

# ОПТИЧЕСКАЯ НУТАЦИЯ В ЭКСИТОННОЙ ОБЛАСТИ СПЕКТРА

П.И. Хаджи<sup>1,2</sup>, В.В. Васильев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной физики АНМ, Молдова, Кишинев, Академией, 5

<sup>2</sup>Приднестровский государственный университет имени Т.Г. Шевченко, Молдова,

Тирасполь, ул. 25 Октября, 128

e-mail: vasscorp@mail.ru

**Abstract** — В приближении среднего поля изучено явление оптической нутации в экситонной области спектра с учётом экситон-фотонного и упругого экситон-экситонного взаимодействий. Показано, что особенности протекания явления нутации определяются начальными плотностями экситонов и фотонов, расстройкой резонанса, параметром нелинейности и начальной разностью фаз. При отличных от нуля начальных концентрациях экситонов и фотонов имеют место три режима временной эволюции экситонов и фотонов: режим периодического превращения экситонов в фотоны и обратно, режим аperiodического превращения фотонов в экситоны и режим покоя. В условиях покоя начальные плотности экситонов и фотонов отличны от нуля и со временем они не изменяются. Найдены амплитуды и периоды колебаний плотностей частиц, которые определяются параметрами системы. Предсказано существование явлений самозахвата экситонов и пленения фотонов в системе, которые возникают при пороговых значениях параметра нелинейности. С ростом этого параметра в системе возникает резкое, скачкообразное изменение амплитуд колебаний плотностей экситонов и фотонов при критическом значении параметра нелинейности. Показано, что оба эти явления обусловлены упругим экситон-экситонным взаимодействием, которое приводит к динамическому концентрационному сдвигу экситонного уровня.

**Index Terms** – оптическая нутация, экситон-фотонное взаимодействие, начальная разность фаз.

Nanoscience and nanotechnology

## I. ВВЕДЕНИЕ

Явление оптической нутации относится к явлениям когерентного взаимодействия света с веществом. Оно состоит в периодическом изменении начального состояния системы под действием поля электромагнитной волны, которое приводит к соответствующей модуляции излучения среды [1]. При теоретическом описании явления нутации обычно используется полуклассическое приближение, в рамках которого среда описывается квантовомеханически, а поле – классически с помощью уравнений Максвелла. В [2] представлена теория оптической нутации в системе двухуровневых атомов, взаимодействующих с конечным числом фотонов в резонаторе. Теория оптической нутации в экситонной области спектра развита в ряде работ [3-9]. Под явлением нутации в этом случае понимают процесс периодического превращения экситонов в фотоны и обратно. Такие превращения продолжают до тех пор, пока не вступят в силу релаксационные процессы. При низких уровнях возбуждения среды в пределах линейной кристаллооптики частота нутации определяется константой экситон-фотонного взаимодействия, т.е. не зависит от амплитуды поля волны, а при высоких уровнях возбуждения она начинает зависеть от плотности экситонов. В [7]

было показано, что с ростом уровня возбуждения частота нутации может как возрастать, так и убывать. Отметим, что детальное исследование особенностей оптической нутации и нелинейного поведения её частоты от уровня возбуждения до сих пор отсутствует. Кроме того, представляет интерес установление возможности фазового управления процессом нутации и возможности существования явления самозахвата в экситонной области спектра. В [10] было показано, что особенности двухфотонной нутации в системе когерентных биэкситонов определяются не только уровнем возбуждения, но также и начальной разностью фаз биэкситонов и фотонов. Поэтому установление закономерностей протекания явления оптической нутации в экситонной области спектра при больших уровнях возбуждения является актуальным.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Рассмотрим явление оптической нутации в системе когерентных фотонов и экситонов в полупроводниках под действием ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения. Предполагается, что длительность импульсов  $\tau_p$  на много меньше времени релаксации экситонов  $\tau_{rel}$ . В этом случае процессами релаксации можно пренебречь, так как они не успевают срабатывать за

время действия импульса. Будем считать, что все фотоны и экситоны в кристалле являются когерентными, имеют одни и те же волновые вектора, энергии, поляризации и фазы, а их амплитуды макровелики. Явление нутации рассматривается при больших уровнях возбуждения кристалла, когда возникает необходимость учёта нелинейных процессов взаимодействия в системе экситонов и фотонов. В этих условиях основной нелинейностью является упругое экситон-экситонное взаимодействие [7,8,11]. Поэтому далее явление оптической нутации в экситонной области спектра рассматривается при учёте экситон-фотонного и упругого экситон-экситонного взаимодействий.

Гамильтониан однородно распределённых в кристалле когерентных экситонов и фотонов без учёта антирезонансных членов запишем в виде:

$$\frac{1}{\hbar}H = \omega_0 \hat{a}^+ \hat{a} + \omega \hat{c}^+ \hat{c} + g(\hat{a}^+ \hat{c} + \hat{c}^+ \hat{a}) + \frac{1}{2} \nu \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}, \quad (1)$$

где  $\hat{a}(\hat{c})$  – оператор уничтожения экситона (фотона),  $\omega_0$  – собственная частота фотона,  $g$  – константа экситон-фотонного взаимодействия,  $\nu$  – константа упругого экситон-экситонного взаимодействия.

Используем далее приближение среднего поля (mean field approximation), в котором среднее значение операторов отлично от нуля:  $\langle \hat{b} \rangle = b \neq 0$ ,  $\langle \hat{c} \rangle = c \neq 0$ . Здесь  $b$  и  $c$  считаются комплексными амплитудами материального и электромагнитного полей. Усредняя гайзенберговские уравнения движения для операторов  $\hat{a}$  и  $\hat{c}$ , в этом приближении получаем уравнения движения для соответствующих амплитуд  $a$  и  $c$ . Тогда в условиях полной когерентности системы среднее значение от произведения нескольких операторов факторизуется в виде произведения средних значений каждого из операторов. Получающаяся таким образом с использованием гамильтониана (1) система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая временную эволюцию амплитуд материального и электромагнитного полей, имеет вид:

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= \omega_0 a + gc + \nu a^* a a, \\ i\dot{c} &= \omega c + ga. \end{aligned} \quad (2)$$

Систему уравнений (2) дополним начальными условиями

$$a_{/t=0} = a_0 e^{i\varphi_0}, \quad c_{/t=0} = c_0 e^{i\psi_0}, \quad (3)$$

где каждая функция характеризуется своей начальной амплитудой ( $a_0, c_0$ ) и фазой ( $\varphi_0, \psi_0$ ).

Введём далее в рассмотрение плотности экситонов  $n = a^* a$  и фотонов  $f = c^* c$ , а также функции  $Q = i(a^* c - c^* a)$  и  $R = a^* c + c^* a$ . Используя (2), легко получить следующую систему нелинейных уравнений:

$$\dot{n} = gQ, \quad \dot{f} = -gQ, \quad (4)$$

$$\dot{Q} = -(\Delta - \nu n)R + 2g(f - n), \quad \dot{R} = (\Delta - \nu n)Q,$$

где  $\Delta = \omega - \omega_0$  – расстройка резонанса. Используя (3), начальные условия для введённых функций можно представить в виде:

$$\begin{aligned} n_{/t=0} &\equiv n_0 = |a_0|^2, \quad f_{/t=0} \equiv f_0 = |c_0|^2, \\ Q_{/t=0} &\equiv Q_0 = 2\sqrt{n_0 f_0} \sin \Theta_0, \\ R_{/t=0} &\equiv R_0 = 2\sqrt{n_0 f_0} \cos \Theta_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Theta_0 = \psi_0 - \varphi_0$  – начальная разность фаз.

Решая систему уравнений (4) с учётом (5), получим интеграл движения

$$n + f = n_0 + f_0 \quad (6)$$

и выражение для функции  $Q$ :

$$Q^2 = 4n(n_0 + f_0 - n) - \left[ \frac{1}{g}(n - n_0)(\Delta - \frac{1}{2}\nu(n + n_0)) + 2\sqrt{n_0 f_0} \cos \Theta_0 \right]^2. \quad (7)$$

Выражение (6) представляет собой закон сохранения полного числа частиц в системе. Используя далее уравнение  $\dot{n} = gQ$  из (4) и выражения (6) и (7), можно получить решение для плотности экситонов  $n(t)$  в зависимости от времени. Далее будем интересоваться временной эволюцией плотности экситонов  $n(t)$  при различных значениях параметров системы. Временную эволюцию плотности фотонов  $f(t)$  легко найти, используя (6).

Дальнейшее исследование удобнее провести для нормированных величин:

$$\begin{aligned} N &= n/(n_0 + f_0), \quad F = f/(n_0 + f_0), \quad \tau = gt, \quad \delta = \Delta/g, \\ N_0 &= n_0/(n_0 + f_0), \quad F_0 = f_0/(n_0 + f_0), \\ \alpha &= \nu(n_0 + f_0)/g. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда интеграл движения (6) приводится к виду  $N + F = N_0 + F_0 = 1$ ,

а основное уравнение, описывающее временную эволюцию нормированной плотности экситонов  $N(t)$ , можно записать в виде

$$\left( \frac{dN}{d\tau} \right)^2 + W(N) = 0, \quad (10)$$

где  $W(N) = -4N(1 - N) +$

$$+ \left[ \delta(N - N_0) - \frac{\alpha}{2}(N^2 - N_0^2) + 2\sqrt{N_0 F_0} \cos \Theta_0 \right]^2. \quad (11)$$

Выражение (10) можно рассматривать как уравнение колебаний нелинейного осциллятора, где  $(dN/d\tau)^2$  и  $W(N)$  играют роль кинетической и потенциальной энергии соответственно. Качественно поведение  $N(\tau)$  можно установить, изучая зависимость потенциальной энергии  $W(N)$  нелинейного осциллятора от  $N$  при различных значениях параметров. Функция  $N(\tau)$  может изменяться в той области значений  $N$ , где

$W(N) \leq 0$ . Действительные корни уравнения  $W(N) = 0$  определяют точки поворота классической траектории движения нелинейного осциллятора. Из (4) и (5) можно получить начальное условие для скорости изменения  $(dN/d\tau)_{\tau=0} \equiv \dot{N}_0$  функции  $N(t)$ . Знак производной  $\dot{N}_0$  определяется только начальной разностью фаз  $\Theta_0$ . При  $2k\pi \leq \Theta_0 \leq (2k+1)\pi$  получаем  $\dot{N}_0 > 0$ , а при  $(2k+1)\pi \leq \Theta_0 \leq 2(k+1)\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  имеем  $\dot{N}_0 < 0$ . Из (11) видно, что особенности временной эволюции определяются начальными плотностями частиц  $N_0$  и  $F_0$ , начальной разностью фаз  $\Theta_0$ , расстройкой резонанса  $\delta$  и параметром нелинейности  $\alpha$ . Отметим, что если в начальный момент времени в системе присутствует только одна из компонент (только фотоны или экситоны), то тогда особенности эволюции системы не зависят от начальной разности фаз  $\Theta_0$ .

Рассмотрим нелинейную эволюцию системы в условиях точного резонанса ( $\delta = 0$ ). Из (11) следует, что в этом случае потенциальная энергия  $W(N)$  имеет вид параболической ямы. Уравнение  $W(N) = 0$  при  $\delta = 0$  имеет только два действительных корня, которые мы обозначим через  $N_m$  и  $N_M$  ( $N_m < N_M$ ), и два комплексно сопряжённых корня  $N_{1,2} = u \pm iv$ , где  $u = -(N_M + N_m)/2$ ,

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{(N_M - N_m)^2 + \frac{8}{3}(N_M N_m - N_0^2) - \frac{4}{\alpha} \sqrt{N_0 F_0} \cos \Theta + \frac{8}{\alpha^2}}$$

Корни  $N_M$  и  $N_m$  имеют смысл наибольшей и наименьшей плотности экситонов, которые они могут принимать в процессе эволюции. Амплитуду изменения плотности экситонов  $A_0$  можно определить выражением  $A_0 = N_M - N_m$ . Зная корни  $N_M$  и  $N_m$  (которые могут быть получены численным либо аналитическим решением уравнения  $W(N) = 0$ ), легко найти решение эволюционного уравнения  $dN/d\tau = \pm \sqrt{-W(N)}$  для плотности экситонов, которое имеет вид:

$$N = \frac{1}{2}(N_M + N_m) - \frac{1}{2}(N_M - N_m) \times \frac{(n^+ + n^-) \operatorname{cn}((1/2)\alpha\sqrt{m}\tau \pm F(\varphi_0, k)) + n^+ - n^-}{(n^+ - n^-) \operatorname{cn}((1/2)\alpha\sqrt{m}\tau \pm F(\varphi_0, k)) + n^+ + n^-}, \quad (12)$$

где

$$n^+ = \sqrt{(u - N_M)^2 + v^2}, \quad n^- = \sqrt{(u - N_m)^2 + v^2},$$

$$m = \sqrt{[(u - N_M)(u - N_m) + v^2]^2 + (N_M - N_m)^2 v^2},$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{N_M n^+ + N_m n^- - N_0(n^+ + n^-)}{N_M n^+ - N_m n^- + N_0(n^+ - n^-)}\right),$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(u - N_M)(u - N_m) + v^2}{m}\right), \quad (13)$$

$\operatorname{cn}(\varphi)$  – эллиптический косинус с модулем  $k$  [12,13],  $F(\varphi_0, k)$  – неполный эллиптический интеграл первого рода с параметром  $\varphi_0$  и модулем  $k$  [12,13]. Отсюда видно, что эволюция системы представляет собой периодическое изменение плотности экситонов и фотонов с периодом  $T$ , равным

$$T = 8K(k)/(\alpha\sqrt{m}), \quad (14)$$

где  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$  [12,13]. Таким образом, особенности явления оптической нутации определяются параметром нелинейности  $\alpha$  и зависят от способа приготовления начального состояния, то есть от начальных плотностей частиц и начальной разности фаз.

Рассмотрим частный случай эволюции, определяемый конкретными значениями параметров. Пусть в начальный момент времени плотности экситонов и фотонов  $n_0$  и  $f_0$  отличны от нуля ( $N_0 \neq 0, F_0 \neq 0$ ). Видно, что кроме параметра нелинейности  $\alpha = v(n_0 + f_0)/g$ , динамику системы определяют ещё два параметра –  $F_0$  (либо  $N_0 = 1 - F_0$ ) и начальная разность фаз  $\Theta_0$ . Пусть начальная разность фаз  $\Theta_0 = \pi/2$ . Тогда решение уравнения  $W(N) = 0$  при  $\Theta_0 = \pi/2$  показывает, что оба действительных корня,  $N_M$  и  $N_m$ , зависят от  $\alpha$ . При этом больший корень,  $N_M$ , монотонно убывает, а меньший,  $N_m$ , растёт с ростом  $\alpha$  (рис.1 б). Это обстоятельство объясняет монотонное уменьшение амплитуды колебаний плотности экситонов  $A_0$  с ростом  $\alpha$  (рис.1 а-в). На рис.1 а представлена временная эволюция плотности экситонов в зависимости от  $\alpha$  для решения (12) со знаком (+) в аргументе эллиптического косинуса. Плотность экситонов сразу же после начального момента времени растёт со временем от значения  $N_0$  до максимального значения  $N_M$ , после чего убывает до значения  $N_m$  и далее осциллирует в пределах от  $N_m$  до  $N_M$ . Решение со знаком (-) в аргументе эллиптического косинуса отличается от решения со знаком (+) только сдвигом по фазе, равным  $F(\varphi_0, k)$ , и сразу же после начального момента времени растёт. На рис.1 в, г представлены зависимости амплитуды  $A_0$  и периода  $T$  колебаний плотности экситонов от параметров  $\alpha$  и  $F_0$ . Видно, что обе функции в окрестности малых значений  $\alpha$  незначительно уменьшаются с ростом  $F_0$ , тогда как при  $\alpha \gg 1$ ,

наоборот, они растут с ростом  $F_0$ . Отсюда также следует, что амплитуда колебаний плотности экситонов  $A_0 = N_M - N_m < 1$ . Хотя  $N_0 + F_0 = 1$ , однако невозможно установление такого режима, что в некоторые моменты времени в системе существуют только экситоны (либо только фотоны). В процессе колебаний всегда существует суперпозиция экситонов и фотонов с отличными от нуля либо единицы плотностями.

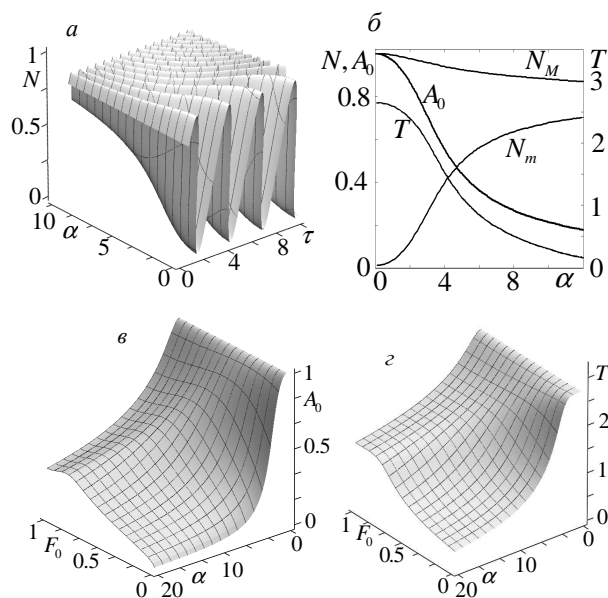


Рис.1. а) Временная эволюция, б) максимальная  $N_M$  и минимальная  $N_m$  плотности экситонов, амплитуда  $A_0$  и период  $T$  колебаний плотности экситонов  $N(\tau)$  в зависимости от величины параметра нелинейности  $\alpha$  при начальных условиях  $N_0 = 0.8$ ,  $F_0 = 0.2$ ,  $\Theta_0 = \pi/2$  и нулевой расстройке резонанса. Зависимость в) амплитуды  $A_0$  и г) период  $T$  колебаний плотности экситонов от параметра нелинейности  $\alpha$  и начальной плотности фотонов  $F_0$ .

### III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В приближении среднего поля изучено явление оптической нутации в экситонной области спектра при учёте экситон-фотонного и упругого экситон-экситонного взаимодействий. Показано, что при отличных от нуля начальных концентрациях экситонов и фотонов имеют место три режима временной эволюции экситонов и фотонов:

режим периодического превращения экситонов в фотоны и обратно, режим аperiodического превращения фотонов в экситоны и режим покоя. Найдены амплитуды и периоды колебаний плотностей частиц, которые определяются начальными плотностями экситонов и фотонов, расстройкой резонанса, параметром нелинейности и начальной разностью фаз. Предсказано существование явлений самозахвата экситонов и пленения фотонов в системе, которые возникают при пороговых значениях параметра нелинейности. С ростом этого параметра в системе возникает резкое, скачкообразное изменение амплитуд колебаний плотностей экситонов и фотонов. Показано, что оба эти явления обусловлены упругим экситон-экситонным взаимодействием, которое приводит к динамическому концентрационному сдвигу экситонного уровня.

### IV. ЛИТЕРАТУРА.

- [1] П.А. Апанасевич. Основы взаимодействия света с веществом. Наука и техника, Минск (1977).
- [2] А.И. Бурштейн, А.Ю. Пусеп. ЖЭТФ 69, 1927 (1975)
- [3] A.S. Davidov, A.A.Sericov. Phys. Stat. Sol. (b) 56, 351 (1973)
- [4] V.V. Samartsev, U.E. Sheibut, U.S. Ivanov. Spectroscopy Lett. 9, 57 (1976).
- [5] С.Н. Белкин, С.А. Москаленко, А.Х. Ротару, П.И. Хаджи. Изв. АН СССР, сер. физ., 43, 355(1979); ФТТ 22, 1961 (1980).
- [6] П.И. Хаджи, С.А. Москаленко, С.Н. Белкин. Письма в ЖЭТФ 29, 223 (1979)
- [7] С.А. Москаленко, П.И. Хаджи, А.Х. Ротару. Солитоны и нутация в экситонной области спектра. Штиинца, Кишинёв (1979).
- [8] П.И. Хаджи. Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках. Штиинца, Кишинёв (1985).
- [9] Е.С. Киселёва, П.И. Хаджи. ФТТ 22, 3409 (1980).
- [10] П.И. Хаджи, В.В. Васильев. ЖЭТФ 131, 922 (2007); Оптика и спектроскопия 104, 392(2008); Квантовая электроника 40, 907 (2010).
- [11] S.A. Moskalenko and D.W. Snoke. Bose-Einstein Condensation of Excitons and Biexcitons. Cambridge University Press, Cambridge UK, New York, USA (2000).
- [12] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Наука, Москва, 1978.
- [13] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, Москва, 1971.