pi/n; n = 2, 3, 4..$, care este limitată de semiplanurile $\Gamma_{\varphi 0}(0 \leq r < \infty; \varphi = 0; 0 \leq \beta \leq \pi)$ și $\Gamma_{\varphi \alpha}(0 \leq r < \infty; \varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi)$, unde coordonatele sferice folosite sunt: r, φ, β [61].

Pentru obținerea formulei integrale de tip Green, pe semiplanurile $\Gamma_{\varphi 0}$ și $\Gamma_{\varphi \alpha}$ condițiile mecanice omogene de limită sunt mixte și anume: pe suprafața $\Gamma_{\varphi 0}$ deplasarea normală și tensiunea tangențială este egală cu zero, iar pe suprafața $\Gamma_{\varphi \alpha}$ tensiunea normală și deplasarea tangențială este egală cu zero. Câmpul termoelastic a deplasărilor este cauzat de o sursă interioară de căldură $F(M), M(r, \varphi, \beta) \in V$, cu CL de tip Dirichlet pentru temperatura T și de CL de tip Neumann, pentru fluxul de căldură a semiplanelor $\Gamma_{\varphi 0}$ și $\Gamma_{\varphi \alpha}$.

Formula integrală de tip Green este obținută în baza funcțiilor termoelastice Green $U_q(M, N)$ (§3.2.3.). Acestea reprezintă funcțiile de influență de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură descrisă de către funcția Dirac, aplicat într-un punct $M(r, \varphi, \beta) \in V$ și a deplasărilor termoelastice, aplicat în punctul $N(\rho, \psi, \vartheta)$ pe direcția axelor $q = \rho, \psi, \vartheta$.

La rezolvarea acestei PL a fost utilizată MG Θ -C. La baza formulării și rezolvării acestei probleme a stat necesitatea determinării deplasărilor termoelastice în corpuri cu coordonate sferice (pana sferică), prin generalizarea MG Θ -C și continuarea cercetărilor efectuate de T. Speianu [8]. În această lucrare [8] au fost rezolvate și obținute deplasările pentru corpuri din sistemul de coordonate cartezian, polar etc., dar nu au fost obținute pentru coordonatele sferice.

La determinarea funcțiilor termoelastice Green $U_q(M, N)$ este necesar:

- să se construiască două FG: funcția de influență de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură - $G(M, N)$ pentru PL a conductibilității termice și funcția de influență de la acțiunea unei forțe unitare concentrate aplicate în punctul $N(\rho, \psi, \vartheta) \in V$, pe direcția $q = \rho, \psi, \vartheta$, a dilatării de volum $\Theta^{(q)}(M, N)$ în punctul $M(r, \varphi, \beta) \in V$, pentru PL a elasticității;
- să se calculeze convoluția pe volum prin produsul acestor două funcții (procedurile matematice pentru a calcula aceste integrale pe volum).

În §3.2.3. este folosită o metodă specială pentru determinarea funcțiilor $\Theta^{(q)}(M, N)$. Această

metodă este bazată pe soluțiile reprezentărilor integrale propuse pentru ecuațiile fundamentale Lamé a elasticității, prin intermediul FGEP, care permit determinarea dilatării de volum la limitele panii sferice.

Folosind reprezentarea integrală pentru soluția ecuației de tip Poisson pentru dilatarea de volum, prin intermediul valorilor de limită cunoscute și prin intermediul FG respective, s-au obținut expresiile finale pentru funcțiile $\Theta^{(q)}(M, N)$ în interiorul panii sferice. Sunt prezentate două exemple de aplicare a dilatării de volum $\Theta^{(q)}(M, N)$ și a formulei integrale de tip Green obținute (§3.2.4.). Astfel, în exemplul 1, au fost obținute soluțiile exacte în funcții elementare pentru o problemă particulară de limită a termoelasticității pentru o pană sferică $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi); \alpha = \pi/n; n = 2, 3, 4..$, folosind funcțiile $\Theta^{(q)}(M, N)$ și formula integrală Maysel. Deplasările termice în această PL au fost obținute de la acțiunea unei temperaturi constante aplicată pe segmentul de rază $r_0 \leq r \leq r_1, \varphi = \varphi_0 = \alpha/2 = \pi/2n, \beta = \beta_0 = \pi/2$, plasat în interiorul semiplanului $\Gamma_{\varphi(\alpha/2)}(0 \leq r < \infty; \varphi = \alpha/2; 0 \leq \beta \leq \pi)$, în cazul în care suprafața Γ_{φ_0} este izolată termic, iar pe suprafața $\Gamma_{\varphi\alpha}$ temperatura nu este aplicată.

O altă soluție exactă a unei probleme particulare de limită pentru pana sferică termoelastică obținută în funcții elementare este prezentată în exemplul 2. Deplasările termoelastice $u_q(N)$ a PL au fost determinate de la acțiunea unui surse interioare de căldură $F(M) = F_0 = const. \in V$, aplicată pe segmentul de rază $[r_0 \leq r \leq r_1, \varphi = \varphi_0 = \alpha/2, \beta = \beta_0 = \pi/2] \in V$, a semiplanului interior $\Gamma_{\varphi(\alpha/2)}(0 \leq r < \infty; \varphi = \alpha/2; 0 \leq \beta \leq \pi)$. CL sunt omogene (CL de tip Neumann pentru suprafața Γ_{φ_0} și CL de tip Dirichlet pentru suprafața $\Gamma_{\varphi\alpha}$). În ambele probleme particulare de limită, condițiile mecanice omogene de limită sunt: pe suprafața Γ_{φ_0} deplasarea normală și tensiunea tangențială este egală cu zero, iar pe suprafața $\Gamma_{\varphi\alpha}$ tensiunea normală și deplasarea tangențială este egală cu zero. În urma rezolvării acestei probleme a fost necesară realizarea următoarelor obiective:

- analiza avantajelor, utilitatea și importanța rezultatelor obținute în comparație cu alte metode tradiționale de rezolvare a PL în termoelasticitate (§3.2.4.);
- analiza posibilităților de obținere a formulei integrale Green în termoelasticitate pentru alte domenii canonice sferice (§3.2.4.).

Pentru a atinge aceste obiective, așa cum a fost menționat mai sus, în primul rând, a fost necesar să fie demonstrată o teoremă (§3.2.3.), pentru obținerea funcțiilor termoelastice Green și formula integrală de tip Green pentru pana sferică V .

Pentru aceasta, se va folosi formula integrală generală Green în termoelasticitatea necuplată (§3.2.1.) și formula integrală pentru funcțiile de influență termoelastice (§3.2.2.) alcătuite de către V. Șeremet.

3.2.1. Formula integrală generală de tip Green în termoelasticitatea necuplată

FG are un rol important la determinarea soluțiilor integrale pentru PL în diferite domenii a fizicii matematice. Una dintre cele mai bune teorii dezvoltată și utilizată pe scară largă în calcule practice este teoria tensiunilor termice staționare, adică teoria termoelasticității necuplate, atunci când câmpul de temperatură nu depinde de domeniul deplasărilor elastice și atunci când termenii de inerție pot fi ignorați. Conform acestei teorii, formularea PL constă din ecuațiile neomogene Lamé, scrise pentru un punct interior arbitrar $M \equiv (r, \varphi, \beta)$ cu condițiile mecanice omogene de limită:

$$\begin{aligned} \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \left(u_r + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} (u_\beta \sin \beta) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \gamma \frac{\partial T}{\partial r} &= 0; \\ \mu \left[\nabla^2 u_\beta - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \beta} - \frac{u_\beta}{2 \sin^2 \beta} - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] + \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{\gamma}{r} \frac{\partial T}{\partial \beta} &= 0; \\ \mu \left[\nabla^2 u_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \beta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \text{ctg} \beta \frac{\partial u_\beta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r \sin \beta} \right) \right] + \frac{(\lambda + \mu)}{r \sin \beta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \frac{\gamma}{r \sin \beta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

unde: θ - dilatarea de volum termoelastică, cauzată de temperatura T :

$$\theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(2u_r + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \text{ctg} \beta u_\beta \right); \quad (3.31)$$

∇^2 - operatorul diferențial Laplace, scris în coordonate sferice;

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \beta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad (3.32)$$

λ, μ - sunt constante de elasticitate Lamé; $\gamma = \alpha_t(2\mu + 3\lambda)$ este constanta termoelastică; și α_t este coeficientul de dilatare termică liniară. Câmpul de temperatură T din (3.30) trebuie să fie determinat din PL a conductibilității termice a ecuației Poisson:

$$\nabla^2 T(r, \varphi, \beta) = -a^{-1} F(r, \varphi, \beta), \quad (3.33)$$

unde: $F(r, \varphi, \beta)$ - sursa interioară de căldură, condițiile neomogene de limită sunt redată de: $T(M)$ - temperatura, $a(\partial T(M)/\partial n_M)$ - fluxul de căldură, iar schimbul de căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului este descris de legea - $[\alpha T(M) + a(\partial T(M)/\partial n_M)]$; a - coeficientul

conductivității de temperatură; α - coeficientul conductibilității convective de căldură. Pentru a rezolva PL a termoelasticității staționare folosind ecuațiile (3.30) - (3.33) cu ajutorul metodelor tradiționale, înainte de toate, trebuie să fie rezolvată o PL a conductibilității termice, redată prin (3.33) cu CL și să fie determinat câmpul de temperatură.

Ulterior, a fost necesar să fie rezolvată o altă PL a termoelasticității (3.30), fiind deja cunoscut câmpul de temperatură cu condițiile mecanice de limită.

Folosind funcțiile de influență $U_q = U_q(M, N)$ din [9, 36, 37, 43, 44, 46], [50, p. 94] soluția (câmpul deplasărilor termoelastice) a PL termoelastică cu ecuațiile (3.30) - (3.33) pot fi scrise direct folosind următoarea formulă integrală de tip Green:

$$u_q(N) = a^{-1} \int_V F(M) U_q(M, N) dV(M) - \int_{\Gamma_D} T(\tilde{M}) \frac{\partial U_q(\tilde{M}, N)}{\partial n_{\tilde{M}}} d\Gamma_D(\tilde{M}) + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial T(\tilde{M})}{\partial n_{\tilde{M}}} U_q(\tilde{M}, N) d\Gamma_N(\tilde{M}) + \int_{\Gamma_M} \left[T(\tilde{M}) + \alpha^{-1} a \frac{\partial T(\tilde{M})}{\partial n_{\tilde{M}}} \right] U_q(\tilde{M}, \xi) d\Gamma_M(\tilde{M}), \quad (3.34)$$

unde: Γ_D, Γ_N și Γ_M - reprezintă CL de tip Dirichlet, Neumann și mixt. Avantajul acestei formule este că deplasările termoelastice căutate $U_q(N)$ sunt determinate sub formă de integrală direct de la acțiunea unei surse de căldură interioară și alte acțiuni termice, aplicate la hotar.

Rezultate analogice obținute cu funcția termoelastică Green și formula generală integrală de tip Green în dinamică termoelastică necuplată sunt prezentate în [45].

După determinarea deplasărilor termoelastice, folosind formula integrală de tip Green, respectivele tensiuni termice sunt determinate folosind legea Duhamel-Neumann:

$$\sigma_{ql} = 2\mu\varepsilon_{ql} + \delta_{ql}(\lambda\theta - \gamma T); q, l = \rho, \psi, \vartheta, \quad (3.35)$$

unde: δ_{ql} simbolul Kronecker.

3.2.2. Funcții de influență termoelastice

Funcțiile de influență de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură în pana sferică $U_q = U_q(M, N)$ (3.34) sunt determinate în baza formulei integrale [36, 44, 50]:

$$U_q(M, N) = \gamma \int_V G(M, N') \Theta^{(q)}(N', N) dV(N'); M, N, N' \in V, \quad (3.36)$$

unde: G este FG pentru o PL a conductibilității de căldură ce corespunde unei surse unitare punctiforme de căldură.

$$\Theta^{(q)} = \frac{\partial U_r^{(q)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(2U_r^{(q)} + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_\beta^{(q)}}{\partial \beta} + ctg\beta U_\beta^{(q)} \right), \quad (3.37)$$

$\Theta^{(q)}$ - sunt funcțiile de influență a dilatării de volumul elastic de la forțe unitare concentrate ce acționează asupra corpului, unde $U_s^{(q)}(M, N)$; $s = r, \varphi, \beta$; $q = \rho, \psi, \theta$ sunt componentele deplasărilor tensorului elastic Green, adică deplasarea punctul M pe direcția s , datorită unei forțe unitare aplicate în punctul N pe direcția q .

Ele satisfac următoarele ecuații Lamé:

$$\begin{aligned} \mu \left[\nabla^2 U_r^{(q)} - \frac{2}{r^2} \left(U_r^{(q)} + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} (U_\beta^{(q)} \sin \beta) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial \varphi} \right) \right] + \delta_{rq} \delta(M - N) &= 0; \\ \mu \left[\nabla^2 U_\beta^{(q)} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial U_r^{(q)}}{\partial \beta} - \frac{U_\beta^{(q)}}{2 \sin^2 \beta} - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial \varphi} \right) \right] + \delta_{\beta q} \delta(M - N) &= 0; \\ \mu \left[\nabla^2 U_\varphi^{(q)} + \frac{2}{r^2 \sin \beta} \left(\frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial \varphi} + ctg\beta \frac{\partial U_\beta^{(q)}}{\partial \varphi} - \frac{U_\varphi^{(q)}}{r \sin \beta} \right) \right] + \delta_{\varphi q} \delta(M - N) &= 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

cu condițiile mecanice omogene de limită corespunzătoare.

În ecuațiile (3.35) - (3.37) $M, N \in V$; $M \equiv (r, \varphi, \beta)$; $N \equiv (\rho, \psi, \theta)$, expresia $\delta(M - N)$ este funcția Dirac, iar δ_{sq} este simbolul Kronecker.

FG G din ecuația (3.36) trebuie să fie determinată din următoarea ecuație a conductibilității de căldură:

$$\nabla_M^2 G(M, N) = -\delta(M - N); M, N \in V, M \equiv (r, \varphi, \beta); N \equiv (\rho, \psi, \theta), \quad (3.39)$$

cu condițiile omogene de limită corespunzătoare. Funcțiile de influență $U_q(M, N)$ din ecuația (3.36) au următorul sens fizic: deplasarea unui punct interior de observației $M \equiv (r, \varphi, \beta)$, generată de o sursă unitară punctiformă de căldură, aplicată într-un punct interior $N \equiv (\rho, \psi, \theta)$ și descrisă de funcția Dirac δ . Conform ecuației (3.36), acestea sunt determinate de o convoluție a două funcții de influență a corpului V . Prima funcție de influență este FG G pentru PL a conductibilității de căldură. A doua este funcția de influență $\Theta^{(q)}(M, N)$ pentru PL în elasticitate. Astfel, aceste funcții sunt funcțiile de influență ce reprezintă dilatarea de volum a unui punct interior M a unei PL, care corespunde unei forțe unitare concentrate, aplicată într-un punct interior N , pe direcția axei sferice $q \equiv (\rho, \psi, \theta)$. În final, funcția de influență $U_q(M, N)$ este funcție de influență dublă [9, 43, 50], care ia în considerare ambele fenomene fizice (conductibilitatea de căldură și elasticitatea) a corpului solid și pot fi afirmate următoarele:

1. Coordonatele punctului de observație $M \equiv (r, \varphi, \beta)$ pentru deplasările termoelastice satisfac ecuațiile PL cu CL corespunzătoare pentru determinarea FG în teoria conductibilității de căldură (3.39), în care sursa unitară punctiformă de căldură se înlocuiește cu $\gamma\Theta^{(q)}(M, N)$:

$$\nabla_M^2 U_q(M, N) = -\gamma\Theta^{(q)}(M, N); M, N \in V, M \equiv (r, \varphi, \beta); N \equiv (\rho, \psi, \theta); \quad (3.40)$$

2. Coordonatele punctului de aplicare $N \equiv (\rho, \psi, \theta)$ a sursei unitare punctiforme de căldură, satisfac ecuațiile PL cu condițiile omogene mecanice de limită pentru determinarea componentelor matricei Green (3.38), în care forțele unitare concentrate se înlocuiesc cu derivatele FG pentru problema conductibilității de căldură și $U_s^{(q)}(M, N)$ se substituie cu $U_q(M, N)$:

$$\begin{aligned} \mu \left[\nabla^2 U_\rho - \frac{2}{\rho^2} \left(U_\rho + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (U_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial U_\psi}{\partial \psi} \right) \right] + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} + \gamma \frac{\partial G}{\partial \rho} &= 0; \\ \mu \left[\nabla^2 U_\vartheta - \frac{2}{\rho^2} \left(\frac{\partial U_\rho}{\partial \vartheta} - \frac{U_\vartheta}{2 \sin^2 \vartheta} - \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial U_\psi}{\partial \psi} \right) \right] + \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} &= 0; \quad (3.41) \\ \mu \left[\nabla^2 U_\psi + \frac{2}{\rho^2 \sin \vartheta} \left(\frac{\partial U_\rho}{\partial \psi} + ctg \vartheta \frac{\partial U_\vartheta}{\partial \psi} - \frac{U_\psi}{\rho \sin \vartheta} \right) \right] + \frac{(\lambda + \mu)}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial \Theta}{\partial \psi} + \frac{\gamma}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial G}{\partial \psi} &= 0. \end{aligned}$$

În ecuația (3.41), Θ este dilatarea de volum termoelastică cauzată de temperatura G . Având în vedere că toate funcțiile de influență din ecuația (3.34) se determină în mod independent la limită sau folosind limitele respective din funcțiile principale de influență $U_q(M, N)$, se poate remarca:

- a. Formula pentru funcțiile de influență, de la acțiunea unui flux unitar de căldură, redat prin legea $a \left[\partial T(\tilde{M}) / \partial n_{\tilde{M}} \right] = \delta(\tilde{M} - N)$, de pe suprafața Γ_N , sunt reprezentate de deplasările termoelastice:

$$\begin{aligned} U_q(\tilde{M}, N) &= \lim_{M \rightarrow \tilde{M}} U_q(M, N) = \lim_{M \rightarrow \tilde{M}} \gamma \int_V G(M, \bar{N}) \Theta^{(q)}(\bar{N}, N) dV(\bar{N}); \\ M, N, \bar{N} &\in V; \tilde{M} \in \Gamma_N; \end{aligned} \quad (3.42)$$

- b. Expresia pentru funcțiile de influență, care corespunde unei temperaturi unitare, descrisă cu formula $T(\tilde{M}) = \delta(\tilde{M} - N)$, de pe suprafața Γ_D , sunt reprezentate de deplasările termoelastice:

$$\frac{\partial U_q(\tilde{M}, N)}{\partial n_{\tilde{M}}} = \lim_{M \rightarrow \tilde{M}} \frac{\partial U_q(M, N)}{\partial n_M} = \lim_{M \rightarrow \tilde{M}} \gamma \int_V \frac{\partial G(\tilde{M}, \bar{N})}{\partial n_{\tilde{M}}} \Theta^{(q)}(\bar{N}, N) dV(\bar{N});$$

$$M, N, \bar{N} \in V; \tilde{M} \in \Gamma_D; \quad (3.43)$$

c. Relația pentru funcțiile de influență, ce corespunde schimbului de căldură unitar dintre corp și mediul exterior $[\alpha T(\tilde{M}) + a \partial T(\tilde{M}) / \partial n_{\tilde{M}}] = \delta(\tilde{M} - N)$, de pe suprafața Γ_M , sunt reprezentate de deplasările termoelastice:

$$U_q(\tilde{M}, N) = \lim_{M \rightarrow \tilde{M}} U_q(M, N) = \lim_{M \rightarrow \tilde{M}} \gamma \int_V G(M, \bar{N}) \Theta^{(q)}(\bar{N}, N) dV(\bar{N});$$

$$M, N, \bar{N} \in V; \tilde{M} \in \Gamma_M. \quad (3.44)$$

Expresia (3.34), deasemenea, poate fi rezolvată prin generalizarea formulei Maysel [31, 102], [106, p. 483]. Pentru acest caz, câmpul de temperatură satisface PL în conductibilitate termică. Deci, câmpul de temperatură a fost determinat de la acțiunea unei surse interioare de căldură, temperatură, flux de căldură și/sau schimbul de căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului aplicate la hotar. Avantajul formulei integrale propusă în ecuația (3.34) este: permite să fie comasate două etape de rezolvare a PL în teoria termoelasticității (prima etapă constă în determinarea câmpului de temperatură, iar a doua etapă cuprinde identificarea deplasărilor termoelastice), într-o singură etapă unică.

Avantajul formulei integrale din ecuația (3.34), în comparație cu formula generală integrală binecunoscută Maysel, este faptul că deplasările termoelastice sunt determinate în mod direct, prin acțiunile de căldură cunoscute la limită (sursă interioară de căldură, flux de căldură, gradient de temperatură, sau schimb de căldură dintre mediu exterior și suprafața corpului, etc.). În plus, pentru orice problema particulară de limită, se pot obține toate soluțiile posibile pentru diferite legi care descriu acțiunile de căldură menționate mai sus. Principalele dificultăți pentru realizarea practică a formulei integrale din ecuațiile (3.34) și (3.36) sunt: obținerea funcțiilor de influență a dilatării de volum elastic $\Theta^{(q)}$ de la acțiunea unei forțe unitare concentrate și a FG în conductibilitatea termică G . Plus la toate, trebuie să fie calculată o integrală de volum, ca produsul funcțiilor menționate mai sus.

Aceste dificultăți, în special obținerea funcțiilor $\Theta^{(q)}$, au fost depășite cu succes pentru domenii canonice carteziane [50]. Pentru domeniile cilindrice și sferice au fost propuse doar reprezentări integrale generale $\Theta^{(q)}$ și matricele Green [40, 47].

3.2.3. Obținerea funcțiilor Green și a formulei integrale pentru pana sferică termoelastică

În acest paragraf este prezentată o teoremă pentru determinarea deplasărilor termoelastice sub formă de integrală de volum și de suprafață pentru o pană sferică, care este un caz particular a formulei integrale generale din ecuația (3.34). Pentru a face acest lucru, în primul rând, pe baza teoriei descrise mai sus, s-au construit funcțiile de influență a deplasărilor termoelastice $U_q(M, N)$, de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură. În a doua etapă, s-au calculat (pe baza funcțiilor principale de influență $U_q(M, N)$) alte funcții de influență $U_q(\tilde{M}, N)$, $\partial U_q(\tilde{M}, N)/\partial n_{\varphi\alpha}$, de pe semiplanul marginal $\Gamma_{\varphi 0}$, $\Gamma_{\varphi\alpha}$, a panii sferice și s-a scris formula integrală de tip Green pentru respectiva PL a termoelasticității. La final s-a demonstrat că funcțiile de influență obținute și formulele integrale de tip Green satisfac CL respective.

Teoremă. Fie câmpul deplasărilor $u_q(N)$, a punctului interior $N \equiv (\rho, \psi, \theta)$, pentru pana sferică termoelastică $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi)$; $\alpha = \pi/n; n = 2, 3, \dots$ a fost determinat folosind ecuațiile Lamé (3.30) și $M \equiv (r, 0, \beta) \in \Gamma_{\varphi 0}$, $M \equiv (r, \alpha, \beta) \in \Gamma_{\varphi\alpha}$ pentru semiplanul marginal $\Gamma_{\varphi 0}(0 \leq r < \infty; \varphi = 0; 0 \leq \beta \leq \pi)$ și $\Gamma_{\varphi\alpha}(0 \leq r < \infty; \varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi)$ cu următoarele condițiile mecanice omogene de limită de tip mixt:

- pentru semiplanul $\Gamma_{\varphi 0}$:

$$u_\varphi(r, 0, \beta) = 0; \sigma_{\varphi\beta}(r, 0, \beta) = \sigma_{\varphi r}(r, 0, \beta) = 0; \varphi = 0; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq r < \infty; \quad (3.45)$$

- pentru semiplanul $\Gamma_{\varphi\alpha}$:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \alpha, \beta) = 0; u_\beta(r, \alpha, \beta) = u_r(r, \alpha, \beta) = 0; \varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq r < \infty, \quad (3.46)$$

unde $\sigma_{\varphi r}$, $\sigma_{\varphi\beta}$ și $\sigma_{\varphi\varphi}$ sunt tensiunile tangențiale și normale care se determină cu ajutorul legii Duhamel-Neumann (3.35).

Schema panii sferice este reprezentată în Figura 3.10.

Câmpul de temperatură $T(M)$ din (3.30), determinat de la acțiunea unei surse interioare de căldură $F(M)$, flux de căldură $S_{\varphi 0}(r, 0, \beta)$ (CL de tip Neumann) și temperatura $T_{\varphi\alpha}(r, \alpha, \beta)$ (CL de tip Dirichlet) trebuie să satisfacă următoarea PL în conductibilitate termică:

$$\begin{aligned} \nabla^2 T(M) &= -a^{-1} F(M); M \equiv (r, \varphi, \beta) \in V; \\ \partial T(r, 0, \beta) / \partial n_{\Gamma_{\varphi 0}} &= a^{-1} S_0(r, 0, \beta); \varphi = 0; \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$T(r, \alpha, \beta) = f(r, \alpha, \beta); \varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq r < \infty.$$

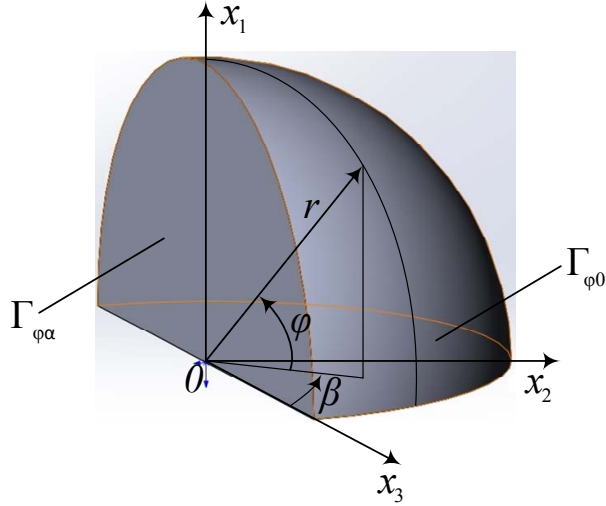


Fig. 3.10. Schema panii sferice termoelastice.

Dacă sursa interioară de căldură, fluxul de căldură și temperatura satisfac următoarele condiții:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} \int_0^{\pi} |F(r, \varphi, \beta)| r^2 dr d\varphi d\beta < \infty; \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} |S_{\varphi 0}(r, 0, \beta)| r dr d\beta < \infty; \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} T_{\varphi \alpha}(r, \alpha, \beta) r dr d\beta < \infty, \quad (3.48)$$

atunci soluția PL a termoelasticității, folosind ecuațiile (3.30) și (3.45) - (3.48), la determinarea deplasărilor $u_q(N)$ pentru pana sferică de mai sus, poate fi prezentată prin următoarea formulă integrală de tip Green:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(N) = a^{-1} & \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} \int_0^{\pi} F(r, \varphi, \beta) \mathbf{U}(r, \varphi, \beta; N) r^2 dr d\varphi d\beta \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} S_{\varphi 0}(r, 0, \beta) \mathbf{Q}_{\varphi 0}(r, 0, \beta; N) r dr d\beta \right] \quad (3.49) \\ & - \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} T_{\varphi \alpha}(r, \alpha, \beta) \mathbf{Q}_{\varphi \alpha}(r, \alpha, \beta; N) r dr d\beta; N \equiv (\rho, \psi, \vartheta), \end{aligned}$$

unde: $|\mathbf{u}(N)| < \infty$ atunci $\lim_{\rho \rightarrow \infty} u_q(N) \rightarrow 0$.

Matricele de influență de la o sursă unitară punctiformă de căldură, flux de căldură unitar pentru semiplanul marginal $\Gamma_{\varphi 0}$ și a temperaturii unitare pentru semiplanul marginal $\Gamma_{\varphi \alpha}$ pentru deplasările termoelastice: $U(M, N)$, $\mathbf{Q}_{\varphi 0}(r, 0, \beta; N) = \mathbf{U}_{\varphi 0}(r, 0, \beta; N)$ și $\mathbf{Q}_{\varphi \alpha}(r, \alpha, \beta; N) = \partial \mathbf{U}_{\varphi \alpha}(r, \alpha, \beta; N) / \partial n_{\varphi \alpha}$ și a matricei deplasărilor $\mathbf{u}(N)$ din ecuația (3.49), s-a determinat astfel:

a) Matricea $U(M, N)$:

$$U(M, N) = \begin{pmatrix} U_\rho \\ U_\psi \\ U_\vartheta \end{pmatrix} = -m \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \begin{pmatrix} f_k R_k^{-1} + f_{k\psi} R_{k\psi}^{-1} \\ r\zeta_k R_k^{-1} + r\zeta_{k\psi} R_{k\psi}^{-1} \\ r\eta_k R_k^{-1} + r\eta_{k\psi} R_{k\psi}^{-1} \end{pmatrix}; m = \gamma[8\pi(\lambda + 2\mu)]^{-1}, \quad (3.50)$$

unde:

$$\begin{aligned} R_k &= \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi - \omega_k)}; R_{k\psi} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi + \omega_k)}; \\ \cos(\phi - \omega_k) &= \sin \beta \sin \vartheta \cos(\varphi - \psi - 2k\pi/n) + \cos \beta \cos \vartheta; \\ \cos(\phi + \omega_k) &= \sin \beta \sin \vartheta \cos(\varphi + \psi - 2k\pi/n) + \cos \beta \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (3.51)$$

iar

$$\begin{aligned} f_k &= \rho - r \cos(\phi - \omega_k); f_{k\psi} = \rho - r \cos(\phi + \omega_k); \\ \zeta_k &= \sin \beta \sin(\varphi - \psi - 2k\pi/n); \zeta_{k\psi} = \sin \beta \sin(\varphi + \psi - 2k\pi/n); \\ \eta_k &= -(\sin \beta \cos \vartheta \cos(\varphi - \psi - 2k\pi/n) - \cos \beta \sin \vartheta); \\ \eta_{k\psi} &= -(\sin \beta \cos \vartheta \cos(\varphi + \psi - 2k\pi/n) - \cos \beta \sin \vartheta). \end{aligned} \quad (3.52)$$

b) Matricea $\mathbf{Q}_{\varphi 0}(r, 0, \beta; N)$ pentru semiplanul marginal $\Gamma_{\varphi 0}$:

$$\mathbf{Q}_{\varphi 0}(r, 0, \beta; N) = \begin{pmatrix} Q_{\varphi 0\rho} \\ Q_{\varphi 0\psi} \\ Q_{\varphi 0\vartheta} \end{pmatrix} = -m \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \begin{pmatrix} f_{k0} R_{k0}^{-1} \\ r\zeta_{k0} R_{k0}^{-1} \\ r\eta_{k0} R_{k0}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

unde:

$$\begin{aligned} R_{k0} &= \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi - \omega_k)}; \\ \cos(\phi - \omega_k) &= \sin \beta \sin \vartheta \cos(\psi + 2k\pi/n) + \cos \beta \cos \vartheta; \\ \cos(\phi + \omega_k) &= \sin \beta \sin \vartheta \cos(\varphi + \psi - 2k\pi/n) + \cos \beta \cos \vartheta; \\ f_{k0} &= \rho - r \cos(\phi - \omega_k); \zeta_{k0} = \sin \beta \sin(\psi + 2k\pi/n); \\ \eta_{k0} &= -(\sin \beta \cos \vartheta \cos(\psi + 2k\pi/n) - \cos \beta \sin \vartheta). \end{aligned} \quad (3.54)$$

c) Matricea $\mathbf{Q}_{\varphi\alpha}(r, \alpha, \beta; N)$ pentru semiplanul marginal $\Gamma_{\varphi\alpha}$:

$$\mathbf{Q}_{\varphi\alpha}(r, \alpha, \beta; N) = \begin{pmatrix} Q_{\varphi\alpha\rho} \\ Q_{\varphi\alpha\psi} \\ Q_{\varphi\alpha\vartheta} \end{pmatrix} = -2m \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \begin{pmatrix} R_{k\alpha}^{-1} - R_{k\alpha}^{-3} \rho f_{k\alpha} \\ r(R_{k\alpha}^{-1} s_{k\alpha} - R_{k\alpha}^{-3} \rho \zeta_{k\alpha}^2 r \sin \vartheta) \\ r(R_{k\alpha}^{-1} \cos \vartheta - R_{k\alpha}^{-3} \rho \eta_{k\alpha} r \sin \vartheta) \zeta_{k\alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

unde:

$$R_{k\alpha} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi - \omega_{k\alpha})}; \quad (3.56)$$

$$\cos(\phi - \omega_{k\alpha}) = \sin \beta \sin \vartheta \cos(\alpha - \psi - 2k\pi/n) + \cos \beta \cos \vartheta,$$

iar

$$f_{k\alpha} = \rho - r \cos(\phi - \omega_{k\alpha}); s_{k\alpha} = \sin \beta \cos(\alpha - \psi - 2k\pi/n);$$

$$\zeta_{k\alpha} = \sin \beta \sin(\alpha - \psi - 2k\pi/n); \quad (3.57)$$

$$\eta_{k\alpha} = -(\sin \beta \cos \vartheta \cos(\alpha\psi - 2k\pi/n) - \cos \beta \sin \vartheta).$$

Demonstrare. Pentru a obține matricea $U(M, N)$ din ecuația (3.50) pentru PL a ecuațiilor (3.30) și (3.45) - (3.48), se va folosi formula integrală din ecuația (3.36). Funcțiile $G(M, N)$ și $\Theta^{(q)}(M, N)$ în această ecuație sunt FG pentru problema mixtă a conductibilității termice și, respectiv, funcțiile de influență de la o forță unitară concentrată $\delta_{ql}\delta(M - N)$ a dilatării de volum în teoria elasticității, pentru pana sferică V . Deci, pentru a obține FG $G(M, N)$, trebuie să fie rezolvată o PL, care constă dintr-o ecuație a conductibilității termice cu condițiile omogene de limită, similare celor din (3.47):

$$\nabla_M^2 G(M, N) = -\delta(M - N); M, N \in V, M \equiv (r, \varphi, \beta); N \equiv (\rho, \psi, \theta); \quad (3.58)$$

$$\partial G / \partial \varphi = 0; 0 \leq r < \infty; \varphi = 0; 0 \leq \beta \leq \pi; G = 0; 0 \leq r < \infty; \varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Aplicând metoda [66, 86], FG pentru PL (3.58) s-a obținut în funcții elementare:

$$G = (4\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} (R_k^{-1} + R_{k\psi}^{-1}), \quad (3.59)$$

unde R_k și $R_{k\psi}$ se determină folosind formula (3.51).

Determinarea dilatării de volum $\Theta^{(q)}(M, N)$.

Pentru a obține funcțiile de influență $\Theta^{(k)}(x, \xi)$, de obicei, trebuie să fie rezolvată următoarea PL, care constă din ecuațiile fundamentale Lamé a teoriei elasticității (3.38) cu condițiile omo-

gene de limită, similare celor din ecuațiile (3.45) - (3.46):

$$\begin{aligned} U_\varphi^{(q)}(r, 0, \beta) = 0; \sigma_{\varphi\beta}^{(q)}(r, 0, \beta) = \sigma_{\varphi r}^{(q)}(r, 0, \beta) = 0; (r, 0, \beta) \in \Gamma_{\varphi 0}; \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(q)}(r, \alpha, \beta) = 0; U_\beta^{(q)}(r, \alpha, \beta) = U_r^{(q)}(r, \alpha, \beta) = 0; (r, 0, \beta) \in \Gamma_{\varphi\alpha}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

apoi, în baza deplasărilor $U_s^{(q)}(M, N)$; $s = r, \varphi, \beta$; $q = \rho, \psi, \vartheta$, și a regulei din (3.37) se calculează dilatarea de volum. Din (3.60), tensiunile se determină folosind legea lui Hooke:

$$\begin{aligned} \sigma_{sp}^{(q)} = 2\mu\varepsilon_{sp}^{(q)} + \delta_{sp}\lambda\Theta^{(q)}; s, p = r, \varphi, \beta; \\ \varepsilon_{rr}^{(q)} = \frac{\partial U_r^{(q)}}{\partial r}; \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(q)} = \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial \varphi} + \frac{U_r^{(q)}}{r} + ctg\beta \frac{U_\beta^{(q)}}{r}; \varepsilon_{\beta\beta}^{(q)} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\beta^{(q)}}{\partial \beta} + \frac{U_r^{(q)}}{r}; \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(q)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial U_r^{(q)}}{\partial \varphi} - \frac{U_\varphi^{(q)}}{r} + \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial r} \right); \varepsilon_{r\beta}^{(q)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(q)}}{\partial \beta} - \frac{U_\beta^{(q)}}{r} + \frac{\partial U_\beta^{(q)}}{\partial r} \right); \\ \varepsilon_{\varphi\beta}^{(q)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial U_\beta^{(q)}}{\partial \varphi} - \frac{U_\varphi^{(q)}}{r} ctg\beta + \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{r \partial \beta} \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

În cazul CL din (3.60), se poate obține dilatarea de volum $\Theta^{(q)}(M, N)$ folosind ecuația:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Theta^{(q)}(M, N) = -(\lambda + 2\mu)^{-1} L_M^{(q)} \delta(M - N); M, N \in V, M \equiv (r, \varphi, \beta); N \equiv (\rho, \psi, \theta); \\ L_M^{(q)} = \delta_{qr} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\delta_{q\varphi}}{r \sin \beta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\delta_{q\beta}}{r} \frac{\partial}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Reprezentarea ei integrală prin intermediul funcției respective Green $G_\Theta(M, N)$ se scrie:

$$\begin{aligned} \Theta^{(q)}(M, N) = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} L_N^{(q)} G_\Theta(M, N) \\ + \int_\Gamma \left[\frac{\partial \Theta^{(q)}(\overline{M}, N)}{\partial n_{\overline{M}}} - \Theta^{(q)}(\overline{M}, N) \frac{\partial}{\partial n_{\overline{M}}} \right] G_\Theta(\overline{M}, N) d\Gamma(\overline{M}); \\ L_N^{(q)} = \delta_{q\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\delta_{q\psi}}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\delta_{q\vartheta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Este necesar să fie menționat faptul că expresiile (3.63) se obțin din ecuațiile (3.38) aplicând formula (3.37).

FG $G_\Theta(M, N)$ din (3.63) satisface următoarea ecuație:

$$\nabla_M^2 G_\Theta(M, N) = -\delta(M - N); M, N \in V, M \equiv (r, \varphi, \beta); N \equiv (\rho, \psi, \theta). \quad (3.64)$$

Pentru a explica acest lucru, în primul rând se demonstrează că CL din (3.60) conduc la următoarele valori ale dilatării de volum:

- pentru semiplanul $\Gamma_{\varphi 0}(\varphi = 0; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq r < \infty)$:

$$\partial\Theta^{(q)}/\partial n_{\varphi 0} = 0; \quad (3.65)$$

- pentru semiplanul $\Gamma_{\varphi\alpha}(\varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq r < \infty)$:

$$\Theta^{(q)} = 0. \quad (3.66)$$

Pentru a dovedi egalitatea din (3.66), se demonstrează că a doua CL din (3.60) conduce la egalarea cu zero a dilatării de volum $\Theta^{(q)} = 0$, a planului marginal $\Gamma_{\varphi\alpha}$.

Deci, luând în considerație (3.37) sub forma:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(q)} = \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial U_{\varphi}^{(q)}}{\partial \varphi} + \frac{U_r^{(q)}}{r} + \text{ctg} \beta \frac{U_{\beta}^{(q)}}{r} = \Theta^{(q)} - \varepsilon_{rr}^{(q)} - \varepsilon_{\beta\beta}^{(q)} = \Theta^{(q)} - \left(\frac{\partial U_r^{(q)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\beta}^{(q)}}{\partial \beta} + \frac{U_r^{(q)}}{r} \right), \quad (3.67)$$

și folosind legea lui Hooke, ecuația (3.61), se obține tensiunea $\sigma_{\varphi\varphi}^{(q)}$:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(q)} = 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(q)} + \lambda\Theta^{(q)} = (\lambda + 2\mu)\Theta^{(q)} - 2\mu \left(\frac{\partial U_r^{(q)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\beta}^{(q)}}{\partial \beta} + \frac{U_r^{(q)}}{r} \right). \quad (3.68)$$

Folosind ecuația (3.68) cu CL $\sigma_{\varphi r}^{(q)} = 0; U_r^{(q)} = 0; \partial U_r^{(q)}/\partial r = 0; \partial U_{\beta}^{(q)}/\partial \beta = 0$, care rezultă din a doua CL (3.60), se obține: în semiplanul $\Gamma_{\varphi\alpha}(\varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq r < \infty)$ dilatarea de volum este egală cu zero. În acest caz se demonstrează că (3.66) este adevărată. Pentru a dovedi egalitatea din (3.65), se demonstrează faptul că primele CL din (3.60) egalează cu zero derivata normală a dilatării de volum pentru semiplanul marginal $\Gamma_{\varphi\alpha}$, adică $\partial\Theta^{(q)}/\partial n_{\varphi 0} = 0$.

Ulterior, se substituie relațiile $\sigma_{\varphi r}^{(q)} = 0; \Rightarrow \partial\sigma_{\varphi r}^{(q)}/\partial r = 0; \sigma_{\varphi\beta}^{(q)} = 0 \Rightarrow \partial\sigma_{\varphi\beta}^{(q)}/\partial \beta = 0$, care rezultă din primele CL din (3.60) și se înlocuiesc în ecuația de echilibru a tensiunilor:

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\beta}}{\partial \beta} + \frac{3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\varphi\beta} \text{ctg} \beta}{r} = 0. \quad (3.69)$$

În final se obține: pe semiplanul $\Gamma_{\varphi 0}$, relația $\partial\sigma_{\varphi\varphi}^{(q)}/\partial \varphi = 0$ este veridică. Se folosește acest rezultat în legea lui Hooke, care se scrie sub forma:

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(q)}}{\partial \varphi} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta^{(q)}}{\partial \varphi} - 2\mu \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial U_r^{(q)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\beta}^{(q)}}{\partial \beta} + \frac{U_r^{(q)}}{r} \right) = 0, \quad (3.70)$$

folosind primele CL din (3.60), precum și legea lui Hooke pentru tensiunile tangențiale $\sigma_{\varphi r}^{(q)}$ și $\sigma_{\varphi\beta}^{(q)}$ se obțin următoarele relații:

$$\partial U_r^{(q)}/\partial\varphi = 0; \partial^2 U_r^{(q)}/\partial r\partial\varphi = 0; \partial^2 U_\beta^{(q)}/\partial\beta\partial\varphi = 0. \quad (3.71)$$

Într-adevăr ecuațiile (3.71) pot fi obținute din primele CL (3.60) pentru semiplanul $\Gamma_{\varphi 0}$, folosind următoarele operații:

$$\begin{aligned} U_\varphi^{(q)} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial r} = 0, \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial\beta} = 0; \\ \sigma_{\varphi r}^{(q)} = 0, U_\varphi^{(q)} = 0; \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial r} = 0 &\Rightarrow \mu \left(\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial U_r^{(q)}}{\partial\varphi} - \frac{U_\varphi^{(q)}}{r} + \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial r} \right) = 0; \Rightarrow \\ &\frac{\partial U_r^{(q)}}{\partial\varphi} = 0, \frac{\partial^2 U_r^{(q)}}{\partial r\partial\varphi} = 0; \\ \sigma_{\varphi\beta}^{(q)} = 0, U_\varphi^{(q)} = 0; \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial\beta} = 0 &\Rightarrow \mu \left(\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial U_\beta^{(q)}}{\partial\varphi} - \frac{U_\varphi^{(q)}}{r} \operatorname{ctg} \beta + \frac{\partial U_\varphi^{(q)}}{\partial r\partial\beta} \right) = 0; \Rightarrow \\ &\frac{\partial U_\beta^{(q)}}{\partial\varphi} = 0, \frac{\partial^2 U_\beta^{(q)}}{\partial\varphi\partial\beta} = 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

În cele din urmă, prin substituirea rezultatelor din relația (3.71) în (3.70), se constată că pe planul $\Gamma_{\varphi 0}$, $\partial\Theta^{(q)}/\partial\varphi = 0$ adică, $\partial\Theta^{(q)}/\partial n_{\varphi 0} = 0$. Astfel, se demonstrează că egalitatea din relația (3.65) este valabilă.

PL pentru $\Theta^{(q)}$ este descrisă de ecuațiile (3.62), (3.63), (3.65) și (3.66), unde FG G_Θ pentru PL a panii sferice poate fi scrisă în forma:

$$\begin{aligned} \nabla_M^2 G_\Theta(M, N) &= -\delta(M - N); M, N \in V, M \equiv (r, \varphi, \beta); N \equiv (\rho, \psi, \theta); \\ \partial G_\Theta/\partial\varphi &= 0; \varphi = 0; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq r < \infty; \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$G_\Theta = 0; \varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq r < \infty.$$

Ultima PL coincide cu PL din ecuația (3.58), astfel încât FG $G_\Theta = G$ este determinată din relația (3.59). Dacă introducem expresiile (3.65), (3.66) și (3.59) în reprezentarea (3.63), atunci obținem dilatarea de volum elastică pentru PL a ecuațiilor (3.38) și (3.60), pentru pana sferică, scrisă sub forma:

$$\Theta^{(q)} = -(\lambda + 2\mu)^{-1} L_N^{(q)} G; G = (4\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} (R_k^{-1} + R_{k\psi}^{-1}). \quad (3.74)$$

Obținerea funcțiilor de influență termoelastice $U_q(M, N)$.

Fiind cunoscute ambele funcții $G(M, N)$ și $\Theta^{(q)}(M, N)$, folosind formula (3.36) trebuie să fie determinate funcțiile de influență termoelastice $U_q(M, N)$. Astfel, înlocuind funcțiile $G(M, N)$ și $\Theta^{(q)}(M, N)$ din ecuațiilor (3.59) și (3.74) în expresia (3.36), scrisă pentru pana sferică termoelastice $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi)$; $\alpha = \pi/n; n = 2, 3, 4, \dots$ aceasta din urmă va avea forma:

$$\begin{aligned}
 U_q(M, N) = & \gamma \int_0^\infty \int_0^\alpha \int_0^\pi G(M; \rho', \psi', \vartheta') \Theta^{(q)}(\rho', \psi', \vartheta'; N) (\rho')^2 d\rho' d\psi' d\vartheta' \\
 & - (\lambda + 2\mu)^{-1} \gamma L_N^{(q)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \int_0^\infty \int_0^\alpha \int_0^\pi \left[(4\pi)^{-1} (R_k^{-1}(M; \rho', \psi', \vartheta') \right. \\
 & \left. + R_{k\psi}^{-1}(M; \rho', \psi', \vartheta')) (4\pi)^{-1} (R_k^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) + R_{k\psi}^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N)) \right] (\rho')^2 d\rho' d\psi' d\vartheta'. \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

Apoi, se calculează integrala pe volum într-un mod special. În final, se obține următoarea expresie pentru funcțiile $U_q(M, N)$:

$$\begin{aligned}
 U_q(M, N) = & -2m L_N^{(q)} \int_0^\infty \int_0^\alpha \int_0^\pi (4\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k^{-1}(M; \rho', \psi', \vartheta') + R_{k\psi}^{-1}(M; \rho', \psi', \vartheta') \right) \\
 & \times (4\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) + R_{k\psi}^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) \right) (\rho')^2 d\rho' d\psi' d\vartheta'. \quad (3.76)
 \end{aligned}$$

Integrala improprie din (3.76), a fost rezolvată folosind:

1) Următoarele egalități ale semiplanelor marginale pentru pana sferică:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \psi'} \left[\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k(M; \rho', \psi', \vartheta') + R_{k\psi}(M; \rho', \psi', \vartheta') \right) \right] \Bigg|_{\psi'=0} &= 0; \\
 \left[\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k(M; \rho', \psi', \vartheta') + R_{k\psi}(M; \rho', \psi', \vartheta') \right) \right] \Bigg|_{\psi'=\alpha} &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial \psi'} \left[\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) + R_{k\psi}^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) \right) \right] \Bigg|_{\psi'=0} &= 0; \quad (3.77) \\
 \left[\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) + R_{k\psi}^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) \right) \right] \Bigg|_{\psi'=\alpha} &= 0;
 \end{aligned}$$

2) Relațiile:

$$\nabla^2 \left[R_k(M; \rho', \psi', \vartheta') + R_{k\psi}(M; \rho', \psi', \vartheta') \right] = 2 \left[R_k^{-1}(M; \rho', \psi', \vartheta') + R_{k\psi}^{-1}(M; \rho', \psi', \vartheta') \right];$$

$$\nabla_N^2 R_k^{-1}(M, N) = \begin{cases} -\delta(M - N), k = 0; \\ 0, k \neq 0, k = 1, 2, 3, \dots, n-1, \end{cases} \quad (3.78)$$

$$\nabla_N^2 R_k^{-1}(M, N) = \nabla_M^2 R_k^{-1}(M, N) = \nabla_M^2 R_{k\psi}^{-1}(M, N) = \nabla_N^2 R_{k\psi}^{-1}(M, N) = 0;$$

3) Următoarea caracteristică a funcției Dirac:

$$\int_V f(M) \delta(M - N) dV(M) = f(N); \quad (3.79)$$

4) Formula Green pentru pana sferică:

$$\int_V (g \nabla^2 f - f \nabla^2 g) dV = \int_\Gamma [g(\partial f / \partial n) - f(\partial g / \partial n)] d\Gamma, \quad (3.80)$$

unde:

$$f = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k^{-1}(M; \rho', \psi', \vartheta') + R_{k\psi}^{-1}(M; \rho', \psi', \vartheta') \right); \quad (3.81)$$

$$g = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) + R_{k\psi}^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) \right).$$

Se substituie expresia (3.80) în (3.76) și se obține:

$$U_q(M, N) = -2mL_N^{(q)} \int_0^\infty \int_0^\alpha \int_0^\pi \nabla^2 \left[(8\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k(M; \rho', \psi', \vartheta') + R_{k\psi}(M; \rho', \psi', \vartheta') \right) \right]$$

$$\times \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) + R_{k\psi}^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) \right) (\rho')^2 d\rho' d\psi' d\vartheta'$$

$$= -2mL_N^{(q)} \int_0^\infty \int_0^\alpha \int_0^\pi \left[(8\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k(M; \rho', \psi', \vartheta') + R_{k\psi}(M; \rho', \psi', \vartheta') \right) \right]$$

$$\times \nabla^2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) + R_{k\psi}^{-1}(\rho', \psi', \vartheta'; N) \right) (\rho')^2 d\rho' d\psi' d\vartheta' \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned}
&= -mL_N^{(q)} \int_0^\infty \int_0^\alpha \int_0^\pi (8\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left(R_k(M; \rho', \psi', \vartheta') \right. \\
&\quad \left. + R_{k\psi}(M; \rho', \psi', \vartheta') \right) \delta(N' - N) (\rho')^2 d\rho' d\psi' d\vartheta',
\end{aligned}$$

unde integralele la limită pentru $\Gamma_{\varphi 0}$ și $\Gamma_{\varphi\alpha}$ sunt egale cu zero, datorită relațiilor (3.77).

În final, folosind caracteristica funcției Dirac (3.79), pentru integrala de volum, se obțin următoarele FPTG, care sunt scrise în funcții elementare:

$$U_q(M, N) = -mL_N^{(q)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} (R_k(M; \rho, \psi, \vartheta) + R_{k\psi}(M; \rho, \psi, \vartheta)). \quad (3.83)$$

Se calculează termenii respectivi din (3.83), unde se observă că funcțiile $U_q(M, N)$ coincid cu componentele matricei $\mathbf{U}(M, N)$ din ecuația (3.50). Din expresiile $U_q(M, N)$ din (3.83), se poate afirma, că inegalitatea $|U_q(M, N)| < \infty$ este valabilă, iar deplasările se egalează cu zero la infinit: $\lim_{\rho \rightarrow \infty} U_q(M, N) \rightarrow 0$.

La pasul următor, s-a verificat corectitudinea funcțiilor $U_q(M, N)$. În acest scop, se observă: $U_q = U_q(M, N)$ satisfac ecuațiile (3.41), precum și ecuațiile (3.40), care pot fi identificate cu o ecuație a conductibilității termice. Așa că, la respectarea coordonatelor punctului de aplicare $N \equiv (\rho, \psi, \xi)$, ele satisfac PL a termoelasticității din relațiile (3.41), cu următoarele CL, care rezultă din formula integrală (3.75), precum și CL din (3.45) - (3.46):

$$\begin{aligned}
U_\psi(M, \tilde{N}) &= 0; \sigma_{\psi\rho}(M, \tilde{N}) = \sigma_{\psi\vartheta}(M, \tilde{N}) = 0; M \in V, \tilde{N} \in \Gamma_{\varphi 0}; \\
\sigma_{\psi\psi}(M, \tilde{N}) &= 0; U_\rho(M, \tilde{N}) = U_\vartheta(M, \tilde{N}) = 0; M \in V, \tilde{N} \in \Gamma_{\varphi\alpha}.
\end{aligned} \quad (3.84)$$

Funcțiile $U_q(M, N)$ trebuie să satisfacă următoarea PL a conductibilității termice fictive în raport cu coordonatele punctului de observație $M \equiv (r, \varphi, \beta)$, care rezultă din formulele integrale (3.75), precum și CL (3.58) (a se vedea de asemenea (3.47)):

$$\nabla_M^2 U_q(M, N) = -\gamma \Theta^{(q)}(M, N); M, N \in V; \frac{\partial U_q(\tilde{M}, N)}{\partial n_{\tilde{\varphi} 0}} = 0; \tilde{M} \equiv (\tilde{r}, \tilde{\varphi} = 0, \tilde{\beta}) \in \Gamma_{\tilde{\varphi} 0};$$

$$U_q(\tilde{M}, N) = 0; \tilde{M} \equiv (\tilde{r}, \tilde{\varphi} = \alpha, \tilde{\beta}) \in \Gamma_{\tilde{\varphi}\alpha}. \quad (3.85)$$

Trebuie de menționat că în ecuația (3.75), funcțiile $\Theta^{(q)}(M', N)$ sunt determinate cu expresia (3.74). Funcțiile $\Theta(M, N)$ din (3.41) sunt determinate pe baza deplasărilor $U_q(M, N)$ (3.83), folosind regula similară cu cea din (3.37), în care derivatele trebuie să fie luate în raport cu punctul $N \equiv (\rho, \phi, \vartheta)$. Soluțiile obținute pentru pana sferică, sunt incluse în Anexa C.

Obținerea formulei integrale de tip Green.

Următorul pas în demonstrarea teoremei de mai sus, este calcularea (în baza funcțiilor principale de influență obținute $U_q(M, N)$) celorlalte funcții de influență, cum ar fi $U_{\varphi 0q}(\tilde{M}, N)$, $\partial U_{\varphi \alpha q}(\tilde{M}, N)/\partial n_{\varphi \alpha}$ de pe planul marginal $\Gamma_{\varphi 0}$, $\Gamma_{\varphi \alpha}$ și în cele din urmă, obținerea formulei integrale de tip Green pentru pana sferică folosind ecuația (3.34). Funcțiile de influență sus-menționate sunt determinate pe baza formulelor generale din ecuațiile (3.42) și (3.43), după cum urmează:

- 1) Funcția de influență a deplasărilor de la acțiunea unui flux unitar de căldură pe planul marginal $\Gamma_{\varphi 0}$:

$$U_q(r, 0, \beta; N) = -2mL_N^{(q)} \sum_{k=0}^{n-1} R_k(r, 0, \beta; \rho, \psi, \vartheta), \quad (3.86)$$

unde:

$$\begin{aligned} R_k(r, 0, \beta; \rho, \psi, \vartheta) &= \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi_0 - \omega_k)}; \\ R_k(r, \alpha, \beta; \rho, \psi, \vartheta) &= \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi_\alpha - \omega_k)}; \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\cos(\phi_0 - \omega_k) = -\sin \beta \sin \gamma \cos(\psi + 2k\pi/n) + \cos \beta \cos \vartheta;$$

$$\cos(\phi_\alpha - \omega_k) = \sin \beta \sin \gamma \cos(\alpha - \psi - 2k\pi/n) + \cos \beta \cos \vartheta;$$

- 2) Funcția de influență a deplasărilor de la acțiunea unui gradient de temperatură pe planul marginal $\Gamma_{\varphi \alpha}$:

$$\begin{aligned} \partial U_q(r, \alpha, \beta; N)/\partial n_{\varphi \alpha} &= \\ -2mL_N^{(q)} \sum_{k=0}^{n-1} &(-1)^k 2r\rho \sin \beta \sin \vartheta \sin(\alpha - \psi - 2k\pi) R_k^{-1}(r, \alpha, \beta; \rho, \psi, \vartheta), \end{aligned} \quad (3.88)$$

Ulterior s-a scris formula integrală generală din relația (3.34) pentru PL (3.30) și (3.45) - (3.48) pentru pana sferică V :

$$\begin{aligned} u_q(N) &= a^{-1} \left[\int_0^\infty \int_0^\alpha \int_0^\pi F(r, \varphi, \beta) U_q(r, \varphi, \beta; N) r^2 dr d\varphi d\beta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{\partial T_{\varphi 0}(r, 0, \beta)}{\partial n_{\varphi 0}} U_q(r, 0, \beta; N) r dr d\beta \right] \\ &\quad - \int_0^\infty \int_0^\pi T_{\varphi \alpha}(r, \alpha, \beta) \frac{\partial U_{\varphi q}(r, \alpha, \beta; N)}{\partial n_{\varphi \alpha}} r dr d\beta; N \equiv (\rho, \psi, \vartheta); q = \rho, \psi, \vartheta. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Formula din relația (3.89) se obține din formula generală integrală (3.34), unde s-a luat în considerație faptul, că la limita semiplanul $\Gamma_{\varphi\alpha}$ este dată condiția Dirichlet (temperatura), iar la limita semiplanul $\Gamma_{\varphi 0}$ sunt prescrise condiții Neumann (fluxul de căldură) (a se vedea (3.47)). Substituind funcțiile de influență din ecuațiile (3.83) și (3.86) - (3.88) în formula (3.89), se obține următoarea formulă integrală de tip Green:

$$\begin{aligned}
u_q(N) = & -mL_N^{(q)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} \left\{ a^{-1} \left[\int_0^\infty \int_0^\alpha \int_0^\pi F(r, \varphi, \beta) (R_k(r, \varphi, \beta; \rho, \psi, \vartheta)) r^2 dr d\varphi d\beta \right. \right. \\
& + R_{k\psi}(r, \varphi, \beta; \rho, \psi, \vartheta) r^2 dr d\varphi d\beta + 2 \int_0^\infty \int_0^\pi S_0(r, 0, \beta) R_k(r, 0, \beta; \rho, \psi, \vartheta) r dr d\beta \left. \right] \\
& - 2 \int_0^\infty \int_0^\pi f(r, \alpha, \beta) 2r \rho \sin \beta \sin \vartheta \sin(\alpha - \psi - (2k\pi/n)) \\
& \times R_k^{-1}(r, \alpha, \beta; \rho, \psi, \vartheta) r dr d\beta; N \equiv (\rho, \psi, \vartheta) \left. \right\}, \tag{3.90}
\end{aligned}$$

unde deplasările termoelastice $u_q(N)$ au fost determinate de la acțiunea unei surse interioare de căldură $F(M)$, flux de căldură $a[\partial T_{\varphi 0}(r, 0, \beta)/\partial n_{\varphi 0}(r, 0, \beta)] = S_{\varphi 0}(r, 0, \beta)$ aplicat în limita semiplanului $\Gamma_{\varphi 0}$ și un gradient de temperatură $T_{\varphi\alpha}(r, \alpha, \beta)$ aplicat în limita semiplanului $\Gamma_{\varphi\alpha}$.

În final, se observă că integralele cu intervale nemărginite există, ceea ce înseamnă că deplasările $|u_q(N)| < \infty$, atunci sunt îndeplinite următoarele condiții:

$$\int_0^\infty \int_0^\alpha \int_0^\pi |F(r, \varphi, \beta)| r^2 dr d\varphi d\beta < \infty; \int_0^\infty \int_0^\pi |S_0(r, 0, \beta)| r dr d\beta < \infty; \int_0^\infty \int_0^\pi |T_{\varphi\alpha}(r, \alpha, \beta)| r dr d\beta < \infty, \tag{3.91}$$

deoarece nucleele din (3.90) se egalează cu zero la infinit.

Condițiile din ecuațiile (3.91) sunt îndeplinite, în cazul în care, funcțiile $F(r, \varphi, \beta)$, $S_0(r, 0, \beta)$ și $T_{\varphi\alpha}(r, \alpha, \beta)$ sunt date pe domenii mărginite. Cercetările au arătat că deplasările descrise prin formula integrală de tip Green (3.90) satisfac PL a ecuațiilor (3.30) și (3.45) - (3.46), pentru punctul N . Dacă se calculează expresiile din ecuațiile (3.83) și (3.86) - (3.88) și rezultatele obținute se prezintă în formă matriceală, atunci cu siguranță, matricele de influență $\mathbf{U}(M, N)$, $\mathbf{Q}_{\varphi 0}(r, 0, \beta; N) = \mathbf{U}_{\varphi 0}(r, 0, \beta; N)$, $\mathbf{Q}_{\varphi\alpha}(r, \alpha, \beta; N) = \partial \mathbf{U}_{\varphi\alpha}(r, \alpha, \beta; N)/\partial n_{\varphi\alpha}$ și formula integrală de tip Green din (3.90), coincid cu rezultatele din ecuațiile (3.50) - (3.57) și respectiv (3.49). Deci, s-a demonstrat că toate elementele precum și teorema sunt valide.

În cazurile concrete de valori ale unghiului α , obținem formula integrală de tip Green și FG

pentru mai multe pane. Ca un corolar al teoremei pot servi unele cazuri particulare ale unghiului α . Deci, folosind relațiile (3.49) - (3.57) pentru $\alpha = \pi/2$, obținem formula integrală de tip Green și FG pentru un sfert de spațiu $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \pi/2; 0 \leq \beta \leq \pi)$; $\alpha = \pi/2$; $k = 0, 1$. Un exemplu de aplicare a FG poate servi PL pentru determinarea deplasărilor termoelastice, pentru o fundație, având forma unui sfert de spațiu; pe verticală fiind marginalizat de semiplanul $\Gamma_{\varphi 0}$, care este un perete de sprijin masiv, ce are un contact fără frecare. Pe celălalt semiplan $\Gamma_{\varphi \alpha}$ se instalează o placă subțire inextensibilă în contact complet cu sfertul de spațiu.

În cele din urmă, este foarte important de remarcat faptul: cu ajutorul teoremelor analogice pot fi rezolvate 16 PL a termoelasticității pentru pana sferică (la hotar pot fi următoarele condiții omogene mecanice de limită în orice combinații):

- deplasările normale și tensiunile tangențiale;
- tensiunile normale și deplasările tangențiale.

La hotar, pot fi date următoarele condiții neomogene termice la limită, în orice combinație:

- temperatura;
- flux de caldură.

Luând în considerație cazurile particulare: sfertul de spațiu și semispațiul care rezultă din ecuația de mai sus pentru pana sferică, este posibil să se obțină noi formule integrale de tip Green și FG termoelastice în funcții elementare pentru aproximativ 40 PL noi. Astfel, una dintre principalele concluzii a teoremei de mai sus este: cu ajutorul metodei propuse se pot obține formulele integrale de tip Green și funcțiile termoelastice Green pentru mai multe PL.

3.2.4. Exemple de aplicare a dilatării de volum și a formulei integrale de tip Green în termoelasticitate

Exemplul 1. Formularea generală a problemei.

Să se rezolve ecuațiile (3.30) și (3.45) - (3.48), pentru a determina deplasările termoelastice $u_q(N)$ în pana sferică $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi)$; $\alpha = \pi/n$; $n = 2, 3, \dots$ cu CL pe semiplanurile $\Gamma_{\varphi 0}(0 \leq r < \infty; \varphi = 0; 0 \leq \beta \leq \pi)$ și $\Gamma_{\varphi \alpha}(0 \leq r < \infty; \varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi)$ fluxul de căldură și temperatura este zero [61]. Deplasările termice $u_q(N)$ au fost calculate de la aplicarea unei temperaturi $T = T_0 = const.$ pe un segment de rază $[r_0 \leq r \leq r_1; r_0 \geq 0; r_1 > 0; \varphi = \varphi_0 > 0; \beta = \beta_0 > 0; r_0, r_1, \varphi_0, \beta_0 = const.]$:

$$T(M) = \begin{cases} T_0 = \text{const.}, M \equiv (r, \varphi_0, \beta_0) \in [r_0 \leq r \leq r_1; \varphi = \varphi_0 > 0, \\ \beta = \beta_0 > 0; r_0, r_1, \varphi_0, \beta_0 = \text{const.}] \in V; \\ 0, M \equiv (r, \varphi_0, \beta_0) \notin [r_0 \leq r \leq r_1; \varphi = \varphi_0 > 0, \\ \beta = \beta_0 > 0; r_0, r_1, \varphi_0, \beta_0 = \text{const.}] \in V; \\ a\partial T(M)/\partial n_{\varphi_0} = S_{\varphi_0}(M) = 0; M \equiv (r, 0, \beta) \in \Gamma_{\varphi_0}(0 \leq r < \infty; \varphi = 0; 0 \leq \beta \leq \pi); \\ T(M) = f(M) = 0; M \equiv (r, \alpha, \beta) \in \Gamma_{\varphi\alpha}(0 \leq r < \infty; \varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi); \end{cases} \quad (3.92)$$

Deoarece, în această PL este dat câmpul interior de temperatură, pentru a obține soluția problemei trebuie să fie utilizată următoarea formulă integrală generală Maysel [31, 46, 102], [106, p. 483] scrisă pentru pana sferică:

$$u_q(N) = \gamma \int_0^\infty \int_0^\alpha \int_0^\pi T(M) \Theta^{(q)}(M, N) r^2 dr d\varphi d\beta. \quad (3.93)$$

Substituind în ultima formulă (3.93) funcțiile $T(M)$ din ecuația (3.92) și $\Theta^{(q)}(M, N)$, determinată cu ajutorul ecuației (3.74) se obține:

$$u_q(N) = T_0 \gamma \int_{r_0}^{r_1} \Theta^{(q)}(r, \varphi_0, \beta_0; N) dr = \\ - 2mT_0 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{r_0}^{r_1} L_N^{(q)} (R_k^{-1}(r, \varphi_0, \beta_0; N) + R_{k\psi}^{-1}(r, \varphi_0, \beta_0; N)) dr. \quad (3.94)$$

La calcularea ultimei integrale se obține expresia:

$$u_q(N) = -2mT_0 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k L_N^{(q)} [(2\bar{R}_k + 2r - 2\rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \right. \\ \left. \times (2\bar{R}_{k\psi} + 2r - 2\rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k))] \right\} \Big|_{r=r_0}^{r=r_1}, \quad (3.95)$$

unde:

$$\bar{R}_k = R_k(r, \varphi_0, \beta_0; N) = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)};$$

$$\cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k) = \sin \beta_0 \sin \vartheta \cos(\varphi_0 - \psi - 2k\pi/n) + \cos \beta_0 \cos \vartheta;$$

$$\bar{R}_{k\psi} = R_{k\psi}(r, \varphi_0, \beta_0; N) = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)}; \quad (3.96)$$

$$\cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k) = \sin \beta_0 \sin \vartheta \cos(\varphi_0 + \psi - 2k\pi/n) + \cos \beta_0 \cos \vartheta.$$

Conform relației (3.95) deplasările $u_\rho(N)$ sunt determinate de următoarele expresii:

$$u_q(N) = \quad (3.97)$$

$$-2mT_0 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left[\frac{(2\bar{R}_{k1} + 2r_1 - 2\rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \times (2\bar{R}_{k\psi_1} + 2r_1 - 2\rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k))}{(2\bar{R}_{k0} + 2r_0 - 2\rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \times (2\bar{R}_{k\psi_0} + 2r_0 - 2\rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k))} \right] \right\}$$

unde:

$$\bar{R}_{k1} = \sqrt{r_1^2 + \rho^2 - 2r_1\rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)}; \bar{R}_{k0} = \sqrt{r_0^2 + \rho^2 - 2r_0\rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)};$$

$$\bar{R}_{k\psi_1} = \sqrt{r_1^2 + \rho^2 - 2r_1\rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)}; \bar{R}_{k\psi_0} = \sqrt{r_0^2 + \rho^2 - 2r_0\rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)}. \quad (3.98)$$

Expresiile finale pentru deplasările termoelastice $u_\rho(N)$ sunt:

$$u_\rho(N) = -2mT_0 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [\Pi_{k1}(N) + \Pi_{k\psi_1}(N) - \Pi_{k0}(N) - \Pi_{k\psi_0}(N)], \quad (3.99)$$

unde:

$$\Pi_{k1}(N) = [\rho - (r_1 + \bar{R}_{k1}) \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)] \Phi_{k1}^{-1}; \Pi_{k\psi_1}(N) = [\rho - (r_1 + \bar{R}_{k\psi_1}) \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)] \Phi_{k\psi_1}^{-1};$$

$$\Pi_{k0}(N) = [\rho - (r_0 + \bar{R}_{k0}) \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)] \Phi_{k0}^{-1}; \Pi_{k\psi_0}(N) = [\rho - (r_0 + \bar{R}_{k\psi_0}) \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)] \Phi_{k\psi_0}^{-1};$$

$$\bar{Z}_{k1} = [\bar{R}_{k1} + r_1 - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)]; \bar{Z}_{k0} = [\bar{R}_{k0} + r_0 - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)]; \quad (3.100)$$

$$\bar{Z}_{k\psi_1} = [\bar{R}_{k\psi_1} + r_1 - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)]; \bar{Z}_{k\psi_0} = [\bar{R}_{k\psi_0} + r_0 - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)];$$

$$\Phi_{k0}^{-1} = \bar{Z}_{k0}^{-1} \bar{R}_{k0}^{-1}; \Phi_{k1}^{-1} = \bar{Z}_{k1}^{-1} \bar{R}_{k1}^{-1}; \Phi_{k\psi_0}^{-1} = \bar{Z}_{k\psi_0}^{-1} \bar{R}_{k\psi_0}^{-1}; \Phi_{k\psi_1}^{-1} = \bar{Z}_{k\psi_1}^{-1} \bar{R}_{k\psi_1}^{-1}.$$

Conform (3.95), deplasările $u_\psi(N)$ sunt determinate cu următoarele relații:

$$u_\psi(N) = \quad (3.101)$$

$$-2mT_0 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \psi} \ln [(2\bar{R}_k + 2r - 2\rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \times (2\bar{R}_{k\psi} + 2r - 2\rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k))] \right\} \Bigg|_{r=r_0}^{r=r_1}$$

Expresiile finale pentru deplasările termoelastice $u_\psi(N)$ sunt:

$$u_\psi(N) = -2mT_0 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [-H_{k1}(N) + H_{k\psi1}(N) + H_{k0}(N) - H_{k\psi0}(N)], \quad (3.102)$$

unde:

$$\begin{aligned} H_{k1}(N) &= \bar{\zeta}_k(r_1 + \bar{R}_{k1})\Phi_{k1}^{-1}; H_{k\psi1}(N) = \bar{\zeta}_{k\psi}(r_1 + \bar{R}_{k\psi1})\Phi_{k\psi1}^{-1}; \\ H_{k0}(N) &= \bar{\zeta}_k(r_0 + \bar{R}_{k0})\Phi_{k0}^{-1}; H_{k\psi0}(N) = \bar{\zeta}_{k\psi}(r_0 + \bar{R}_{k\psi0})\Phi_{k\psi0}^{-1}; \\ \bar{\zeta}_k &= \zeta_k(\varphi_0, \beta_0, \psi); \bar{\zeta}_{k\psi} = \zeta_{k\psi}(\varphi_0, \beta_0, \psi). \end{aligned} \quad (3.103)$$

Datorită relației (3.95), deplasările $u_\vartheta(N)$ se vor determina folosind formula:

$$\begin{aligned} u_\vartheta(N) = & \quad (3.104) \\ -2mT_0 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\partial}{\rho \partial \vartheta} \ln [(2\bar{R}_k + 2r - 2\rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \times (2\bar{R}_{k\psi} + 2r - 2\rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k))] \right\} \Bigg|_{r=r_0}^{r=r_1} \end{aligned}$$

Expresiile finale pentru deplasările termoelastice $u_\vartheta(N)$ sunt:

$$u_\vartheta(N) = -2mT_0 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [-P_{k1}(N) - P_{k\psi1}(N) + P_{k0}(N) + P_{k\psi0}(N)], \quad (3.105)$$

unde:

$$\begin{aligned} P_{k1}(N) &= -\bar{\eta}_k(r_1 + \bar{R}_{k1})\Phi_{k1}^{-1}; P_{k\psi1}(N) = -\bar{\eta}_{k\psi}(r_1 + \bar{R}_{k\psi1})\Phi_{k\psi1}^{-1}; \\ P_{k0}(N) &= -\bar{\eta}_k(r_0 + \bar{R}_{k0})\Phi_{k0}^{-1}; P_{k\psi0}(N) = \bar{\eta}_{k\psi}(r_0 + \bar{R}_{k\psi0})\Phi_{k\psi0}^{-1}; \\ \bar{\eta}_k &= \bar{\eta}_k(r, \varphi_0, \beta_0; \vartheta, \psi); \bar{\eta}_{k\psi} = \bar{\eta}_{k\psi}(r, \varphi_0, \beta_0; \vartheta, \psi). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Exemplul dat demonstrează utilizarea funcțiilor de influență a dilatărilor de volum de la o forță unitară aplicată asupra corpului, determinate în §3.2.3., nu numai pentru obținerea funcțiilor de influență termoelastice $U_q(M, N)$, dar și a formulei integrale de tip Green. În plus, funcțiile $\Theta^{(q)}(M, N)$ au o importanță semnificativă independentă pentru a rezolva direct PL în termoelasticitate, atunci când câmpul interior de temperatură este cunoscut.

Ca exemplu de prezentare grafică a rezultatelor obținute în Figurile 3.11, a), 3.12, a), 3.13, a), 3.14, a), 3.15, a), 3.16, a) sunt prezentate deplasările termoelastice radiale u_ρ în pătrimea de spațiu $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \pi/2; 0 \leq \beta \leq \pi)$, cauzate de temperatura interioară T , descrisă în (3.92). Aceste grafice au fost construite în baza expresiilor (3.99) - (3.100), folosind programa Maple 18.

Exemplul 2. Formularea generală a problemei.

Să se rezolve ecuațiile (3.30) și (3.45) - (3.48), pentru a determina deplasările termoelastice $u_q(N)$ în pana sferică $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi)$; $\alpha = \pi/n; n = 2, 3, \dots$ cu CL pe semiplanurile $\Gamma_{\varphi_0}(0 \leq r < \infty; \varphi = 0; 0 \leq \beta \leq \pi)$ și $\Gamma_{\varphi\alpha}(0 \leq r < \infty; \varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi)$ fluxul de căldură și temperatura este zero [61]. Deplasările termice $u_q(N)$ au fost calculate de la o sursă de căldură $F = F_0 = const.$ pe un segment al razei $[r_0 \leq r \leq r_1; r_0 \geq 0; r_1 > 0; r_0, r_1, = const., \varphi = \varphi_0; \beta = \beta_0]$:

$$F(M) = \begin{cases} F_0 = const., M \equiv (r, \varphi_0, \beta_0) \in [r_0 \leq r \leq r_1; \varphi = \varphi_0 > 0, \\ \beta = \beta_0 > 0; r_0, r_1, \varphi_0, \beta_0 = const.] \in V; \\ 0, M \equiv (r, \varphi_0, \beta_0) \notin [r_0 \leq r \leq r_1; \varphi = \varphi_0 > 0, \\ \beta = \beta_0 > 0; r_0, r_1, \varphi_0, \beta_0 = const.] \in V; \\ a\partial T(M)/\partial n_{\varphi_0} = S_{\varphi_0}(M) = 0; M \equiv (r, 0, \beta) \in \Gamma_{\varphi_0}(0 \leq r < \infty; \varphi = 0; 0 \leq \beta \leq \pi); \\ T(M) = f(M) = 0; M \equiv (r, \alpha, \beta) \in \Gamma_{\varphi\alpha}(0 \leq r < \infty; \varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi); \end{cases} \quad (3.107)$$

Deoarece în această PL este dată sursa de căldură, pentru a obține soluția problemei trebuie să se folosească formula integrală generală de tip Green (3.49):

Pentru calcularea deplasării $u_q(N)$ se folosește următoarea expresie:

$$\mathbf{u}(N) = a^{-1} \int_0^\infty \int_0^\alpha \int_0^\pi F(r, \varphi, \beta) \mathbf{U}(r, \varphi, \beta; N) r^2 dr d\varphi d\beta, \quad (3.108)$$

unde matricele $\mathbf{U}(r, \varphi, \beta; N)$ au fost determinate folosind relațiile (3.50) - (3.52).

Substituind în formula (3.108), funcțiile $F(M)$ și $\mathbf{U}(r, \varphi, \beta; N)$, determinate din ecuațiile (3.107) și (3.83), care sunt identice cu ecuațiile (3.50) - (3.52), se obține:

$$\begin{aligned} u_q(N) &= -\frac{F_0}{a} \int_{r_0}^{r_1} U_q(r, \varphi_0, \beta_0; N) dr \\ &= \frac{mF_0}{a} L_N^{(q)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{r_0}^{r_1} (R_k(r, \varphi_0, \beta_0; \rho, \psi, \vartheta) + R_{k\psi}(r, \varphi_0, \beta_0; \rho, \psi, \vartheta)) dr; \\ u_q(N) &= \frac{mF_0}{2a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k L_N \left\{ (r - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \bar{R}_k + (r - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)) \bar{R}_{k\psi} \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[(2\bar{R}_k + 2r - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k))^{\rho^2(1-\cos^2(\bar{\phi}-\bar{\omega}_k))} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (2\bar{R}_{k\psi} + 2r - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k))^{\rho^2(1-\cos^2(\bar{\phi}+\bar{\omega}_k))} \right] \right\} \Big|_{r=r_0}^{r=r_1}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Conform ecuației (3.109), deplasările $u_\rho(N)$ se vor determina folosind relația:

$$\begin{aligned}
u_q(N) &= -\frac{F_0}{a} \int_{r_0}^{r_1} U_q(r, \varphi_0, \beta_0; N) dr = \frac{mF_0}{a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{r_0}^{r_1} \left(f_k \bar{R}_k^{-1} + f_{k\psi} \bar{R}_{k\psi}^{-1} \right) dr \\
&= \frac{mF_0}{a} \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{r_0}^{r_1} \left(R_k(r, \varphi_0, \beta_0; \rho, \psi, \vartheta) + R_{k\psi}(r, \varphi_0, \beta_0; \rho, \psi, \vartheta) \right) dr \\
&= \frac{mF_0}{2a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ (r - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \bar{R}_k + (r - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)) \bar{R}_{k\psi} \right. \\
&\quad \left. + \ln \left[(2\bar{R}_k + 2r - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k))^{\rho^2(1-\cos^2(\bar{\phi}-\bar{\omega}_k))} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (2\bar{R}_{k\psi} + 2r - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k))^{\rho^2(1-\cos^2(\bar{\phi}+\bar{\omega}_k))} \right] \right\} \Big|_{r=r_0}^{r=r_1}, \tag{3.110}
\end{aligned}$$

unde:

$$\bar{f}_k = f_k(r, \varphi_0, \beta_0; N) = \rho - r \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k); \bar{f}_{k\psi} = f_{k\psi}(r, \varphi_0, \beta_0; N) = \rho - r \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k). \tag{3.111}$$

Expresia finală de calcul a deplasărilor termoelastice $u_\rho(N)$ este:

$$\begin{aligned}
u_\rho(N) &= \frac{mF_0}{2a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left\{ \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k) (\bar{R}_{k0} - \bar{R}_{k1}) + \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k) (\bar{R}_{k\psi 0} - \bar{R}_{k\psi 1}) \right. \\
&\quad \left. + \rho^2(1 - \cos^2(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) (\Pi_{k1} - \Pi_{k0}) + \rho^2(1 - \cos^2(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)) (\Pi_{k\psi 1} - \Pi_{k\psi 0}) \right. \\
&\quad \left. + (r_1 - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \bar{f}_{k1} \bar{R}_{k1}^{-1} - (r_0 - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \bar{f}_{k0} \bar{R}_{k0}^{-1} \right. \\
&\quad \left. + (r_1 - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)) \bar{f}_{k\psi 1} \bar{R}_{k\psi 1}^{-1} - (r_0 - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)) \bar{f}_{k\psi 0} \bar{R}_{k\psi 0}^{-1} \right. \\
&\quad \left. + 2\rho[1 - \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)] (\ln \bar{Z}_{k1} - \ln \bar{Z}_{k0}) + 2\rho[1 - \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)] (\ln \bar{Z}_{k\psi 1} - \ln \bar{Z}_{k\psi 0}) \right\}, \tag{3.112}
\end{aligned}$$

unde:

$$\bar{f}_{k1} = \bar{f}_k(r = r_1); \bar{f}_{k0} = \bar{f}_k(r = r_0); \bar{f}_{k\psi 1} = \bar{f}_{k\psi}(r = r_1); \bar{f}_{k\psi 0} = \bar{f}_{k\psi}(r = r_0).$$

Conform ecuației (3.109), deplasările $u_\psi(N)$ se determină cu următoarea formulă:

$$\begin{aligned}
u_\psi(N) &= -\frac{F_0}{a} \int_{r_0}^{r_1} U_\psi(r, \varphi_0, \beta_0; N) dr = \frac{mF_0}{a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{r_0}^{r_1} \left(\bar{\zeta}_k \bar{R}_k^{-1} + \bar{\zeta}_{k\psi} \bar{R}_{k\psi}^{-1} \right) dr \\
&= \frac{mF_0}{a} \frac{1}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \psi} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{r_0}^{r_1} \left(R_k(r, \varphi_0, \beta_0; \rho, \psi, \vartheta) + R_{k\psi}(r, \varphi_0, \beta_0; \rho, \psi, \vartheta) \right) dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{mF_0}{2a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ (r - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \bar{R}_k + (r - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)) \bar{R}_{k\psi} \right. \\
&\quad \left. + \ln \left[(2\bar{R}_k + 2r - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \rho^{2(1-\cos^2(\bar{\phi}-\bar{\omega}_k))} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (2\bar{R}_{k\psi} + 2r - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)) \rho^{2(1-\cos^2(\bar{\phi}+\bar{\omega}_k))} \right] \right\} \Big|_{r=r_0}^{r=r_1}, \tag{3.113}
\end{aligned}$$

unde:

$$\begin{aligned}
\bar{\zeta}_k &= \zeta_k(\varphi_0, \beta_0; \psi) = \sin \beta_0 \sin(\varphi_0 - \psi - (2k\pi/n)); \\
\bar{\zeta}_{k\psi} &= \zeta_{k\psi}(\varphi_0, \beta_0; \psi) = \sin \beta_0 \sin(\varphi_0 + \psi - (2k\pi/n)). \tag{3.114}
\end{aligned}$$

Expresia finală de calcul a deplasărilor termoelastice $u_\psi(N)$ este:

$$\begin{aligned}
u_\psi(N) &= \frac{mF_0}{2a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left\{ \sin \beta_0 \sin(\varphi_0 + \psi - 2k\pi/n) \right. \\
&\quad \times \left[\bar{R}_{k\psi 1} - \bar{R}_{k\psi 0} + r_1(r_1 - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)) \bar{R}_{k\psi 1}^{-1} - r_0(r_0 - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)) \bar{R}_{k\psi 0}^{-1} \right] \\
&\quad \left. + \sin \beta_0 \sin(\varphi_0 - \psi - 2k\pi/n) \right. \\
&\quad \times \left[\bar{R}_{k 1} - \bar{R}_{k 0} + r_1(r_1 - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \bar{R}_{k 1}^{-1} - r_0(r_0 - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \bar{R}_{k 0}^{-1} \right] \\
&\quad - \rho^2(1 - \cos^2(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k))(\bar{H}_{k 1} - \bar{H}_{k 0}) + \rho^2(1 - \cos^2(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k))(\bar{H}_{k\psi 1} - \bar{H}_{k\psi 0}) \\
&\quad + 2\rho \sin \beta_0 \left[\cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k) \sin(\varphi_0 + \psi + 2k\pi/n)(\ln \bar{Z}_{k\psi 1} - \ln \bar{Z}_{k\psi 0}) \right. \\
&\quad \left. - \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k) \sin(\varphi_0 - \psi + 2k\pi/n)(\ln \bar{Z}_{k 1} - \ln \bar{Z}_{k 0}) \right] \left. \right\}. \tag{3.115}
\end{aligned}$$

Conform ecuației (3.109), deplasările termoelastice $u_\vartheta(N)$ se vor determina cu următoarea relație:

$$\begin{aligned}
u_\vartheta(N) &= -\frac{F_0}{a} \int_{r_0}^{r_1} U_\vartheta(r, \varphi_0, \beta_0; N) dr = \frac{mF_0}{a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{r_0}^{r_1} \left(\bar{\eta}_k \bar{R}_k^{-1} + \bar{\eta}_{k\psi} \bar{R}_{k\psi}^{-1} \right) dr \\
&= \frac{mF_0}{a} \frac{\partial}{\rho \partial \vartheta} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{r_0}^{r_1} (R_k(r, \varphi_0, \beta_0; \rho, \psi, \vartheta) + R_{k\psi}(r, \varphi_0, \beta_0; \rho, \psi, \vartheta)) dr \\
&= \frac{mF_0}{2a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\partial}{\rho \partial \vartheta} \left\{ (r - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \bar{R}_k + (r - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)) \bar{R}_{k\psi} \right. \\
&\quad \left. + \ln \left[(2\bar{R}_k + 2r - \rho \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)) \rho^{2(1-\cos^2(\bar{\phi}-\bar{\omega}_k))} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (2\bar{R}_{k\psi} + 2r - \rho \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)) \rho^{2(1-\cos^2(\bar{\phi}+\bar{\omega}_k))} \right] \right\} \Big|_{r=r_0}^{r=r_1}, \tag{3.116}
\end{aligned}$$

unde:

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_k &= \eta_k(r, \varphi_0, \beta_0; \vartheta, \psi) = -(\sin \beta_0 \cos \vartheta \cos(\varphi_0 - \psi - 2k\pi/n) - \cos \beta_0 \sin \vartheta); \\ \bar{\eta}_{k\psi} &= \eta_{k\psi}(r, \varphi_0, \beta_0; \vartheta, \psi) = -(\sin \beta_0 \cos \vartheta \cos(\varphi_0 + \psi - 2k\pi/n) - \cos \beta_0 \sin \vartheta).\end{aligned}\quad (3.117)$$

Expresia finală de calcul a deplasărilor termoelastice $u_\vartheta(N)$ este:

$$\begin{aligned}u_\vartheta(N) &= \frac{mF_0}{2a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left\{ r_1(r_1 + \rho) [\cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)(\cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k) - 1)] \bar{R}_{k1}^{-1} \right. \\ &- r_0(r_0 + \rho) [\cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)(\cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k) - 1)] \bar{R}_{k0}^{-1} + r_1(r_1 + \rho) [\cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)(\cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k) - 1)] \bar{R}_{k1}^{-1} \\ &+ 2\rho^2 [1 - \cos^2(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)] (\Pi_{k\psi 1} - \Pi_{k\psi 0}) + 2\rho^2 [1 - \cos^2(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)] (\Pi_{k1} - \Pi_{k0}) \\ &\left. - r_0(r_0 + \rho) [\cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)(\cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k) - 1)] \bar{R}_{k\psi 0}^{-1} \right\} \\ &+ 2\rho [1 - \cos(\bar{\phi} - \bar{\omega}_k)] (\ln \bar{Z}_{k1} - \ln \bar{Z}_{k0}) + 2\rho [1 - \cos(\bar{\phi} + \bar{\omega}_k)] (\ln \bar{Z}_{k\psi 1} - \ln \bar{Z}_{k\psi 0}) \}.\end{aligned}\quad (3.118)$$

Acest exemplu demonstrează utilitatea obținerii soluțiilor din §3.2.3. și anume a funcțiilor de influență ale deplasărilor termoelastice $U_q(M, N)$, de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură și formula integrală de tip Green.

Cercetările efectuate demonstrează că soluțiile obținute în funcții elementare din ecuațiile (3.112), (3.115) și (3.118), pentru deplasările termoelastice, satisfac PL a ecuațiilor (3.30) și (3.45) - (3.47) de la o sursă de căldură (3.107). Pot fi obținute expresiile tensiunilor termice folosind deplasările termice din ecuațiile (3.112), (3.115) și (3.117) și legea Duhamel-Neumann (3.35), unde câmpul de temperatură poate fi determinat prin următoarea formulă integrală Poisson a PL în conductibilitate termică, descrisă de relația (3.47) și CL (3.107):

$$T(\varphi, \beta, \rho, \psi, \vartheta) = \frac{F_0}{a} \int_{r_0}^{r_1} G(r, \varphi, \beta; \rho, \psi, \vartheta) dr = \frac{F_0}{4\pi a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_a^b (\bar{R}_k^{-1} + \bar{R}_{k\psi}^{-1}) dr; \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned}T(\varphi, \beta, \rho, \psi, \vartheta) &= \frac{F_0}{4\pi a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left\{ \ln [(2R_k + 2r - 2\rho \cos(\phi - \omega_k)) \right. \\ &\left. \times (2R_{k\psi} + 2r - 2\rho \cos(\phi + \omega_k))] \right\} \Big|_{r=r_0}^{r=r_1}.\end{aligned}\quad (3.120)$$

În relația (3.120), a fost utilizată FG (3.59) pentru PL descrisă de ecuația (3.58). Expresia finală pentru câmpul de temperatură este:

$$\begin{aligned}T(\varphi, \beta, \rho, \psi, \vartheta) &= \frac{F_0}{4\pi a} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \ln \left[\frac{(2R_{k1} + 2r_1 - 2\rho \cos(\phi - \omega_k)) \times (2R_{k\psi 1} + 2r_1 - 2\rho \cos(\phi + \omega_{k\psi}))}{(2R_{k0} + 2r_0 - 2\rho \cos(\phi - \omega_k)) \times (2R_{k\psi 0} + 2r_0 - 2\rho \cos(\phi + \omega_{k\psi}))} \right] \right\},\end{aligned}\quad (3.121)$$

unde: $R_{k1} = R_k(r = r_1); R_{k0} = R_k(r = r_0); R_{k\psi1} = R_{k\psi}(r = r_1); R_{k\psi0} = R_{k\psi}(r = r_0)$. (3.122)

Soluțiile obținute în funcții elementare în acest paragraf au un rol foarte important în dezvoltarea și examinarea preciziei metodelor numerice folosite la obținerea soluțiilor PL respective pentru pane sferice termoelastice. Soluțiile obținute, de asemenea, pot fi utilizate în inginerie, pentru calculul deplasărilor și tensiunilor termoelastice în PL 3D, pentru pane sferice $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi)$; $\alpha = \pi/n; n = 2, 3, \dots$, atunci când deplasările normale și tensiunile tangențiale sau tensiunile normale și deplasările tangențiale sunt date pe semiplanurile marginale $\Gamma_{\varphi0}$ sau $\Gamma_{\varphi\alpha}$. Deplasările termoelastice $u_q(N)$ sunt cauzate de sursa interioară de căldură F , descrisă de (3.107), aplicată pe segmentul razei $[r_0 \leq r \leq r_1; r_0 \geq 0; r_1 > 0; r_0, r_1, = const., \varphi = \varphi_0; \beta = \beta_0]$. La limita semiplanurilor $\Gamma_{\varphi0}$ și $\Gamma_{\varphi\alpha}$ fluxul de căldură și temperatura este zero.

Deplasările termoelastice radiale u_ρ în pătrimea de spațiu $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \pi/2)$, de la acțiunea unei surse interioare de căldură F , descrisă în (3.107) sunt prezentate grafic în Figurile 3.11, b), 3.12, b), 3.13, b), 3.14, b), 3.15, b), 3.16, b). Aceste grafice au fost construite în baza expresiilor (3.110) - (3.112) folosind programa Maple 18.

Avantajele rezultatelor obținute și posibilitatea de a obține noi funcții Green și formule integrale. În primul rând, este important de menționat faptul că au fost obținute pentru prima dată în pana sferică termoelastică: formula integrală de tip Green (3.49) și funcțiile Green (3.50) - (3.57) ale PL generale a ecuațiilor (3.30) și (3.45) - (3.48), precum și soluții exacte ale funcțiilor elementare (3.94) - (3.106) și (3.109) - (3.118) pentru PL (3.30), (3.44) - (3.47), (3.92) și (3.44) - (3.47), (3.107). Avantajele FG (3.50) - (3.57) și formula integrală de tip Green (3.49) sunt următoarele:

- 1) Dacă se compară metoda potențialului termoelastic propusă de Timošenko și Goodier, alte metode ale potențialului termoelastic și unele metode tradiționale cu metoda aplicată, la rezolvarea PL în termoelasticitate, se poate afirma:
 - nu a fost rezolvată PL a conductibilității termice pentru determinarea câmpului de temperatură preliminară (prima etapă a soluției) și ulterior să fie rezolvate ecuațiile Lamé folosind câmpul de temperatură cunoscut (a doua etapă a soluției). În formula integrală de tip Green obținută, soluția este prezentată în mod direct prin intermediul acțiunilor de căldură cunoscute (sursa interioară de căldură, temperatură și flux de căldură aplicate la hotar). Această formulă permite să obținem soluțiile finale folosind termenii integralelor; prin urmare, nu a fost necesar să fie rezolvată PL preliminară a conductibilității de căldură

sau o altă PL;

- nu a fost necesar să fie rezolvată suplimentar PL a elasticității. În particular, metoda ecuațiilor integrale singulare, adică, una dintre metodele potențialelor termoelastice, pentru a rezolva PL tradițională, trebuie să fie rezolvat un sistem cu CL ale ecuațiilor integrale singulare. Formula integrală de tip Green prezentată în (3.49) oferă soluția completă a PL cu ecuațiile (3.30), (3.44) - (3.47) și, prin urmare, nu este necesar să fie rezolvată o PL suplimentară;
- 2) FG date în ecuațiile (3.50) - (3.57) și formula integrală de tip Green prezentate în (3.49) obținute în funcții elementare au o importanță semnificativă în aplicații, datorită calculului rapid și a preciziei mari;
- 3) Formula integrală de tip Green prezentată în (3.49) poate fi utilizată pentru punerea în aplicare numerică imediată;
- 4) Pe baza acestei formule, este posibil să se elaboreze un element finit BEM [19];
- 5) FG date în ecuațiile (3.50) - (3.57) permit să fie scrise soluțiile exacte pentru mai multe PL particulare de la acțiuni de căldură (sursa interioară de căldură, temperatura la limită și fluxul de căldură) așa cum este demonstrat în §3.2.4., inclusiv discontinuitatea și dislocarea sub formă de integrale pe o linie sau funcții elementare.

Conform avantajelor menționate mai sus, utilitatea și importanța noilor funcții exacte Green și formula integrală de tip Green pentru pana sferică termoelastică obținută într-o formă închisă, explică de ce specialiștii apreciază mult FG și soluțiile integrale a oricărei PL. De aceea, s-a analizat posibilitatea obținerii formulei integrale de tip Green în termoelasticitate nu numai pentru o pană sferică, dar și corpuri din sistemul de coordonate cilindric și alte domenii canonice ortogonale [10, p. 218] [38, 42], [58, p. 33]. Așa cum s-a observat, principala dificultate în obținerea funcțiilor termoelastice Green U_q este determinarea funcțiilor de influență $\Theta^{(q)}$ pentru o PL în elasticitate și a FG G , pentru o PL în conductibilitatea termică.

Construirea graficelor deplasărilor termoelastice pentru pana sferică.

Folosind programa Maple 18 au fost prezentate graficele deplasărilor termoelastice radiale u_ρ pentru o PL termoelastică 3D în pătrimea de spațiu sferic $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \pi/2; 0 \leq \beta \leq \pi)$, atunci când deplasările normale și tensiunile tangențiale omogene și tensiunile normale și deplasările tangențiale sunt date pe semiplanele marginale $\Gamma_{\varphi 0}$ și $\Gamma_{\varphi \pi/2}$. Deplasările termoelastice sunt cauzate de temperatura T sau a sursei interioare de căldură F , aplicate pe

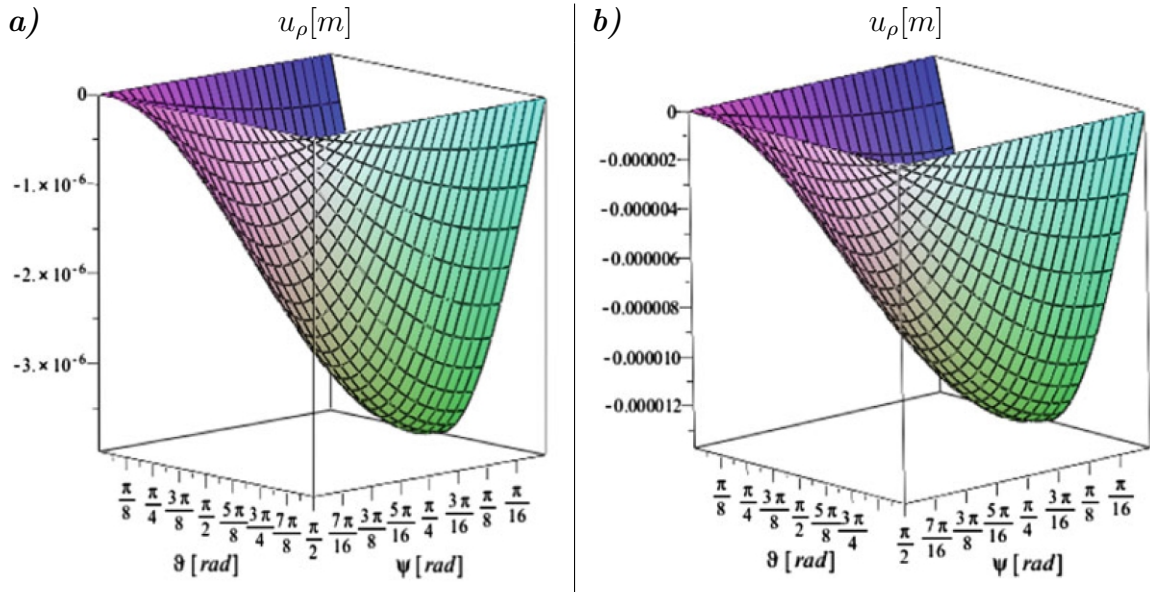


Fig. 3.11. Graficele deplasărilor termice u_ρ în pana elastică V pentru $\rho = 0, 1m$, $0 \leq \psi \leq \pi/2, 0 \leq \vartheta \leq \pi$, a) de la acțiunea unui gradient de temperatură T_0 și b) de la o sursă interioară de căldură F_0 .

un segment al razei [$r_0 \leq r \leq r_1, r_0 \geq 0, r_1 > 0, r_0, r_1 = const., \varphi = \varphi_0, \beta = \beta_0$], descrise de ecuațiile (3.92) și (3.107). În aceste PL fluxul de căldură și temperatura sunt egale cu zero la limita semiplanurilor Γ_{φ_0} și $\Gamma_{\varphi\pi/2}$. În Figurile 3.11 - 3.16 sunt prezentate 12 grafice spațiale pentru deplasările termoelastice radiale u_ρ în pătrimea de spațiu $V(0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \pi/2; 0 \leq \beta \leq \pi)$, cauzate de temperatura T , cu condițiile (3.92) (Figurile: 3.11, a), 3.12, a), 3.13, a), 3.14, a), 3.15, a) și 3.16, a)); de la o sursă interioară de căldură F , cu condițiile (3.107) (Figurile: 3.11, b), 3.12, b), 3.13, b), 3.14, b), 3.15, b) și 3.16, b)).

Graficele prezentate în Figurile 3.11, a), 3.12, a), 3.13, a), 3.14, a), 3.15, a) și 3.16, a) au fost construite în baza expresiilor (3.97) - (3.102) pentru $n = 2$. Respectiv, graficele prezentate în Figurile 3.11, b), 3.12, b), 3.13, b), 3.14, b), 3.15, b) și 3.16, b) au fost construite în baza expresiilor (3.110) - (3.112) pentru $n = 2$. Toate cele 12 grafice ale deplasărilor radiale termoelastice au fost construite pentru următoarele valori ale constantelor elastice și termice: coeficientul Poisson, $\nu = 0,3$; modulul de elasticitate $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, coeficientul de dilatare termică liniară $\alpha = 6,57 \cdot 10^{-8}(K^{-1})$, conductivitatea termică $a = 1,8(W/Km)$, temperatura $T_0 = 323,15K$, sursa de căldură $F_0 = 100(W/m^3)$, raza $r_0 = 1,0m$, $r_1 = 10m$, iar unghiurile $\varphi_0 = \pi/4, \beta_0 = \pi/2$.

În Figurile 3.11 - 3.15 se observă că graficele deplasărilor termoelastice radiale u_ρ , de la acțiunea unui gradient de temperatură $T_0 = 323,15K$ (Figurile 3.11, a), 3.12, a), 3.13, a), 3.14, a) și 3.15, a)) și cauzate de sursa interioară de căldură $F_0 = 100(W/m^3)$ (Figurile

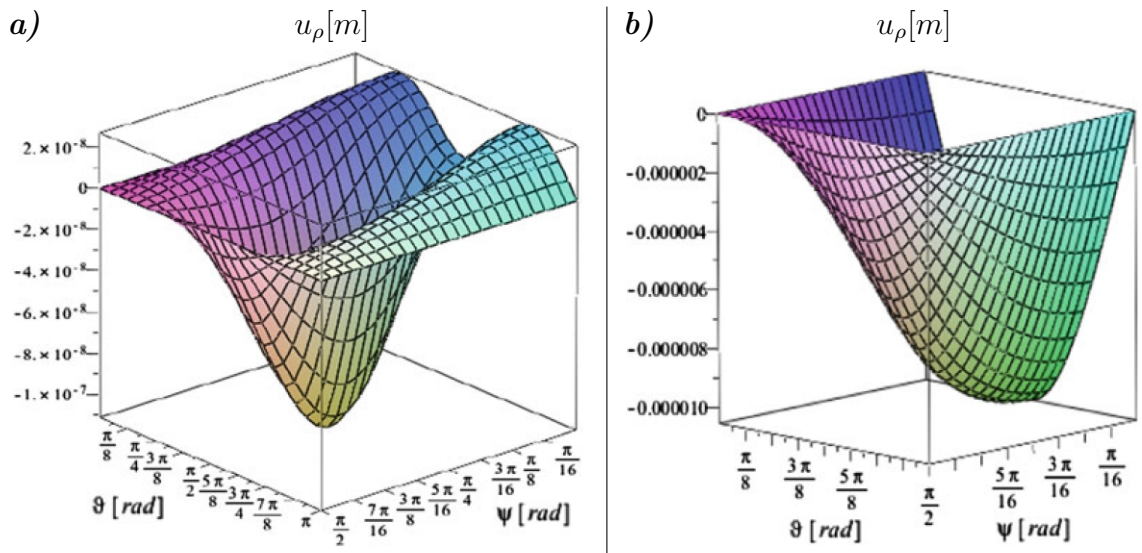


Fig. 3.12. Graficele deplasărilor termice u_ρ în pana elastică V pentru $\rho = 2, 1m$, $0 \leq \psi \leq \pi/2, 0 \leq \vartheta \leq \pi$, a) de la acțiunea unui gradient de temperatură T_0 și b) de la o sursă interioară de căldură F_0 .

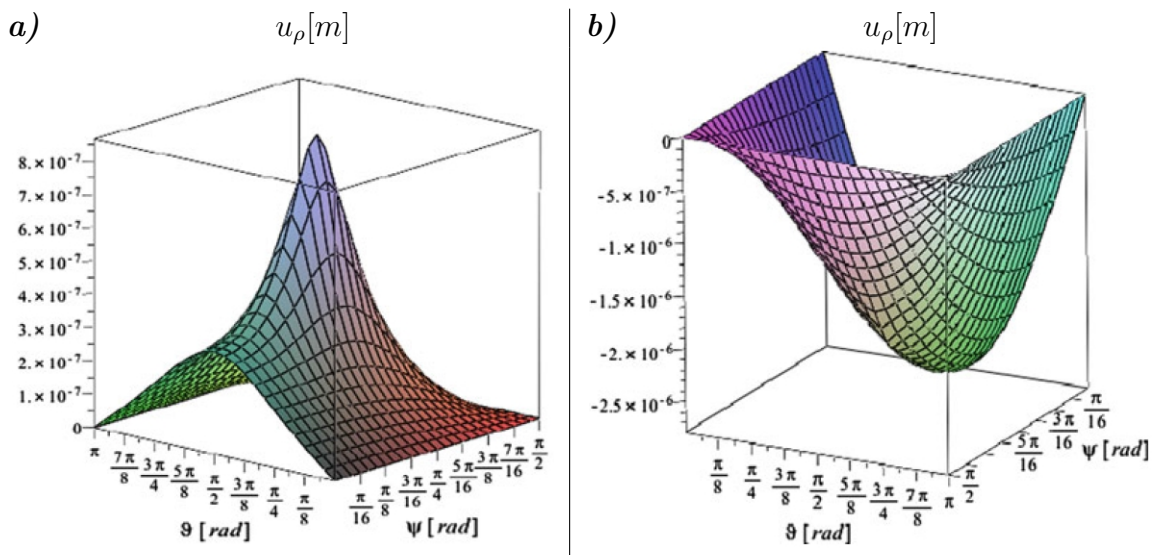


Fig. 3.13. Graficele deplasărilor termice u_ρ în pana elastică V pentru $\rho = 8.0m$, $0 \leq \psi \leq \pi/2, 0 \leq \vartheta \leq \pi$, a) de la acțiunea unui gradient de temperatură T_0 , și b) de la o sursă interioară de căldură F_0 .

3.11, b), 3.12, b), 3.13, b), 3.14, b) și 3.15, b)) sunt simetrice în raport cu sectorul nelimitat $0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \psi \leq \pi/2, \vartheta = \pi/2$. Acest lucru se explică prin faptul că în pătrimea de spațiu, temperatura $T_0 = 323,15K$ și sursa interioară de căldură $F_0 = 100(W/m^3)$, se aplică în cadranul simetric $0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \psi \leq \pi/4, \vartheta = \pi/2$ a pătrimii de spațiu V .

Deși, temperatura $T_0 = 323,15K$ și sursa de căldură $F_0 = 100(W/m^3)$ sunt aplicate în cadranul simetric $0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \psi \leq \pi/4, \vartheta = \pi/2$ a pătrimii de spațiu V , graficele deplasărilor termoelastice radiale u_ρ , nu sunt simetrice în raport cu semiplanul $0 \leq \rho \leq \infty, \psi = \pi/4, 0 \leq \vartheta \leq \pi$. Acest lucru se explică prin faptul că condițiile mecanice omogene de limită date pe

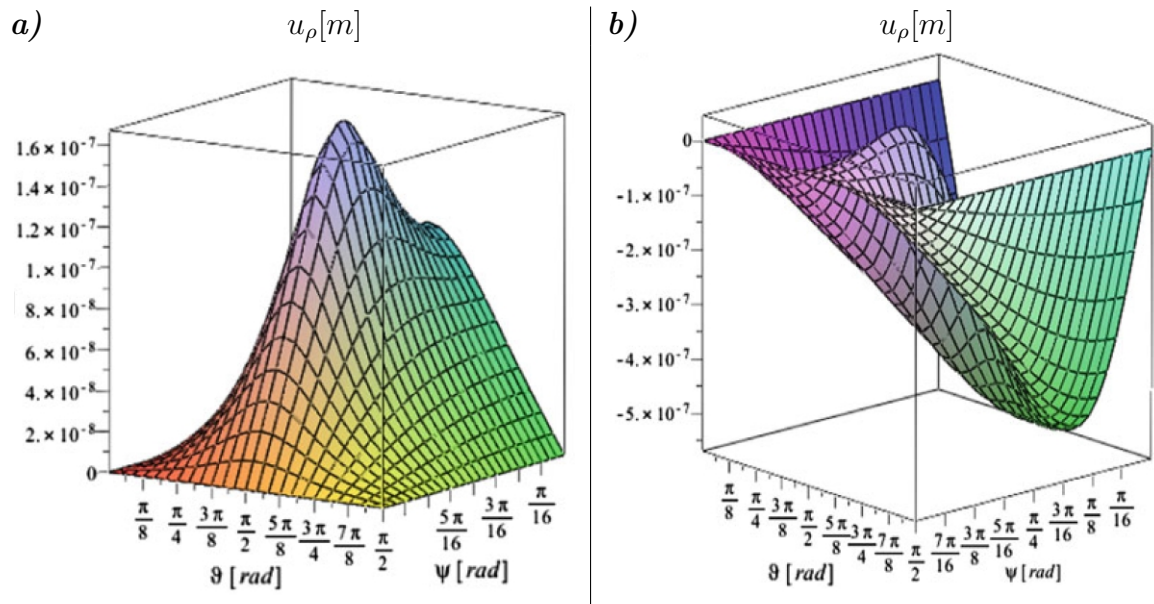


Fig. 3.14. Graficele deplasărilor termice u_ρ în pana elastică V pentru $\rho = 15m$, $0 \leq \psi \leq \pi/2, 0 \leq \vartheta \leq \pi$, a) de la acțiunea unui gradient de temperatură T_0 , și b) de la o sursă interioară de căldură F_0 .

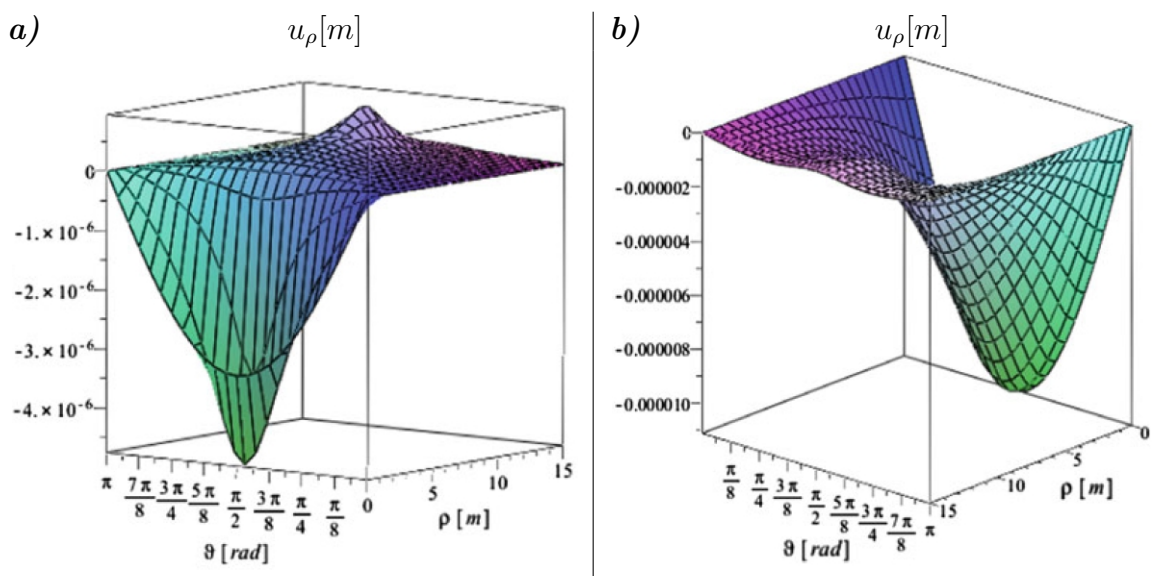


Fig. 3.15. Graficele deplasărilor termice u_ρ în pana elastică V pentru $\psi = \pi/5$, $0 \leq \rho \leq 15m, 0 \leq \vartheta \leq \pi$, a) de la acțiunea unui gradient de temperatură T_0 și b) de la o sursă interioară de căldură F_0 .

sempianurile marginale Γ_{φ_0} și $\Gamma_{\varphi(\pi/2)}$ a pătrimii de spațiu V sunt diferite. În Figurile 3.11 - 3.15 se poate vedea, de asemenea, că pe semiplanul marginal $\Gamma_{\varphi(\pi/2)}$ deplasările radiale termoelastice u_ρ sunt zero. Aceasta confirmă faptul că deplasările termoelastice radiale u_ρ satisfac CL (3.46) pe semiplanul marginal $\Gamma_{\varphi(\pi/2)}$.

Pe lângă proprietățile comune ale graficelor din Figurile 3.11 - 3.15 descrise mai sus, se observă și proprietățile specifice pentru fiecare grafic din Figurile 3.11 - 3.16.

Graficele deplasărilor termoelastice radiale u_ρ , construite pentru $\rho = 0, 1m$, sunt prezentate

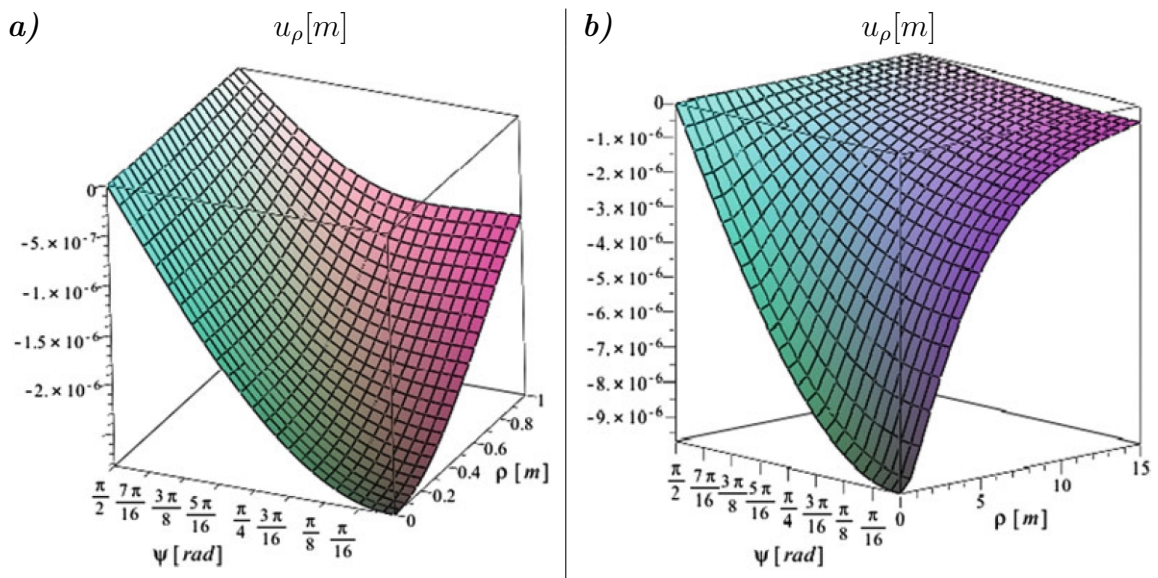


Fig. 3.16. Graficele deplasărilor termice u_ρ în pana elastică V pentru $\vartheta = \pi/4$, $0 \leq \rho \leq 1.0m$, $0 \leq \psi \leq \pi/2$, a) de la acțiunea unui gradient de temperatură T_0 și b) de la o sursă interioară de căldură F_0 .

în Figura 3.11. În Figura 3.11 se mai poate observa că pentru $\rho = 0, 1m$, graficul deplasărilor termoelastice radiale u_ρ , de la acțiunea unui gradient de temperatură $T_0 = 323, 15K$ (Figura 3.11, a) este similar cu graficul u_ρ , de la o sursă de căldură $F_0 = 100(W/m^3)$ (Figura 3.11, b). Valorile deplasărilor termoelastice radiale u_ρ pe ambele grafice sunt negative. Maximul deplasărilor termoelastice radiale u_ρ se realizează pentru $\psi = 0, \vartheta = \pi/2$.

Graficele deplasărilor termoelastice radiale u_ρ , construite pentru $\rho = 0, 1m$, sunt prezentate în Figura 3.12. În Figura 3.12 se poate observa că pentru $\rho = 2, 1m$, graficul deplasărilor termoelastice radiale u_ρ , de la acțiunea unui gradient de temperatură $T_0 = 323, 15K$ (Figura 3.12, a) este în mod substanțial diferit în comparație cu graficul u_ρ , de la sursa de căldură $F_0 = 100(W/m^3)$ (Figura 3.12, b).

Valorile deplasărilor termoelastice radiale u_ρ din Figura 3.12, b) sunt negative, dar deplasările termice din Figura 3.12, a) sunt atât pozitive, cât și negative. În Figura 3.12, a), se observă că maximum deplasărilor termoelastice radiale u_ρ este atins pentru $\psi = \pi/4, \vartheta = \pi/2$, dar Figura 3.12, b) are maximum de u_ρ în $\psi = 0, \vartheta = \pi/2$.

Graficele deplasărilor termoelastice radiale u_ρ construite pentru $\rho = 8, 0m$, sunt prezentate în Figura 3.13. În plus, în Figura 3.13, se poate afirma că pentru $\rho = 8, 0m$, graficul deplasărilor termoelastice radiale u_ρ , cauzat de temperatura $T_0 = 323, 15K$ (Figura 3.13, a) este în mod substanțial diferit în comparație cu graficul u_ρ , de la sursa de căldură $F_0 = 100(W/m^3)$ (Figura 3.13, b). Valorile deplasărilor termoelastice radiale u_ρ în Figura 3.13, b) sunt negative, dar Figura 3.13, a) are numai valori pozitive.

În Figura 3.13, a), valoarea maximală a deplasărilor termoelastice radiale u_ρ se realizează pentru $\psi = \pi/4, \vartheta = \pi/2$, dar Figura 3.13, b) are maximul de u_ρ pentru $\psi = 0, \vartheta = \pi/2$.

Graficele deplasărilor termoelastice radiale u_ρ construite pentru $\rho = 15,0m$, sunt prezentate în Figura 3.14. În Figura 3.14, se observă că pentru $\rho = 15,0m$ graficul deplasărilor termoelastice radiale u_ρ , de la acțiunea unui gradient de temperatură $T_0 = 323,15K$ (Figura 3.14, a) este în mod substanțial diferit în comparație cu graficul u_ρ , de la o sursă de căldură $F_0 = 100(W/m^3)$ (Figura 3.14, b). Valorile deplasărilor termoelastice radiale u_ρ în Figura 3.14, b) sunt pozitive și negative, dar Figura 3.14, a) are numai valori pozitive.

În plus, în Figura 3.14, a) valoarea maximă a deplasărilor termoelastice radiale u_ρ pentru $\psi = \pi/4, \vartheta = \pi/2$, dar Figura 3.14, b) are maximul de u_ρ în $\psi = 0, \vartheta = \pi/2$.

Graficele deplasărilor termoelastice radiale u_ρ construite pentru $\psi = \pi/5$, sunt prezentate în Figura 3.15. În Figura 3.15, pentru $\psi = \pi/5$, graficul deplasărilor termoelastice radiale u_ρ , cauzat de un gradient de temperatură $T_0 = 323,15K$ (Figura 3.15, a) este în mod substanțial diferit în comparație cu graficul u_ρ , de la o sursă de căldură $F_0 = 100(W/m^3)$ (Figura 3.15, b). Valorile deplasărilor termoelastice radiale u_ρ în Figura 3.15, b) sunt negative, dar Figura 3.15, a) are valori pozitive și negative. În Figura 3.15, a) se vede că valoarea maximă a deplasărilor termoelastice radiale u_ρ este pentru $\rho = 10m, \vartheta = \pi/2$, dar valoarea minimă este la $\rho = 0,0m, \vartheta = \pi/2$. Figura 3.15, b) are valoarea minimă a u_ρ pentru $\rho = 0,0m, \vartheta = \pi/2$. În ambele grafice, se observă că dacă raza ρ tinde la infinit (practic, atunci când $\rho \geq 15,0m$), deplasările termoelastice radiale u_ρ se egalează cu zero.

Graficele deplasărilor termoelastice radiale u_ρ construite pentru $\vartheta = \pi/4$, sunt prezentate în Figura 3.16. Analizând graficele din Figura 3.16, se observă că deplasările termoelastice radiale u_ρ sunt negative. Pentru semiplanul marginal $\Gamma_{\varphi(\pi/2)}$ din Figura 3.16, deplasările termoelastice radiale u_ρ sunt zero. Acest lucru confirmă faptul că deplasările termoelastice radiale u_ρ satisfac CL (3.46) pentru semiplanul marginal $\Gamma_{\varphi(\pi/2)}$.

În Figura 3.16, a) valoarea maximă a deplasărilor termoelastice radiale u_ρ se realizează pentru $\rho = 0,0m, \psi = 0$. Figura 3.16, b) are valoare maximă a u_ρ pentru $\rho = 0,0m, \psi = \pi/2$. În Figura 3.16 se observă că u_ρ crește pe segmentul $0 \leq \rho \leq 1,0m$ (Figura 3.16, a) și pe segmentul $0 \leq \rho \leq 15,0m$ (Figura 3.16, b). De asemenea, în Figura 3.16, b), dacă raza ρ tinde la infinit (atunci când $\rho \geq 15,0m$), deplasările termoelastice radiale u_ρ se egalează cu zero.

Concluzii:

- Au fost obținute următoarele relații: formula integrală de tip Green (3.49) și FG (3.50) - (3.57) pentru PL generală (3.30) și (3.45) - (3.48), soluțiile exacte deduse în funcții

elementare (3.99), (3.100), (3.102), (3.103) și (3.105), (3.106) pentru PL particulară (3.30) și (3.45) - (3.48), precum și (3.112), (3.115), (3.118) pentru PL particulară (3.30) și (3.45) - (3.48) pentru pana sferică termoelastică. Ele au o utilitate mare și pot fi utilizate pentru calculul deplasărilor termoelastice $u_q(N)$ într-o pană sferică. Principalul avantaj al formulei integrale obținute este că deplasările termoelastice în pana sferică termoelastică sunt exprimate direct prin sursa interioară de căldură, fluxul de căldură, temperatura etc. Deci, nu este necesar să se rezolve o PL suplimentară pentru determinarea preliminară a câmpului interior de temperatură, așa ca în metodele tradiționale;

- Cel mai dificil în obținerea funcțiilor de influență $U_q(M, N)$ și scrierea formulelor integrale de tip Green folosind metodologia enunțată, este determinarea FG $G(M, N)$ în conductibilitate termică și funcțiile de influență pentru dilatarea de volum $\Theta^q(M, N)$ în elasticitate. Este foarte important de menționat, că folosind această teoremă pot fi rezolvate în jur de 16 PL în termoelasticitate pentru pana sferică (la limite pot fi date următoarele condiții omogene de limită mecanică în orice combinații: (a) deplasările normale și tensiunile tangențiale; (b) tensiunile normale și deplasările tangențiale). Astfel, luând în considerare și cazurile particulare: pătrimea de spațiu și semispațiu care rezultă din ecuația pentru pana sferică demonstrată mai sus și luând în considerațiile combinațiile posibile ale CL neomogene în problema conductibilității termice, pot fi obținute noi formule integrale exacte de tip Green și funcțiile termoelastice Green în funcții elementare pentru aproximativ 40 PL a termoelasticității. Astfel, una dintre concluziile principale, care rezultă din teorema demonstrată mai sus este că metoda propusă pentru obținerea formulelor integrale de tip Green și a funcțiilor termoelastice Green în termoelasticitate poate fi aplicată pentru mai multe PL. Rezultatele prezentate în această problemă pot oferi posibilități foarte mari cercetătorilor din domeniu, pentru a obține noi funcții de influență termoelastice și formule integrale de tip Green, nu numai pentru pane sferice, dar și pentru multe domenii canonice sferice;
- Ecuațiile și formulele generale prezentate în această problemă, pentru determinarea funcțiilor de influență $U_q(M, N)$ din (3.36), precum și formula integrală de tip Green (3.34) sunt valabile nu numai pentru termoelasticitate, dar și pentru alte domenii fizice, cum ar fi poroelasticitatea, descrise de aceeași PL ca pentru termoelasticitatea [28];
- Abordarea prezentată în această problemă pentru pana sferică poate fi extinsă la orice alte domenii canonice sferice. Această extensie poate fi efectuată, atunci când ambele funcții G și $\Theta^{(q)}$ sunt stabilite.

3.3. Validarea problemelor de limită tridimensionale

Folosind MRJA s-au determinat tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$, de la o sursă unitară punctiformă de căldură pentru o PL a unui domeniu sub formă de semispațiu $S(0 \leq x_1 < \infty, -\infty < x_2, x_3 < \infty)$, cu condițiile termice de limită de tip Dirichlet $G_T = 0$ și următoarele condiții mecanice de limită:

- pentru planul marginal $\Gamma_{10}(y_1 = 0; -\infty < y_2, y_3 < \infty) \longrightarrow \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{13} = 0$.

Condițiile mecanice și cele termice de limită sunt prezentate în Figura 3.17.

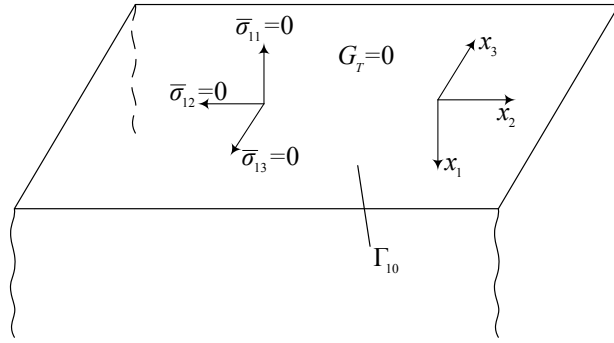


Fig. 3.17. Schema semispațiului cu condițiile de limită mecanice $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13}$ și termice G_T de pe suprafața Γ_{10} .

Folosind aceeași metodologie de rezolvare a PL sub formă de semispațiu (§3.1.) au fost obținute FPTG.

Expresiile pentru deplasările termice de la o sursă unitară de căldură $U_i(x, \xi); i = 1, 2, 3$ au următoarea formă:

$$U_1(x, \xi) = -\frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} [(x_1 - \xi_1)R^{-1} + (x_1 + \xi_1)R_1^{-1} + 2x_1 \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} R_1^{-1} - \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} R_1^{-1} \right)]; \quad (3.123)$$

$$U_2(x, \xi) = -\frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} [(x_2 - \xi_2) (R^{-1} + R_1^{-1}) - 2 \left(x_1 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} R_1^{-1} - \int \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} R_1^{-1} d\xi_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} x_1 \int \frac{\partial}{\partial \xi_2} R_1^{-1} d\xi_1 \right)]; \quad (3.124)$$

$$U_3(x, \xi) = -\frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} [(x_3 - \xi_3) (R^{-1} + R_1^{-1}) - 2 \left(x_1 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_3} R_1^{-1} \right)];$$

$$- \int \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_3} R_1^{-1} d\xi_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} x_1 \int \frac{\partial}{\partial \xi_3} R_1^{-1} d\xi_1 \Bigg]. \quad (3.125)$$

Dilatarea de volum:

$$\Theta(x, \xi) = \frac{\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left(R^{-1} - R_1^{-1} - \frac{2\mu}{\lambda + \mu} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} R_1^{-1} \right). \quad (3.126)$$

În literatura de specialitate [106, p. 495] sunt cunoscute expresiile tensiunilor termice, de la o sursă unitară punctiformă de căldură pentru această PL cu CL enunțate în problemă, rezolvată prin metoda Papkovici-Neuber.

Formulele obținute (3.123) - (3.126) se substituie în legea Duhamel-Neumann (2.3), astfel, se obțin relațiile pentru tensiunile termice de la o sursă unitară punctiformă de căldură, ce corespund în totalitate cu expresiile tensiunilor termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ [106, p. 495], obținute prin metoda Papkovici-Neuber. Deci, s-a mai demonstrat încă o dată, că rezultatele obținute în urma rezolvării PL folosind MRJA sunt corecte.

3.4. Concluzii la capitolul 3

- Soluțiile integrale ale FPTG (3.12) - (3.14) și relațiile tensiunilor termice (3.16) - (3.21) de la o sursă unitară punctiformă de căldură pentru semispațiu pot fi folosite la obținerea expresiilor termoelastice de la acțiunea unei surse interioare de căldură și/sau gradient de temperatură cu CL enunțate în problemă;
- Soluțiile integrale ale deplasărilor termoelastice (3.27) - (3.29) pot fi folosite pentru determinarea deplasărilor termoelastice în semispațiu, de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat în limita oricărui segment pe direcția axei x_3 a planului marginal Γ_{10} cu CL enunțate în problemă;
- Folosind relațiile deplasărilor termoelastice în semispațiu (3.27) - (3.29), de la acțiunea unui gradient de temperatură, folosind formula Duhamel-Neumann (2.4), pot fi calculate tensiunile termice pentru o PL particulară provenite de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat în limita oricărui segment pe direcția x_3 a planului marginal Γ_{10} . Fiind cunoscute expresiile analitice pot fi construite graficele acestor tensiuni termice.
- Soluțiile integrale ale FPTG (3.83), pentru pana sferică, pot fi folosite la obținerea expresi-

siilor termoelastice de la acțiunea unei surse interioare de căldură, flux de căldură și/sau gradient de temperatură cu CL enunțate în problemă;

- Soluțiile integrale ale deplasărilor termoelastice (3.99), (3.102) și (3.105) pot fi folosite pentru determinarea deplasărilor termoelastice în pana sferică, de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat pe un segment de rază cu CL enunțate în problemă;
- Soluțiile integrale ale deplasărilor termoelastice (3.112), (3.115) și (3.118) pot fi folosite pentru determinarea deplasărilor termoelastice în pana sferică, de la acțiunea unei surse de căldură cu CL enunțate în problemă;
- Folosind expresiile FPTG (3.83) și formula Duhamel-Neumann (3.35) pot fi obținute tensiunile termice pentru pana sferică, de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură cu CL enunțate în problemă, iar folosind deplasările termoelastice (3.99), (3.102), (3.105) și (3.112), (3.115), (3.118) și aceeași formulă Duhamel-Neumann (3.35) pot fi obținute tensiunile termice pentru o PL particulară provenite de la acțiunea unei surse interioare de căldură și/sau gradient de temperatură cu CL enunțate în problemă;
- A fost validată o PL rezolvată prin MRIA, unde s-a demonstrat, că în urma aplicării acestei metode, rezultatele obținute sunt corecte.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Problema științifică importantă soluționată constă în generalizarea MRİA și aplicarea acestei metode la obținerea soluțiilor integrale ale deplasărilor și tensiunilor termice, pentru domeniile canonice ale sistemului de coordonate cartezian și generalizarea $MG\Theta$ -C și aplicarea ei la obținerea soluțiilor integrale ale deplasărilor termoelastice, pentru domeniile canonice ale sistemului de coordonate sferic.

1. A fost determinată FG pentru fâșie cu CL de tip Neumann și prezentată grafic [3]. Aceasta poate fi folosită în conductibilitatea termică staționară, pentru determinarea câmpului interior de temperatură pentru fâșie, de la acțiunea unei surse interioare de căldură și/sau dacă fluxul de căldură pe diferite intervale ale laturilor fâșiei este diferit de zero. Această funcție se va folosi la calcularea deplasărilor și tensiunilor termice pentru fâșie;
2. S-au determinat și prezentat grafic câmpul de temperatură pentru fâșie cu CL de tip Dirichlet [4] și de tip mixt [5]. Câmpul interior de temperatură deja determinat poate fi folosit în domeniul termoelasticității la obținerea deplasărilor și tensiunilor termice în fâșie;
3. În baza MRİA au fost obținute FPTG pentru fâșie și pătrime de plan cu CL enunțate în problemă [22]. Au fost prezentate grafic aceste deplasări termoelastice. Datorită acestor funcții pot fi determinate tensiunile termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură și tensiunile termice de la acțiunea unei surse interioare de căldură distribuite și/sau gradient de temperatură, aplicat pe una sau ambele laturi ale fâșiei sau ale pătrimii de plan;
4. Au fost obținute tensiunile termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură și tensiunile termice de la acțiunea unui gradient de temperatură, aplicat pe ambele laturi ale fâșiei și pe o latură a pătrimii de plan pentru CL enunțate în problemă, cu prezentarea grafică a acestor tensiuni [22];
5. Folosind MM au fost obținute expresiile pentru deplasările și tensiunile termoelastice pentru semifâșie, de la acțiunea unui gradient de temperatură, aplicat pe o suprafață sub forma unui dreptunghi cu CL enunțate în problemă [62]. Aceste relații pot fi folosite pentru determinarea deplasărilor și tensiunilor termice în semifâșie, de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat în limita unui dreptunghi în interiorul semifâșiei cu CL enunțate în problemă. Aceste tensiuni au fost prezentate grafic;

6. În baza MRIA au fost obținute FPTG pentru semispațiu cu CL enunțate în problemă [21]. S-au prezentat grafic aceste deplasări termoelastice. Datorită acestor funcții pot fi determinate tensiunile termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură, a deplasărilor și tensiunilor termice de la acțiunea unei surse interioare de căldură distribuite și/sau gradient de temperatură, aplicat pe suprafața semispațiului;
7. Au fost obținute tensiunile termice de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură și deplasările termoelastice de la acțiunea unui gradient de temperatură, aplicat pe suprafața semispațiului cu CL enunțate în problemă, cu prezentarea grafică a acestor expresii [6];
8. Folosind $MG\Theta-C$ au fost obținute FPTG pentru pana sferică termoelastică cu CL enunțate în problemă [61]. Datorită acestor funcții, pot fi determinate deplasările și tensiunile termice de la acțiunea unei surse interioare de căldură, flux de căldură și/sau gradient de temperatură cu CL enunțate în problemă;
9. S-au obținut soluțiile integrale ale deplasărilor termoelastice, pentru pana sferică, de la acțiunea unui gradient de temperatură sau a unei surse de căldură aplicate pe un segment de rază cu CL enunțate în problemă, cu construirea acestor deplasări [61]. Aceste expresii pot fi folosite pentru determinarea deplasărilor termoelastice în pana sferică, de la acțiunea unei surse de căldură sau a unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat pe un segment de rază cu CL enunțate în problemă;
10. A fost demonstrată veridicitatea MRIA la rezolvarea PL 2D și 3D.

Recomandări privind cercetările de perspectivă:

1. Extinderea MRIA, fiind posibilă aplicarea metodei la rezolvarea PL pentru alte domenii canonice ale sistemului de coordonate: polar, cilindric, sferic, curbiniu etc. Pentru aceasta trebuie să fie deduse formulele structurale pentru fiecare sistem de coordonate;
2. Lărgirea arsenalului cu noi soluții integrale ale FPTG obținute la rezolvarea PL, care până în prezent nu au fost deduse, atât pentru domeniile canonice ale sistemului de coordonate cartezian, cât și polar, cilindric, sferic, curbiniu etc.;
3. Obținerea soluțiilor integrale pentru PL particulare și aplicarea lor în diverse domenii ale teoriei termoelasticității;
4. Folosirea soluțiilor obținute în rezolvarea PL din domeniul termoelasticității cuplate.

BIBLIOGRAFIE

a) în limba română

- [1] Colcin G., Bîrcă M., Pîrțac I. Mecanica structurilor din bare. Chișinău: Lumina, 1992. 383p.
- [2] **Crețu I.** Calculul grinzilor prin metoda funcțiilor Green la acțiunea forței concentrate și a diferenței de temperatură. In: Conferința Tehnico-Științifică a Colaboratorilor, Doctoranzilor și Studenților Universității Tehnice a Moldovei, Chișinău, 2012, vol II, p.115-120.
- [3] **Crețu I.** Construirea funcției Green în bandă cu condiții de limită de tip Neumann. In: Conferința Jubiliară Tehnico-Științifică a Colaboratorilor, Doctoranzilor și Studenților consacrată celei de-a 50-a Aniversări a Universității Tehnice a Moldovei, Chișinău, 2014, vol II, p. 206-209.
- [4] **Crețu I.** Determinarea câmpului de temperatură în bandă cu condiții de limită de tip Dirichlet. In: Conferința Jubiliară Tehnico-Științifică a Colaboratorilor, Doctoranzilor și Studenților consacrată celei de-a 50-a Aniversări a Universității Tehnice a Moldovei, Chișinău, 2014, vol II, p. 210-215.
- [5] **Crețu I.** Determinarea câmpului de temperatură în bandă cu condiții mixte de limită. In: Conferința Tehnico-Științifică a Colaboratorilor, Doctoranzilor și Studenților Universității Tehnice a Moldovei, Chișinău, 2012, vol II, p. 127-132.
- [6] **Crețu I.** Noi soluții integrale termoelastice pentru semispațiu. In: Meridian ingineresc, 2017, nr. 1(64), p. 40-44.
- [7] Moraru G., Mursa C. Teoria elasticității. Chișinău: Tehnica-Info, 2006. 396 p.
- [8] Speianu T. Construirea matricelor Green prin metoda elementelor incompresibile de influență. Teză de doctor. Chișinău, 2010. 144 p.
- [9] Șeremet V. Ecuațiile integrale și matricele Green ale metodei elementelor de influență în mecanica corpurilor deformabile. Teză de doctor habilitat. Chișinău, 1994. 308p.
- [10] Șeremet V. Funcții de influență în termoelasticitatea staționară. Chișinău: Centrul editorial al Universității Agrare de Stat din Moldova, 2003. 308 p.

- [11] Șeremet V. Funcții Green pentru ecuația Poisson (pentru domeniile sistemului polar de coordonate). Chișinău: Centrul editorial al Universității Agrare de Stat din Moldova, 2006. 242 p.
- [12] Șeremet V. Generalizarea formulelor de tip Poisson în termoelastostatică. In: Lucrările științifice ale Universității Agrare de Stat din Moldova, 2003, vol. 6, p. 26-29.
- [13] Șeremet V. Metoda elementelor de influență. Centrul editorial al Universității Agrare de Stat din Moldova, 2003. 229 p.
- [14] Șeremet V., **Crețu I.** Reprezentarea grafică a funcțiilor Green pentru tensiunile termice într-un dreptunghi cu aplicarea softului Maple 18. In: Simpozionul Internațional "Utilizarea eficientă a resurselor hidro-funciare în condițiile actuale - realizări și perspective". Chișinău: Universitatea Agrară de Stat din Moldova, 2016, p. 216-220.
- [15] Taranenco A. Calculul structurilor din bare în domeniul postelastice. Teză de doctor. Chișinău, 2008. 113 p.
- [16] Teodorescu P.P. Probleme spațiale în teoria elasticității. București: Acad. RSR, 1970. 377 p.

b) în limba engleză

- [17] Bhad P., Varghese V., Khalsa L. Thermoelastic theories on elliptical profile objects: An overview and prospective. In: International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 2016, vol. 4, nr. 2, p. 12-20.
- [18] Boley, B.A., Weiner, I.H. Theory of Thermal Stresses. New York: Wiley, 1960. 576 p.
- [19] Brebbia, C.A. The Boundary Element Method for Engineers. New York: Wiley, 1978. 189 p.
- [20] Chintanamrao K., Iqbal Y. Thermal Stresses in a Semi-Infinite Solid Cylinder Subjected to Internal Heat Generation. In: Communications of the Korean Mathematical Society, 2015, vol. 30, nr. 4, p. 505-513.
- [21] **Crețu I.** New influence functions for thermal displacements and stresses within half-space. In: Transilvanian Journal of Mathematics and Mechanics, 2016, vol. 8, nr. 2, p. 129-136.

- [22] **Crețu I.** New Integral Solutions for a Thermoelastic Quarter-plane. In: Transilvanian Journal of Mathematics and Mechanics, 2015, vol. 7, nr. 1, p. 7-16.
- [23] Dhakate T., Varghese V., Khalsa L. A Green's function approach for the thermoelastic analysis of an elliptical cylinder. In: International Journal of Advances In Applied Mathematics And Mechanics, 2017, vol. 5, nr. 2, p. 2347-2529.
- [24] Giorgashvili L., Burchuladze D., Skhvitardze K. Explicit Solutions of Boundary-Value Problems of Thermoelasticity with Microtemperatures for a Half-Space, 2016, vol. 216, nr. 4, p. 538-546.
- [25] Hayati Y. ş. a. Dynamic Green's Functions of an Axisymmetric Thermoelastic Half-Space by a Method of Potentials. In: Journal of Engineering Mechanics, 2013, vol. 139, p. 1166-1177.
- [26] Hetnarski R., Eslami M. Thermal Stresses - Advanced Theory and Applications. New York: Springer, 2009. 559 p.
- [27] Kukla S., Siedlecka U. Green's function for heat conduction problems in a multi-layered hollow cylinder. In: Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 2014, vol. 13, nr. 3, p. 115-122.
- [28] Norris A. On the correspondence between poroelasticity and thermoelasticity. J. Appl. Phys. 1992, 71(3), p. 1138-1141.
- [29] Nowacki W. Thermoelasticity. International Series of monographs on Aeronautics and Astronautics. Division I: Solid and Structural Mechanics, Volume 3. Warszawa: Wroclawska Drukarnia Naokowa, 1962. 628 p.
- [30] Nowacki W. Thermoelasticity. Oxford: Pergamon Press and Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1986. 566 p.
- [31] Nowacki W. Thermoelasticity. Pergamon Press and Polish Scientific Publishers, Oxford, Warszawa, 1962. 503 p.
- [32] Seremet V. New closed-form Green function and integral formula for a thermoelastic quadrant. In: Applied Mathematical Modeling, 2012, vol. 36, nr. 2, p. 799-812.

- [33] Seremet V. A New Efficient Unified Method to Derive New Constructive Formulas and Explicit Expressions for Plane and Spatial Thermoelastic Green's Functions. In: *Acta Mechanica*, 2014, vol. 226, nr. 1, p. 211–230.
- [34] Seremet V. New explicit Green's function and Poisson's integral formula for a thermoelastic quarter-space. In: *Journal of Thermal Stresses*, 2010, vol. 33, nr. 4, p. 356–386.
- [35] Seremet V. New Poisson's integral formulas for thermoelastic half-space and other canonical domains. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2010, vol. 34, nr. 2, p. 158-162.
- [36] Seremet V. New results in 3-D thermoelasticity. In: *Proceedings of 14th U.S. National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Blacksburg, Virginia, 2002, p. 29.
- [37] Seremet V. Some new influence functions and integral solutions in theory of thermal stresses. In: *Proceedings of the IV-th International Congress on Thermal Stresses*, Osaka, Japan, 2001, p. 423-427.
- [38] Seremet V., Bonnet G., Speianu T. Influence functions and integral formulae for spherical thermoelastic bodies. In: *Proceedings of the XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, ICTAM 2008*, Adelaide University, Australia, 2008, p. 226.
- [39] Seremet V., Bonnet G., Speianu T. New Poisson's Type Integral Formula for Thermoelastic Half-Space. In: *Mathematical Problems in Engineering*, 2009, vol. 2009, p. 1-18.
- [40] Seremet V., Bonnet G., Speianu T. New results in construction of the Green's matrices in spherical coordinates. In: *Proceedings, University of Minnesota, Minneapolis*, 2008, p. 240.
- [41] Seremet V., Carrera E. Solution in Elementary Functions to a BVP of Thermoelasticity: Green's Functions and Green's-Type Integral Formula for Thermal Stresses within a Half-Strip. In: *Journal of Thermal Stresses*, 2014, vol. 37, nr. 8, p. 947–968.
- [42] Seremet V., Vlad I., Seremet A. New influence functions for thermoelastic spherical shells. In: *Proceedings of V-th International Congress on Thermal Stresses (ICTS 2003)*, Virginia Tech., Blacksburg, 2003, vol. 1, p. MA-5-1-1.

- [43] Seremet V., Vlad I., , Seremet A. New integral formulae in thermoelasticity. In: Proceedings of 16th ASCE Engineering Mechanics Conference (EM 2003), Washington University, Seattle, 2003, p. 82.
- [44] Sheremet V. Generalization of Green's formulae in thermoelasticity. Collection: multiscale Green's functions for nanostructures, national science digital library. NSF, 2003, p. 1–4.
- [45] Sheremet V. New formulae for dynamical thermal stresses. In: Journal of Thermal Stresses, 2002, vol. 25, nr. 2, p. 123–153.
- [46] Sheremet V. The modification of Maysel's formula in the stationary thermoelasticity. In: Buletinul Academiei de științe a Republicii Moldova. Matematica. 1997, nr. 3, p. 19-22.
- [47] Sheremet V., Precupan D., Vlad I., Sheremet A. The constructing of Green's matrices in cylindrical coordinates. In: Proceedings of the 17 th ASCE Engineering Mechanics Conference (EM 2004), University of Delaware, Newark, 2004. p. 87.
- [48] Șeremet V. A method to derive thermoelastic Green's functions for bounded domains (on examples of two-dimensional problems for parallelepipeds). In: Acta Mech, 2016, vol. 227, nr. 12, p. 3603-3620.
- [49] Șeremet V. Generalization of Green's formulae in thermoelasticity. In: Collection: Multiscale Green's Functions for Nanostructures, National Science Digital Library of USA, NSF, 2003, 4 p.
- [50] Șeremet V.D. Handbook on Green's Functions and Matrices. UK & USA: Southampton and Boston: WIT Press, 2003. 304p.+CD ROM, 232 p.
- [51] Șeremet V. Method to derive thermoelastic Green's functions for cylindrical domains. In: Journal of Thermal Stresses, 2016, vol. 40, nr.3, p. 363-375.
- [52] Șeremet V. New closed-form Green function and integral formula for a thermoelastic quadrant. In: Applied Mathematical Modeling, 2012, vol. 36, nr.2, p. 799-812.
- [53] Șeremet V. New Results in 3-D Thermoelasticity. In: Proc. 14th U.S. National Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Blacksburg, Virginia, 2002, p. 29.
- [54] Șeremet V. A New Technique to Derive Green's Type Integral Formula in Thermoelasticity. In: Eng. Math., 2011, vol. 69, nr. 4, p. 313–326.

- [55] Şeremet V. Static Equilibrium of a Thermoelastic Half-Plane: Green's Functions and Solutions in Integrals. In: Arch. Appl. Mech., 2014, vol. 84, nr. 4, p. 553–570.
- [56] Şeremet V. Thermoelastic Green's function. Chişinău: Print-Caro, 2014. 237p.
- [57] Şeremet V. Thermoelastostatic Equilibrium of a Spatial Quadrant: Green's Function and Solution in Integrals. In: Arch. Appl. Mech., 2012, vol. 82, nr. 12, p. 1771–1793.
- [58] Şeremet V., Bonnet G. Encyclopedia of Domain Green's Functions (Thermomagnetoelastostatics of solids in rectangular and polar coordinates). Chişinău: Agrar. State Univ. of Moldova, 2008. 220 p.
- [59] Şeremet V., Bonnet G. New closed-form thermoelastostatic Green function and Poisson-type integral formula for a quarter-plane. In: Mathematical and Computer Modeling, 2011, vol. 53, nr. 1-2, p. 347-358.
- [60] Şeremet V., Wang H. Two-Dimensional Green's Function for Thermal Stresses in a Semi-Layer Under a Point Heat Source. In: Journal of Thermal Stresses, 2015, vol. 28, nr. 7, p. 756-774.
- [61] Şeremet V., Creţu I. Influence functions, integral formulas, and explicit solutions for thermoelastic spherical wedges. In: Acta Mechanica, 2013, vol. 224, nr. 4, p. 893–918.
- [62] Şeremet V., Creţu I., Şeremet D. Explicit Thermal Stresses Within a Thermoelastic Half-Strip and Their Graphical Presentation Using Maple 15 Soft. In: The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, Academia de Ştiinţe a Moldovei, 2014, p. 410-413.
- [63] Tsagareli I. The Solutions of the Boundary Value Problems of the Theory of Thermoelasticity with Microtemperatures for an Elastic Circle. In: Bulletin of Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics, 2013, vol. 17, nr. 1, 19-27.

c)în limba rusă

- [64] Аржаных И.С. Интегральные уравнения основных задач теории поля и теории упругости. Ташкент: Изд-во АН Узб. ССр, 1974. 108 с.
- [65] Блох В.И. Теория упругости. Харьков: Харьков ун-та, 1964. 483 с.

- [66] Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. и др. Сборник задач по математической физике. Москва: Гостехиздат, 1980. 686 с.
- [67] Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1979. 224 с.
- [68] Векуа Н.Л. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. Москва: Наука, 1970. 379 с.
- [69] Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения, методы. Киев: Наук. думка, 1986. 544 с.
- [70] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. Москва; Наука, 1976. 280 с.
- [71] Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики. Москва: Наука, 1974. 271 с.
- [72] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Обобщенные функции в математической физике. Москва: Наука, 1967. 436 с.
- [73] Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. Москва: Астрель • АСТ, 2006. 992 с.
- [74] Галеркин Б.Г. Собрание сочинений. Москва: АН СССР, т.1, 1952, т.2, 1953.
- [75] Галеркин Б.Г. Термическое напряжение в упругих пластинах. Ленинград: Путь, 1924. 214 с.
- [76] Гегелия Т.Г. О некоторых пространственных граничных задачах теории упругости. В: Труды Тбилисского матем. института, 1962, т. 28. с. 53-72.
- [77] Годунов С.К. Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. Москва: Наука, 1973. 400 с.
- [78] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1108 с.
- [79] Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985, т. 3. 279 с.

- [80] Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 284 с.
- [81] Гюнтер Н.М. Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики. Москва: Гостехиздат, 1953. 416 с.
- [82] Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. Москва: Иэд-во АН СССР, 1963. 271 с.
- [83] Ионов В.Н. Равновесие упругого цилиндра конечной длины. Исследование по теории сооружения, вып. 7. Москва: Гостройиздат, 1957.
- [84] Ионов В.Н., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. Москва: Высшая школа, 1972. 767 с.
- [85] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Москва: Наука, 1964. 487 с.
- [86] Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Москва: Высшая школа, 2001. 550 с.
- [87] Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова Думка, 1970. 263 с.
- [88] Колчин Г.Б. Расчёт элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. Кишинёв: Картя молдовеняскэ, 1971. 171 с.
- [89] Копейкин Ю.Д. Применение бигармонических потенциалов в краевых задачах статики упругого тела. В: Упругость и неупругость, МГУ 1971, в.1, с. 22-26.
- [90] Крутков Ю.А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. Москва: АН СССР, 1949. 200 с.
- [91] Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. Москва: Физматгиз, 1963. 472 с.
- [92] Купрадзе В.Д., Гегелия Г.Г., Башелейшвили М.О. и др. Трёхмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси: Изд-во Тбил. Ун-та, 1968. 627 с.
- [93] Купрадзе В.Д., Гегелия Г.Г., Башелейшвили М. О. и др. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва: Наука, 1976. 663 с.
- [94] Лебедев Н.Н. Некоторые интегральные преобразования математической физики. Автореферат дисс. Ленинград, 1951. 23 с.

- [95] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их применения. Москва-Ленинград: Физматгиз, 1963. 358 с.
- [96] Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. Москва: МГУ, 1976. 368 с.
- [97] Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: Гостехиздат, 1955. 491 с.
- [98] Лурье А.И. Теория упругости. Москва: Наука, 1970. 939 с.
- [99] Лыков А.В. Теория теплопроводности. Москва: Высшая школа, 1967. 599 с.
- [100] Лыков А.В. Тепломассообмен. Москва: Энергия, 1978. 478 с.
- [101] Ляв А. Математическая теория упругости. Москва: ОНТИ, 1935. 674 с.
- [102] Майзель В.М. Температурная задача теории упругости. Киев: Изд-во АН УССР, 1951. 152 с.
- [103] Мелан Е., Паркус Н. Термоупругие напряжения вызванные стационарными температурными полями. Москва: Физматгиз, 1958. 264 с.
- [104] Михлин С.Г. Вариационные методы математической физики. Москва: Наука 1970. 512 с.
- [105] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Москва: Физматгиз, 1962. 254 с.
- [106] Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир. 1975. 872 с.
- [107] Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Конечные элементы в задачах строительной механики летательных аппаратов. Москва: Высшая школа, 1985. 392 с.
- [108] Папкович П.Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функций. АН СССР, ОМЕН. 1932. № 10, с. 1425-1435.
- [109] Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. Москва: Наука, 1977. 311 с.
- [110] Подилчюк Ю.Н. Трёхмерные задачи теории упругости. Киев: Наукова Думка, 1979. 240 с.

- [111] Прокопов В.К. Равновесие упругого осе симметричного нагруженного толстостенного цилиндра. Прикл. математика и механика, 1961, № 2, с. 235-244.
- [112] Прокопов В.К. Однородные решения теории упругости и их приложение в теории тонких пластинок. Москва: Наука. 1966, с. 253-259.
- [113] Соболев С.Л. Алгоритм Шварца в теории упругости. В: Докл. АН СССР, 1936, т. IV, №6.
- [114] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука. 1975. 576 с.
- [115] Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 402 с.
- [116] Филоненко-Бородич М.М. Об одной системе функций и её приложениях в теории упругости. В: Прикл. механика и математика, т.х, вып. I, 1946.
- [117] Филоненко-Бородич М.М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. В: Прикл. механика и математика, 1951, т. IV, № 2, с. 137-148.
- [118] Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. Москва: Физматгиз, 1959. 364 с.
- [119] Шапиро Г.С. Функция напряжений в произвольной системе криволинейных координат. В: Докл. АН СССР, 1947, № 8, с. 697-699.
- [120] Шевченко Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Численные методы решения прикладных задач. Киев: Наукова Думка, 1986. 270 с.

e)în limba germană

- [121] Neumann F.E. Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in komprimierten oder ungleichförmig erwärmten unkrystallischen Körper. Abhand. der Königlich. Akad. der Wiss., zw. Teil. Berlin, 1841.

d)în limba franceză

- [122] Duhamel M. C. Second mémoire sur les phénomènes thermo-mécaniques. Journal de l'École Polytechnique, Tome XV. 1837. p. 1-57.

ANEXE

În anexe, sunt reflectate doar rezultatele finale într-o formă restrânsă ale funcțiilor de influență pentru deplasările termoelastice $U_i(x, \xi)$, tensiunile termice $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$ și ale dilatării de volum $\Theta(x, \xi)$, obținute în această lucrare.

Anexa A. Fâșia

Condițiile de limită pentru laturile marginale ale fâșiei $\Gamma_{20}(-\infty < y_1 < \infty; y_2 = 0)$ și $\Gamma_{21}(-\infty < y_1 < \infty; y_2 = a_2)$:

$$U_1(x, y) = 0, \bar{\sigma}_{22}(x, y) = 0, G_T(y, \xi) = 0; x, \xi \in V; y \equiv (y_1, 0) \in \Gamma_{20}, \quad (A.1)$$

$$U_1(x, y) = 0, \bar{\sigma}_{22}(x, y) = 0, G_T(y, \xi) = 0; x, \xi \in V; y \equiv (y_1, a_2) \in \Gamma_{21}.$$

$$U_1(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)}(\xi_1 - x_1)G_T(x, \xi); \quad (A.2)$$

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{2(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_1 - x_1) \int \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d\xi_1 - \iint \frac{\partial G_T(x, \xi)}{\partial \xi_2} d^2 \xi_1^2 \right]; \quad (A.3)$$

$$\bar{\sigma}_{11}(x, \xi) = \frac{\mu\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] \ln \frac{E_2}{E}; \quad (A.4)$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x, \xi) = -\frac{\mu\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 1 \right] \ln \frac{E_2}{E}; \quad (A.5)$$

$$\bar{\sigma}_{12}(x, \xi) = \frac{\mu\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} (\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln \frac{E_2}{E}; \quad (A.6)$$

$$\Theta(x, \xi) = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} G_T(x, \xi); \quad (A.7)$$

$$G_T = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{E_2}{E}; \quad (A.8)$$

$$E = 1 - 2e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)} \cos \frac{\pi}{a_2}(x_2 - \xi_2) + e^{\frac{2\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)}; \quad (A.9)$$

$$E_2 = 1 - 2e^{\frac{\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)} \cos \frac{\pi}{a_2}(x_2 + \xi_2) + e^{\frac{2\pi}{a_2}(x_1 - \xi_1)}. \quad (A.10)$$

Anexa B. Pătrimea de plan

Condițiile de limită pentru laturile marginale ale pătrimii de plan $\Gamma_{10}(y_1 = 0; 0 \leq y_2 < \infty)$ și $\Gamma_{20}(0 \leq y_1 < \infty; y_2 = 0)$:

$$\bar{\sigma}_{11}(x, y) = \bar{\sigma}_{12}(x, y) = 0; x \in P; G_T(y, \xi) = 0; y \equiv (0, y_2) \in \Gamma_{10}; \quad (B.1)$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x, y) = 0; U_1(x, y) = 0; x \in P; G_T(y, \xi) = 0; y \equiv (y_1, 0) \in \Gamma_{20}.$$

$$U_1(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(x_1 + \xi_1) \ln \frac{r_1}{r_{12}} + (x_1 - \xi_1) \ln \frac{r}{r_2} + 2x_1 \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right]; \quad (B.2)$$

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(x_2 + \xi_2) \ln(r_1 r_2) + (x_2 - \xi_2) \ln(rr_{12}) - 2 \left(x_1 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_2 \right) \ln \frac{r_1}{r_{12}} + 2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\int \xi_1 \ln \frac{r_1}{r_{12}} d\xi_1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} x_1 \int \ln \frac{r_1}{r_{12}} d\xi_1 \right) \right]; \quad (B.3)$$

$$\bar{\sigma}_{11}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left(\ln \frac{rr_{12}}{r_1 r_2} + (x_1 + \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln \frac{r_1}{r_{12}} + (x_1 - \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln \frac{r}{r_2} - 2x_1 \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right); \quad (B.4)$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left(\ln \frac{rr_{12}}{r_1 r_2} + (x_2 + \xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln(r_{12} r_2) + (x_2 - \xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln(rr_1) - 2x_1 \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \ln \frac{r_1}{r_{12}} + 2(x_1 - \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right); \quad (B.5)$$

$$\bar{\sigma}_{12}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left((x_1 - \xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln \frac{rr_{12}}{r_2 r_1} + (x_2 + \xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln(r_{12} r_2) + (x_2 - \xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln(rr_1) + 2\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln \frac{r_1}{r_{12}} - 4x_1 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right); \quad (B.6)$$

$$\Theta(x, \xi) = \frac{\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left(\ln \frac{r_1 r_2}{rr_{12}} + \frac{2\mu}{\lambda + \mu} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \ln \frac{r_1}{r_{12}} \right); \quad (B.7)$$

$$r = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2; r_1 = (x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2; \quad (B.8)$$

$$r_2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2; r_{12} = (x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2. \quad (B.9)$$

Anexa C. Pana sferică

Condițiile de limită pentru semiplanurile marginale ale panei sferice $\Gamma_{\varphi 0}(\varphi = 0; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq r < \infty)$ și $\Gamma_{\varphi \alpha}(\varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq r < \infty)$:

$$\begin{aligned} U_{\varphi}^{(q)}(r, 0, \beta) = 0; \sigma_{\varphi\beta}^{(q)}(r, 0, \beta) = \sigma_{\varphi r}^{(q)}(r, 0, \beta) = 0; (r, 0, \beta) \in \Gamma_{\varphi 0}; \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(q)}(r, \alpha, \beta) = 0; U_{\beta}^{(q)}(r, \alpha, \beta) = U_r^{(q)}(r, \alpha, \beta) = 0; (r, 0, \beta) \in \Gamma_{\varphi \alpha}, \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\nabla^2 T(M) = -a^{-1} F(M); M \equiv (r, \varphi, \beta) \in V;$$

$$\partial T(r, 0, \beta) / \partial n_{\Gamma_{\varphi 0}} = a^{-1} S_0(r, 0, \beta); \varphi = 0; \quad (C.2)$$

$$T(r, \alpha, \beta) = f(r, \alpha, \beta); \varphi = \alpha; 0 \leq \beta \leq \pi; 0 \leq r < \infty.$$

$$U_q(M, N) = -m L_N^{(q)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} (R_k(M; \rho, \psi, \vartheta) + R_{k\psi}(M; \rho, \psi, \vartheta)); \quad (C.3)$$

$$\Theta^{(q)} = -(\lambda + 2\mu)^{-1} L_N^{(q)} G; \quad (C.4)$$

$$m = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)}; \quad (C.5)$$

$$L_N^{(q)} = \delta_{q\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\delta_{q\psi}}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\delta_{q\vartheta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta}; \quad (C.6)$$

$$G = (4\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(k)} (R_k^{-1} + R_{k\psi}^{-1}); \quad (C.7)$$

$$R_k = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi - \omega_k)}; \quad (C.8)$$

$$R_{k\psi} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi + \omega_k)}; \quad (C.9)$$

$$\cos(\phi - \omega_k) = \sin \beta \sin \vartheta \cos(\varphi - \psi - 2k\pi/n) + \cos \beta \cos \vartheta; \quad (C.10)$$

$$\cos(\phi + \omega_k) = \sin \beta \sin \vartheta \cos(\varphi + \psi - 2k\pi/n) + \cos \beta \cos \vartheta. \quad (C.11)$$

Anexa D. Semispațiul

Condițiile de limită pentru planul marginal $\Gamma_{10}(y_1 = 0; -\infty < y_2, y_3 < \infty)$:

$$U_1(x, y) = U_2(x, y) = U_3(x, y) = 0; x \in S; G_T(y, \xi) = 0; y \equiv (0, y_2, y_3) \in \Gamma_{10}. \quad (D.1)$$

$$U_1(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_1 - x_1)(R^{-1} - R_1^{-1}) - 2x_1\xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} R_1^{-1} \right]; \quad (D.2)$$

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_2 - x_2)(R^{-1} - R_1^{-1}) - 2x_1\xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} R_1^{-1} \right]; \quad (D.3)$$

$$U_3(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(\xi_3 - x_3)(R^{-1} - R_1^{-1}) - 2x_1\xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_3} R_1^{-1} \right]; \quad (D.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right] R^{-1} - \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 1 \right) R_1^{-1} \right. \\ \left. + 2x_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} R^{-1} \left(1 - 2\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} R_1^{-1} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (D.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{12}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + (\xi_2 - x_2) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right] (R^{-1} - R_1^{-1}) \right. \\ \left. - 4x_1\xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} R_1^{-1} \right\}; \end{aligned} \quad (D.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{22}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_2 - x_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 1 \right] (R^{-1} - R_1^{-1}) \right. \\ \left. + 2x_1 B^{-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{\partial}{\partial \xi_1} R_1^{-1} - \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} R_1^{-1} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (D.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{23}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_2 - x_2) \frac{\partial}{\partial \xi_3} + (\xi_3 - x_3) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right] (R^{-1} - R_1^{-1}) \right. \\ \left. - 4x_1\xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} R_1^{-1} \right\}; \end{aligned} \quad (D.8)$$

$$\bar{\sigma}_{33}(x, \xi) = \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_3 - x_3) \frac{\partial}{\partial \xi_3} - 1 \right] (R^{-1} - R_1^{-1}) \right.$$

$$+2x_1 B^{-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{\partial}{\partial \xi_1} R_1^{-1} - \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} R_1^{-1} \right) \}; \quad (D.9)$$

$$\bar{\sigma}_{13}(x, \xi) = \frac{\gamma \mu}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[(\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial \xi_3} + (\xi_3 - x_3) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right] (R^{-1} - R_1^{-1}) - 4x_1 \xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_3} R_1^{-1} \right\}; \quad (D.10)$$

$$\Theta(x, \xi) = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} \left(G_T(x, \xi) + \frac{2\mu}{\lambda + \mu} B^{-1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} W_T(x, \xi) \right); \quad (D.11)$$

$$G_T = \frac{1}{4\pi} (R^{-1} - R_1^{-1}); \quad (D.12)$$

$$W_T(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} (R_1^{-1}); \quad (D.13)$$

$$R = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}; \quad (D.14)$$

$$R_1 = \sqrt{(x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}; \quad (D.15)$$

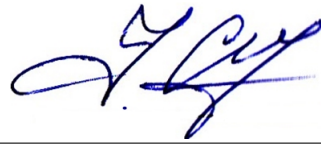
$$B = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}. \quad (D.16)$$

DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnatul, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctor sunt rezultatul propriilor cercetări și realizări științifice. Conștientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecințele în conformitate cu legislația în vigoare.

Crețu Ion

Semnătura



Data: 08.05.2017

CURRICULUM VITAE

Date personale

Nume și Prenume: CREȚU ION

Data și locul nașterii: 15 septembrie 1986,
or. Dondușeni, Republica Moldova;



Studii:

- **Licență:** Universitatea Tehnică a Moldovei, 2005-2009, Specialitatea „Construcții și Inginerie Civilă”. Calificarea: Inginer licențiat;

- **Masterat:** Universitatea Tehnică a Moldovei, 2009-2011, Specialitatea „Inginerie Structurală”. Calificarea: Master în Arhitectură și Construcție;

- **Doctorat:** Universitatea Tehnică a Moldovei, 2011 – 2014, specialitatea 135.02 - Mecanica corpului solid, tema tezei de doctor: „Soluții integrale în termoelasticitatea necuplată”;

- **Perfecționare:** Universitatea Tehnică a Moldovei, 2013 - 2014, Specialitatea "Utilizarea mijloacelor informaționale de comunicare în învățământ";

Universitatea Tehnică a Moldovei, 2014, "Utilizarea tăblii interactive".

Domeniile de activitate științifică: teoria termoelasticității, teoria elasticității, mecanica structurilor.

Activitatea profesională:

- 2010-2015 - asistent universitar, catedra Construcții și Mecanica Structurilor, UTM;

- 2015-prezent - lector universitar, catedra Construcții și Mecanica Structurilor/ Departamentul Inginerie Civilă și Geodezie, UTM;

- 2018-prezent - șef program de studiu "Construcții Industriale și Civile", UTM;

Lucrări științifice publicate:

- 4 articole științifice în reviste de circulație internațională și națională: Acta Mechanica (ISI), Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics, Meridian Ingineresc;

- 7 articole științifice în culegeri internaționale și naționale, cu participarea la toate conferințele și simpozioanele.

Cunoașterea limbilor: Română, Rusă, Engleză.

Date de contact:

Adresa serviciu: FCGC, UTM, bd. Dacia, 41, bloc 10, cab. 319, mun. Chișinău

Tel. mob. +373 69 909 509

e-mail: ioncretu@mail.com