FASCINAȚIA SPIRALEI CUCUTENIENE PARTEA I

Lorin Cantemir, prof.univ.dr.ing. Dr.H.C, membru al A.S.T.R
Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi
Ştefan Andrei, prof. gr. I, Buhuşi, Bacău
Antonovici Constantin, prof. gr. I, Piatra - Neamț

Abstract: *This paper emphasizes the existence of spiral forms in nature at all levels,starting from macrocosmos to Earth, and from Earth to the microcosmos. The paper reveals the technical details of the mathematical properties for many existing spirals. The echnical and aesthetic characteristics are illustrated using a graphical program implemented in Java programming language.*

1. Generalități

Ce putere miraculoasă o fi având spirala de s-a impus de la începutul începuturilor de la configurațiile stelare până în adâncul adâncurilor, în mediul înconjurător omului, în ființa şi în conştiința lui? De la Big Bang-ul petrecut în urmă cu circa 14 miliarde de ani şi până în zilele noastre, natura ne oferă numeroase evoluții în spirală, având ca origine forma galaxiilor, continuând cu fenomene naturale de circulație a aerului, cu diferite stadii de creştere în regnul vegetal şi în cel animal, până în structura celulelor, unele constituind surse incontestabile de inspirație pentru multe categorii de oameni (artişti, meseriaşi, specialişti), care au produs şi realizează în continuare opere de o inestimabilă valoare, altele devenind elemente de cercetare privind evoluția vieții (cercetători, savanți), etc.?

De ce e atât de fascinantă spirala şi care sunt motivele ce au determinat supremația ei în lumea curbelor, putând-o *denumi chiar regina lor*? Răspunsul e simplu: după modul cum e privită (spre origine sau spre extremitate) ea reprezintă, în acelaşi timp, concentrarea şi expansiunea, trecerea de la minuscul la nemărginire, de la micro la macro sau, matematic, de la zero spre infinit. Cercul este curba perfectă, dar e închisă, după o rotație revenind la poziția inițială, pe când spirala, după fiecare rotație se deschide din ce in mai mult, oferind perspectiva altei structuri.

În esență, *spirala este o creație a naturii*, ea regăsindu-se în cele trei structuri (stări) fundamentale:

● spirale spațiale, existente în materia neînsuflețită, care implică universul fizic, denumite *vârtejuri sau vortexuri*, cum ar fi : vortexurile stelare, uraganele, cicloanele, tornadele, precum şi cele hidraulice (fig. 1,2,3);

Fig.1. *Calea Lactee.*

Fig.2. *Ciclon.*

Fig.3. *Tornadă.*

● spirale existente în materia vie, cea mai importantă fiind **spirala ADN-ului**, adică spirala vieții pe care o regăsim la cochiliile de scoici, căluții de mare, melci, floarea soarelui, cârceii viței de vie, etc.(fig.4,5,6,20);

Fig. 4. *Căluțul de mare.*

Fig.5.*Melc.*

Fig.6. *Spirala ADN.*

● create de om (antropice) (fig. 7,8,9));

Fig.7. *Scara Vatican.*

Fig.8. *Vas Cucuteni.*

Fig. 9. *Farfurie Cucuteni.*

Ea este rezultatul compunerii a două mişcări: una de avans liniar, combinată cu o mişcare de rotație.

Deocamdată, nu sunt ipoteze sau explicații privind sensul de parcurgere al spiralei (direct sau invers trigonometric). În mod sigur, tornadele, ca şi curgerea apei dintr-un rezervor printr-o țeavă conectată perpendicular pe baza acestuia se face în sens direct trigonometric în emisfera nordică şi invers în cea sudică.

Motivul grafo-geometric al spiralei biologice nu a trecut neobservat de umanitate. Primele reprezentări ale acesteia în colectivități umane le regăsim la populația maori din Noua Zeelandă, care le-a folosit pentru tatuaje. Desigur, motivul spiralei a fost folosit şi în alte locații de pe mapamond, dar cel mai obsesiv îl găsim în grafica ornamental – artistică cucuteniană (apreciere, care nu ne aparține). Mai trebuie să subliniem că, aparent şi surprinzător, motivul spiralei s-a găsit pe cioburi de oale din localitatea Hotărani din arealul Caracal. Primele indicii par să ducă la concluzia că, spiralele din Olt sunt tot de origine cucuteniană.

Evident, evoluția oricărui organism viu se realizează continuu în timpul vieții sale, astfel încât, permanent, să se adauge în structura sa, elemente noi, care să redea la scară mărită caracteristicele anterioare, respectând, bineînțeles, anumite elemente esențiale şi proporții bine stabilite. Acest fenomen perpetuu a stat şi continuă să stea la baza studierii şi descoperirii proprietăților definitorii ale unor figuri spiralate în plan sau în spațiu, în scopul aplicării lor în activitățile practice, evoluții care, pentru o mai bună concluzionare, se recomandă a fi reprezentate şi grafic .

Matematic, referindu-ne la figurile plane, punctul care descrie o curbă este bine stabilit într-un reper fixat, în coordonate carteziene (ortogonale sau oblice), coordonate polare sau parametrice, ultimele două fiind preferate pentru ecuațiile spiralelor.

În spațiul nostru real, care este tridimensional, pentru reprezentarea şi studierea proprietăților corpurilor şi figurilor este necesară şi o a treia coordonată, ceea ce îngreuiază mult calculele, dar şi reprezentarea corpurilor şi figurilor spațiale studiate. În mod normal, în natură nu există suprafețe plane, ci doar reprezentări în două dimensiuni ale unor porțiuni mici din suprafețele curbe existente pe suprafața pământului sau ale unor părți minuscule din univers. În acest context, dorim să prezentăm şi să analizăm, ca figuri plane, curbele de pe vasele de ceramică specifice Culturii Cucuteni.

Studiind tipurile de spirale reprezentate pe vasele expuse în Secția Cucuteni a Muzeului de Istorie din Piatra-Neamț, am ajuns la concluzii care stabilesc şi delimitează perioadele istorice în care au fost realizate desenele de pe vasele respective (anii 6000 - 5000 Î.Hr.), de cele în care matematicienii au transpus în ecuații reprezentările acestor desene (anii 300- 200 Î.Hr.) Este clar că, în aceste perioade, artiştii olari populari au devansat cercetările şi concluziile matematice referitoare la curbele specificate, deci, *ştiința devine consecință a practicii, şi nu invers!*

În lucrarea de față, ne vom referi la spirale, deoarece, prin proprietățile deosebite ce le posedă, şi care îşi găsesc aplicații importante, atât în evoluția vieții, cât şi în rezolvarea multor probleme practice, care aparent, nu ar avea legătură cu tema abordată (structura cuțitelor de freză la strung sau a dispozitivelor de foraj, melcul de la maşina de tocat carne sau dispozitivul tronconic pentru umplut cârnați ş.a), au stârnit interesul oamenilor de ştiință din cele mai vechi timpuri.

Dorim să precizăm, bazându-ne pe desenele de pe vasele examinate, care reprezentă cincisprezece tipuri de spirale, că din punct de vedere matematic, două dețin supremația**:** cele *curbe* şi cele *unghiulare* (denumite de arheologi) *sau segmentate* (definite de matematicieni). Toate dicționarele limbii române cercetate, Dicționarul de Matematici Generale, din anul 1974, inclusiv internetul, nu definesc ultimele spirale, deşi ele există desenate pe vaselele de la Cucuteni de mai bine de 5000 de ani. Presupunem că acest tip de spirală nu s-a impus în evoluția societății, deoarece nu era utilă în practică. Dar prezența ei, fiind dovedită, considerăm că trebuie să o prezentăm, motiv pentru care i-am acordat un spațiu special (capitolul V) .

În concluzie, *spirala este o curbă plană sau în spațiu, descrisă de mişcarea de rotație a unui punct în anumite condiții date, si după cum am mai spus, ea este rezultatul compunerii a două mişcări: una de avans liniar, combinată cu o mişcare de rotație.*

Vom prezenta, în continuare, din punct de vedere matematic şi practic, definițiile şi proprietățile mai importante ale câtorva spirale clasice, cunoscute de mai bine de două mii de ani.

2. Spirala de aur

2.1. Raportul de aur

A fost introdus în secolul al III-lea î. Hr,. de către Euclid care l-a considerat ca fiind o simplă împărțire a unui segment de dreaptă, în ceea ce el a numit-o „*medie şi* *extremă rație*". Iată cuvintele lui: *"Spunem că un segment de dreaptă a fost împărțit în medie şi extremă rație atunci când segmentul întreg se raportează la segmentul mai mare, precum se raportează segmentul cel mare la cel mai mic"*. Problema menționată este echivalentă cu împărțirea unui segment în raport extrem şi mediu, care constă în a diviza un segment AB, cu ajutorul unui punct C, în două părți, astfel ca partea mai mare să fie medie geometrică între segmentul dat şi cealaltă parte (figura10): ***AB / AC = AC / CB***. Scriind în relații matematice semnificațiile raporturilor, avem:

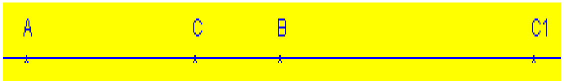

Fig.10. *Raportul de aur.*

$$L / (L - l) = (L - l) / l \iff L / l = (1+\sqrt{5}) / 2.$$

Acest raport, notat cu ϕ (phi), provenit de la primele litere ale numele celebrului sculptor elen, Phidas, (490- 430 î.Hr), constructorul Parthenonului, al statuilor Athena Partenos din *Atena, Zeus* din Olympia şi a altor monumente greceşti importante, se numeşte *raportul de aur*, este primul număr irațional descoperit şi definit în istoria matematicii, fiind aproximativ egal cu *1,618033….*

În prezent, s-au calculat peste două mii de zecimale (ro.wikipedia.org/wiki/Secțiunea_ de_ aur) şi nu s-a constatat nici o repetare a grupurilor de cifre. Merită menționat şi faptul că ϕ , pătratul său, ϕ^2, şi inversul său, $1 / \phi$, au exact aceleaşi zecimale. În adevăr, ϕ fiind soluție a ecuației $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, obținem $\phi^2 = \phi + 1$, iar, prin împărțirea cu $\phi \neq 0$, avem: $\phi = 1 - 1 / \phi \iff 1 / \phi = \phi - 1$, deci nu este afectată partea zecimală

Configurațiile, stabilite prin raportul de aur, dau impresia armoniei şi echilibrului în artă şi în viață, ceea ce a determinat ca ele să fie utilizate încă din antichitate în arhitectură şi sculptură. *Raportul de aur* se întâlneşte mai des decât ne închipuim în natură: proporțiile dintre diferitele stadii de creştere organică, aşezarea frunzelor şi florilor pe ramuri, respectiv, nodurile pe tulpina unui arbore, respectă acest model, după cum a observat Charles Darwin încă din secolul al XIX-lea.

Artiştii plastici şi teoreticienii care au studiat proporțiile corpurilor animalelor şi, mai ales, proporțiile corpului uman, au constatat că raportul de aur este elementul geometric primordial al acestor proporții. Amintim doar pe Leonardo da Vinci şi Albrecht Dűrer care au stabilit că ombilicul împarte înălțimea corpului omului după secțiunea de aur. S-a constatat, că si alte elemente ale corpului omenesc sunt subordonate acestui raport: lungimea brațului de la umăr la degete raportată la cea de la cot la vârful degetelor, distanța de la şold la podea raportată la distanța de la genunchi la podea, lungimile oaselor între încheieturilor degetelor de la mâini şi de la picioare, etc.

Mai mult, mari construcții importante din zilele noastre respectă acest raport, exemplul cel mai concludent fiind sediul ONU din New-York. Există mai multe metode grafice pentru a construi, cu rigla şi compasul, segmente în raportul de aur sau chiar punctul C din figura 10. În acest scop a fost elaborat programul de calcul

„*DrAur1*", care construieşte segmentul [AB], punctele C şi C1 conjugate armonic în raportul k relativ la A şi B, (fig.10***),*** iar dacă raportul k este -1.618, construieşte şi dreptunghiul de lungime AB = L şi lăţime l = AC=L*0.618, latura pătratului în discuţie. Programul este un applet cu două butoane, unul pentru distanţa d şi celălalt pentru raportul k.

2.2. Triunghiul de aur

Fie triunghiul isoscel ABC (AB =AC). Bisectoarea unghiului C intersectează pe AB în D. Ne interesează proprietăţile triunghiului ABC, dacă acesta este asemenea cu Δ CDB. Calculând măsurile unghiurilor găsim valorile: A = 36^o, B = C = 72^o. Pentru laturi, dacă AB =L şi DB = l., din asemănarea triunghiurilor ABC şi BCD, rezultă L / l = $(1 + \sqrt{5}) / 2 = \phi$, adică L şi l sunt în raportul de aur şi, deci, e normal ca un astfel de triunghi să se numească *triunghiul de aur* sau triunghiul sublim (fig.11).

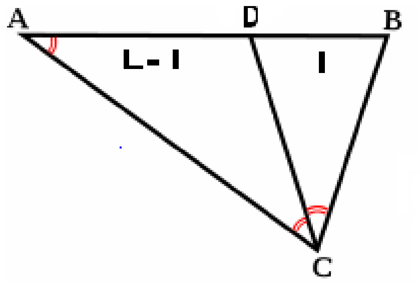

Fig. 11.

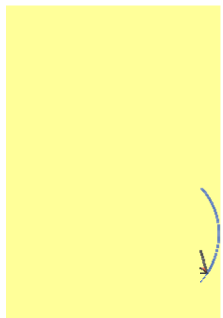

Fig. 12.

Bisectoarea unui unghi de 72^o divizează triunghiul de aur în alte două triunghiuri, dintre care unul este de aur, iar celălalt se numeşte gnomonul de aur. Repetând procedeul pentru triunghiurile de aur, obţinem o serie de triunghiuri incluse unul în altul, ale căror vârfuri se află pe o spirală, numită **spirala de aur** (fig.12). S-a constatat apariţia acestei spirale în cea mai mare şi uimitoare varietate de locuri: de la cochilii de moluşte, a petalelor de trandafiri până la forma galaxiei.

2.3. Dreptunghiul de aur

Fie un dreptunghi cu laturile ***L*** şi ***l (L>l),*** pe care îl secţionăm într-un pătrat de latură l şi un alt dreptunghi. Ne interesează raportul ***L / l*** în cazul în care cele două dreptunghiuri sunt asemenea. Din proporţionalitatea laturilor dreptunghiurilor rezultă ***L / l =ϕ.*** Un dreptunghi cu această proprietate se numeşte *dreptunghi de aur.* El este singurul dreptunghi din care, după suprimarea unui pătrat care conţine latura mică a sa, se formează un alt dreptunghi de aur. Repetând procedeul şi unind vârfurile pătratelor se obţine *spirala de aur* (fig. 12). Acest lucru este pus în evidenţă prin programul "*DreptunghiAur1*", care conţine o etichetă pentru *L* şi construieşte dreptunghiul de lungime *L*, lăţime *l=L*0.618* şi pătratele în discuţie.

Dreptunghiul de aur se pare că a influenţat semnificativ şi vânzările de i-poduri, după ce Apple a schimbat forma de la un dreptunghi obişnuit la dreptunghiul de aur şi

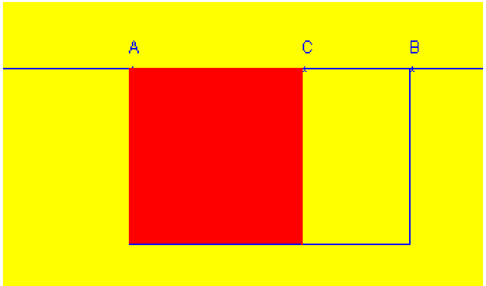

Fig. 13.

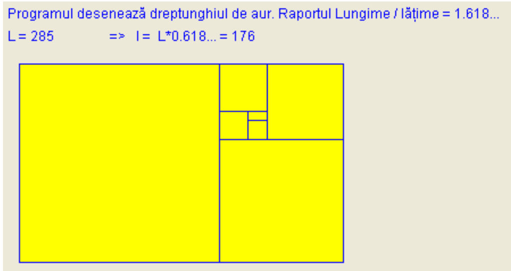

Fig. 14.

a încadrat mărul muşcat în acest dreptunghi. Mai mult, firma Toyota a profitat de aspect, incluzând părți din emblemă în dreptunghiuri de aur (internet).

Grafic, punctele succesive care separă dreptunghiurile de aur în pătrate se află pe o spirală care este cunoscută sub numele de *spirala de aur* (figura 15) Spirala nu este tangentă în aceste puncte, dar trece prin ele şi intersectează partea de adiacență, aşa cum este ilustrat în figură. În colțul din stânga sus al pătratului original este poziționată originea O(0, 0), care este şi centrul spiralei reprezentate.

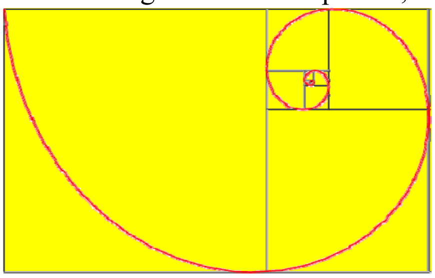

Fig. 15

Dacă intersectăm spirala cu o dreaptă dusă prin origine, segmentele determinate sunt tot în secțiunea de aur, iar dacă desenăm diagonalele dreptunghiurilor, lungimile diagonalelor a două dreptunghiuri succesive se află tot in raportul de aur.

Intersecțiile diagonalelor ne arată punctul către care converg toate dreptunghiurile de aur care devin din ce în ce mai mici. Acest punct se mai numeşte Ochiul lui Dumnezeu.

Programul pentru construcția spiralei de aur se poate obține din programul "*SpiralLog2*" în care suprimăm instrucțiunile referitoare la butonul variabilei *b*, iar în textul rămas înlocuim pur şi simplu pe *b* cu *a*0.618*.

3. Spirala lui Fibonacci

Leonardo Fibonacci (1170-1240), de departe cel mai mare matematician european din Evul Mediu, a adus numeroase contribuții originale studierii aritmeticii şi geometriei. De altfel, el este cunoscut ca fiind unul dintre primii care au introdus cifrele arabe (0,1,2….) în Europa, cifre pe care le folosim şi în zilele noastre

Şirul care-i poartă numele **: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,…** în care fiecare termen reprezintă suma celor două numere precedente, a jucat, şi joacă, un rol foarte important în rezolvarea multor algoritmi.

Spirala lui Fibonacci (fig. 17) se aseamănă cu spirala de aur, deosebirea constând în faptul că, în loc să unim punctele succesive care formează dreptunghiurile

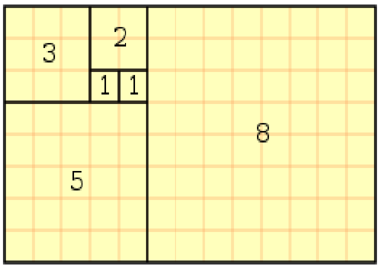

Fig. 16

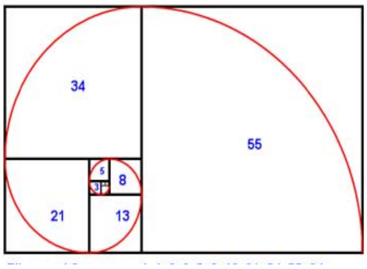

Fig. 17

de aur, vom uni între ele sferturile de cerc înscrise în pătratele din rețeaua lui Fibonacci (fig. 16). Bifurcația ramurilor plantelor şi ale arborilor, distanțele dintre nodurile de unde se dezvoltă frunzele, poziția solzilor pe un con de pin, cochiliile unor melci (fig. 18), semințele de pe corola florii soarelui (fig. 19), arborele genealogic al familiei de albine, etc., respectă aproximativ secvențe Fibonacci. Cercetătorii pasionați de şirul lui Fibonacci au găsit chiar că şi ADN-ul respectă această regulă aparent ciudată.

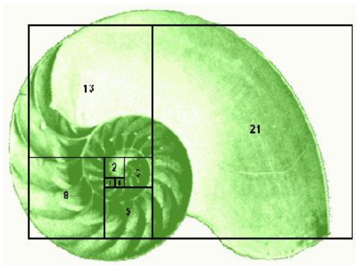

Fig. 18

Fig. 19

4. Spirala lui Arhimede

Cartea lui Arhimede (287 -212 î.Hr.) „*Despre spirale*”, în care prezintă rezumatul lucrărilor „*Despre Sferă şi Cilindru*”, respectiv, „*Despre Concoide şi Sferoide*”, se termină cu rezultatele autorului despre spirala care-i poartă numele şi pe care a definit-o astfel: *Dacă o dreaptă, cu una din extremități rămânând fixă, este făcută să se rotească cu o viteză unghiulară uniformă, ω într-un plan, până se reîntoarce în poziția inițială, şi, dacă, în acelaşi timp cu rotația dreptei, un punct se mişcă cu viteză uniformă v, de-a lungul dreptei. începând de la extremitatea fixă, punctul va descrie o spirală în plan.* Deci, spirala lui Arhimede este locul geometric al unui punct M, a cărui rază vectoare OM = r variază proporțional cu unghiul de rotație dintre ea şi o rază vectoare din origine. În coordonate polare , ecuația ei este **r = a t**, a fiind un coeficient constant, a = v / ω. Lungimea arcului de spirală descris de punctul în mişcare de la început şi până la momentul t este dată de formula $L(t)=\dfrac{a}{2}(t.\sqrt{t^2+1}+\arg sh(t))$,

Fig. 20.

iar aria măturată de raza vectoare în acest timp este $A(t) = \dfrac{a^2.t^3}{6}$.

Dacă dorim lungimea arcului sau aria dintre momentele t_1 şi t_2, atunci avem formulele: $L_{arc} = L(t_2) - L(t_1)$ şi, respectiv, $A_{arc} = A(t_2) - A(t_1)$.

Distanța dintre spire este constantă şi depinde de parametrul a. Dacă t > 0 atunci spirala înaintează în sens orar, dacă t < 0, spirala înaintează în sens pozitiv trigonometric. Transformarea $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ duce la $\begin{cases} x = at\cos t \\ y = at\sin t \end{cases}$, de unde, prin derivare, obținem $\begin{cases} x'(t) = a(\cos t - t\sin t) \\ y'(t) = a(\sin t + t\cos t) \end{cases}$, apoi $Larc = \int_0^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$;
dar, $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = a^2((\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2) = a^2(1+t^2)$, deci

$$L_{arc} = a\int_0^{t_1} \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{a}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right)\Big|_0^{t_1}$$

În mod analog, obținem: $A_{\sec t} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{t_1} (r(t))^2\,dt = \dfrac{1}{2}\int_0^{t_1} a^2t^2\,dt = \dfrac{a^2t^3}{6}$

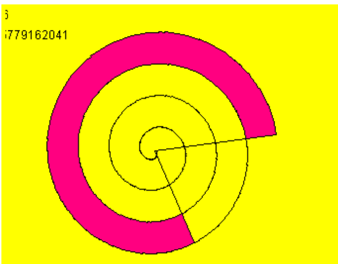

Fig. 21. Aria unui sector.

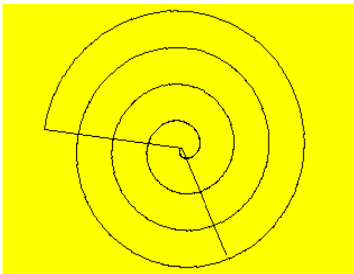

Fig. 22. Lungimea unui arc.

În figurile de mai jos (21 şi 22) vedem spirala lui Arhimede descrisă în sens orar, respectiv, trigonometric şi delimitarea unor secvențe practice solicitate.

Programul "*SpiralArhimede2*" construieşte spirala lui Arhimede, calculează şi afişează aria sectorului de spirală şi lungimea arcului cuprins între două raze vectoare (fig.21,22). El provine din programul "*SpiralLog2*", în care am suprimat instrucțiunile referitoare la butonul b şi am înlocuit ecuațiile spiralei logaritmice $\begin{cases} x = ae^{bt}\cos t \\ y = ae^{bt}\sin t \end{cases}$ cu ecuațiile spiralei lui Arhimede $\begin{cases} x = at\cos t \\ y = at\sin t \end{cases}$, efectuând ajustările necesare în unele dintre celelalte instrucțiuni. Pentru anumite valori date parametrilor ***a*** şi ***t*** se pot obține

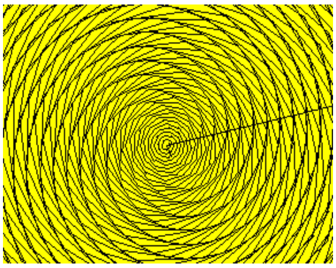

Fig.23

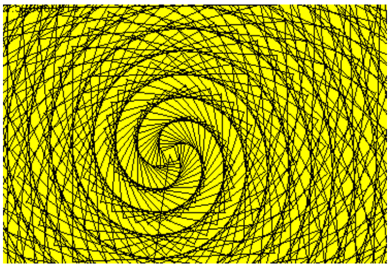

Fig.24

diverse modele "*artistice*", (fig.23, 24) adică se ajunge, din nou, la unul din scopurile inițiale ale spiralei. Modelele pot fi folosite şi în tapiserii, industria textilă, etc.

5. Spirala logaritmică

A fost studiată intens de **Jacob Bernoulli**, de unde îi vine şi numele de *spirala lui Bernoulli* sau *Spira mirabilis* (spirala miraculoasă), după a denumit-o singur.
Spirală logaritmică a avut ca suport creşterea regulată a unor organisme prin adăugarea de elemente, cu proprietatea că tot timpul acestea rămân asemenea cu ele înşile (fig.25). Dacă vrem să mărim sau să micşorăm o spirală logaritmică, ca s-o transformăm în una nouă, regăsim aceeaşi spirală de la care am pornit rotită față de prima cu un anumit unghi (fig. 26). Însăşi **Jacob Bernoulli** a rămas încântat şi uimit de această proprietate, pe care a descoperit-o chiar el prin anii 1680 - 1690, încât a cerut ca, pe piatra mormântului, să-i fie săpată spirala logaritmică cu inscripția: „*Eadem mutata resurgo*" adică: „*Mă transform, rămânând aceeaşi*". Pentru a construi această spirală avem întâi nevoie de *triunghiul*, respectiv, *dreptunghiul de aur*.

Fig. 25

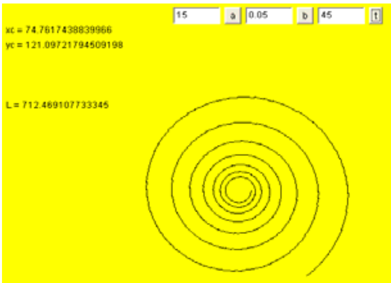

Fig. 26

Matematic, *spirala logaritmică* este locul geometric al unui punct M a cărui rază vectoare r variază în progresie geometrică, iar unghiul φ al acestei raze variază în progresie aritmetică. *Spirala logaritmică* are ecuația polară $\ln\frac{r}{a} = bt$ sau $r = a.e^{b.t}$ (1), iar cea parametrică: $x(t)=ae^{bt}\cos t$, $y(t)=ae^{bt}\sin t$ (2). Prin derivarea relațiilor (2) şi integrare obținem: $L(t_1,t_2) = \frac{a.\sqrt{1+b^2}}{b}.(e^{b.t_2} - e^{b.t_1})$, iar aria măturată de raza vectoare $A(t_1,t_2) = \frac{a^2(e^{2.b.t_2} - e^{2.b.t_1})}{4.b}$ (figurile 27 şi 28).

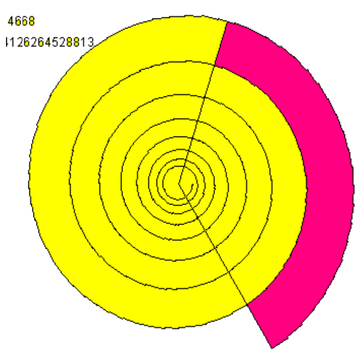

Fig. 27

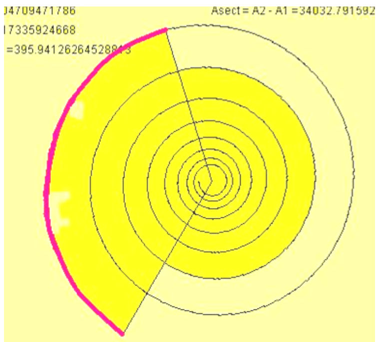

Fig. 28

6. Spirale segmentate

Numim spirală segmentată, o succesiune neîntreruptă de segmente de lungime **l** (constantă sau variabilă), puse cap la cap dintr-un punct inițial, numit origine, pornită, într-un anumit sens trigonometric, și care formează între ele unghiuri de mărime **α,** apriori definite (constante sau variabile).

Evident, în funcție de valorile parametrilor l şi α, deosebim patru situații:

III -1) l şi α constante;

III -2) l constant şi α variabil;

III - 3) l variabil şi α constant;

III - 4) l şi α variabile după criterii apriori definite.

Pentru valorile atribuite parametrilor respectivi, în fiecare din cele patru situații, avem o multitudine de posibilități practice. Ne vom referi doar la câteva dintre ele pentru cazul III-1:

a) Pentru l dat şi ***α = 60°*** se obține o spirală periodică (suprapusă) sub forma unui triunghi echilateral. Tot în acest caz, pentru l dat **şi** ***α = 90°*** se obține o spirală periodică sub forma unui pătrat. Mai general, pentru l dat şi **α** = *unghiul unui poligon regulat cu n laturi,* ***(α = 180 (n – 2) / n)*** se obține o spirală periodică sub forma acelui poligon;

b**)** *Dacă l este dat, dar α are altă valoare decât cea de la a),* se obține tot o spirală periodică, baza fiind un poligon stelat. Exemplu: pentru α = 45° se obține un octogon stelat. .

Spiralele segmentate se pot obține din spiralele descrise în paragrafele anterioare, cu deosebirea că, în loc să unim punctele importante (generatoare) prin arce de curbă, le unim prin segmente de dreaptă. Nu ştim care dintre spiralele (curbe sau segmentate) au apărut primele pe vasele din Cucuteni, dar, cu certitudine că, pentru aflarea ariei unui sector determinat de spirală sau lungimii unui segment, cele segmentate au constituit suportul teoretic

Avantajul reprezentării unor astfel de spirale, constă, în primul rând, în calcularea aproximativă a ariei unui sector şi lungimii unor arce de spirală prin formule ale matematicii elementare, fără a utiliza calculul integral. Este suficient să calculăm ariile sau lungimile bazelor triunghiurilor formate cu vârfurile în centrul spiralei şi să le însumăm. Evident că, împărţind arcele de curbă în părţi din ce în ce mai mici, valorile iterative obţinute pentru aria şi lungimea arcului considerat, vor fi din ce tot mai apropiate de cea reală, adică limita diferenţei dintre cele două valori tinde la zero, ceea ce a inspirat introducerea stabilirii acestor elemente cu ajutorul calcului integral, dovedind în acest mod etape ale dezvoltării analizei matematice teoretice şi aplicării ei în practică

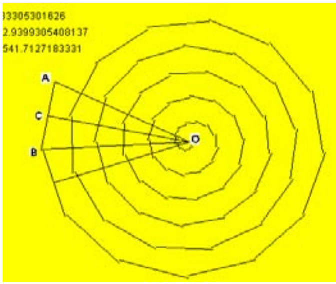

Fig. 29. *Spirala lui Arhimede.*

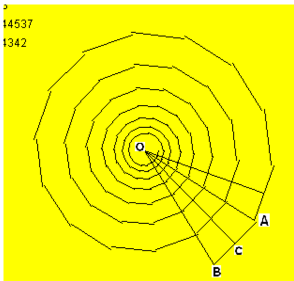

Fig. 30. *Spirala logaritmică.*

Vom relua două dintre spiralele anterioare şi vom prezenta metode de construire şi calculare a ariilor unor sectoare şi lungimilor unor segmente de spirală.

Pentru figurile de mai sus nu mai sunt corecte formulele pentru lungimea arcului şi aria măturată de raza vectoare din paragraful anterior. Corect ar fi să se adune segmentele de tip AB, sau ariile elementare ale triunghiurilor de tip OAB din figurile respective, obţinându-se nişte sume de tip Riemann. În acest sens, îl putem considera pe Arhimede, precursorul lui Riemann. Această metodă poate fi aplicată, în mod necesar, la spiralele pentru care nu există formule de calcul pentru L_{arc} şi $A_{sect,}$ ca metodă aproximativă.

Evident că in matematică există mai multe curbe de acest fel, unele având suport în natură, dar noi ne-am limitat doar la cele clasice. Kant spunea că nu există nici un lucru complicat. Fiecare lucru, aparent complicat, este constituit din lucruri mai mici, simple. Dar tot el a adăugat că nu există nici un lucru simplu. Poate descoperind tot felul de teorii misterioase vom ajunge să ştim totul despre lucrurile simple, care formează lucrurile complicate, care stau la baza lucrurilor si mai complicate, exact ca o spirală.

Ne oprim aici cu prezentarea teoretică a acestor tipuri spirale, urmând ca în partea a doua să discutăm despre alte spirale clasice şi să prezentăm spiralele existente pe vasele din Muzeul de Istorie Piatra - Neamţ, Secţia Cucuteni.

Bibliografie

1. *Dicţionar de Matematici Generale*, Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, anul 1974.
2. ***Matei A. ş.a.*** *Desen Tehnic Industrial*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.
3. *Dicţionarul Explicativ al Limbii Române (DEX).*
4. *Dicţionarul Limbii Române Moderne (DLRM)*
5. *Dicţionarul de Neologisme (DN).*