DETERMINAREA STĂRILOR LIMITĂ ALE GRINZILOR INFINITE PE MEDIU ELASTIC

A. Taranenco
Universitatea Tehnică a Moldovei

INTRODUCERE

La momentul actual sunt folosite diferite modele de mediu elastic, pe care reazemă diferite construcţii (ştanţe, grinzi, plăci plane şi curbe ş.a.). Primul model al mediului a fost propus de Winkler [3, 4, 5]. Acest model are un neajuns: deformaţia fundaţiei are loc numai în limitele elementului, care intră în contact cu ea. Alt model propus este de tipul semispaţiului elastic, care are proprietăţile de redistribuire a tensiunilor de contact şi o deformaţie reală a mediului. Există şi alte modele ale mediului elastic [3, 4, 5].

Metodele de calcul ale sistemelor din bare conform stărilor limită, adică determinarea încărcărilor exterioare, care fiind depăşite conduc la distrugerea construcţiei sau la o situaţie, când deformaţiile cresc considerabil, prezintă un interes practic. Problema determinării stării limită a grinzilor infinite pe mediu elastic de tip Winkler a fost studiată în [9]. Se menţionează că soluţia obţinută este greşită [2].

Determinarea stărilor limită a grinzilor pe mediu elastic diferit de modelul lui Winkler a fost mai puţin studiată. La stabilirea stărilor limită ale grinzilor pe mediu elastic, ele fiind structuri hiperstatice, se utilizează metode studiate în mecanica structurilor. O abordare care foloseşte metoda eforturilor este propusă în [10]. Această metodă nu este raţională la calculul grinzilor de lungimi considerabile. În această lucrare se determină starea limită a grinzilor de lungime considerabilă pe mediu elastic modelat ca semispaţiu.

Cedarea construcţiilor este determinată de apariţia deformaţiilor plastice şi, prin urmare, în calcul este necesar să se ţină seama de proprietăţile plastice ale materialului. Cedarea construcţiei are loc în urma apariţiei unui număr necesar de articulaţii plastice, care conduc la transformarea ei într-un mecanism total sau parţial. În alte cazuri construcţia sau mediul pot avea deplasări considerabile.

Determinarea stărilor limită prezintă interes practic şi poate fi evaluată folosind diferite criterii de cedare. În lucrare ca stare limită se ia starea grinzii când ea capătă numărul necesar de articulaţii, care o transformă în mecanism.

1. GRINDA INFINITĂ AMPLASATĂ PE SEMISPAŢIU ELASTIC

Fie o grindă de lungime considerabilă, având modulul de elasticitate $\boldsymbol{E}$ şi coeficientul lui Poisson $\boldsymbol{\nu}$, solicitată de o încărcare arbitrară $\boldsymbol{q(x)}$ şi amplasată pe un mediu deformabil, cu modulul de elasticitate $\boldsymbol{E}_\circ$ şi coeficientul lui Poisson $\boldsymbol{\nu}_\circ$ (fig. 1).

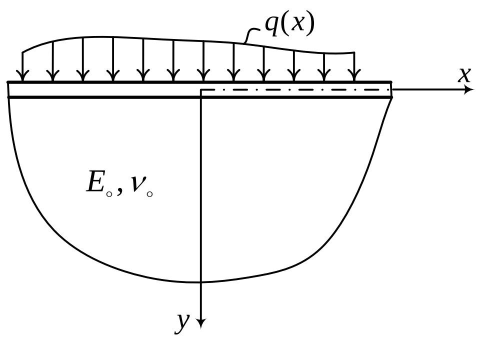

Figura 1.

Ecuaţia diferenţială a grinzii pe semispaţiu are forma [3, 4, 5]

$$\boldsymbol{D\frac{d^4v(x)}{dx^4} = q(x) - p(x)}\,, \tag{1}$$

unde: $\boldsymbol{p(x)}$ sunt tensiunile de contact între grindă şi mediu; $\boldsymbol{v(x)}$ – deplasarea verticală a grinzii; $\boldsymbol{D = Eh^3/12(1-\nu^2)}$ – rigiditatea cilindrică a grinzii.

În ecuaţia (1) necunoscute sunt $\boldsymbol{v(x)}$ şi $\boldsymbol{p(x)}$. Relaţia care trebuie ataşată la (1) este ecuaţia ce leagă deplasările semispaţiului elastic provenite din tensiunile de contact [3, 4, 5, 8]

$$\boldsymbol{v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi)p(\xi)d\xi}\,, \tag{2}$$

unde $\boldsymbol{K(x-\xi) = -\frac{2(1-\nu_\circ^2)}{\pi E_\circ}\ln|x-\xi| + \mathbf{const}}$ este funcţia de influenţă pentru modelul semispaţiului elastic în stare de deformaţie plană.

Dacă grinda este de lungime considerabilă ea poate fi considerată infinită şi pentru rezolvarea ecuaţiilor (1) şi (2), se poate utiliza metoda transformării integrale Fourier [1, 6, 7].

Relaţia (1) se multiplică cu $e^{i\alpha x}$ (α– parametrul transformării), se integrează pe părţi în intervalul $(-\infty;+\infty)$, şi considerând că funcţia $v(x)$ şi derivatele ei sunt nule pentru $x=\pm\infty$, se obţine

$$D\alpha^4\bar{v}(\alpha)=\bar{q}(\alpha)-\bar{p}(\alpha), \tag{3}$$

unde funcţiile barate sunt transformatele Fourier a funcţiilor respective. De exemplu

$$\bar{v}(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)e^{i\alpha x}dx.$$

Ecuaţia (2) se diferenţiază în raport cu x (pentru a elimina constanta din funcţia de influenţă) şi se aplică transformarea Fourrier. Utilizând teorema convoluţiei, se obţine

$$\bar{K}(\alpha)\bar{p}(\alpha)=\bar{v}(\alpha). \tag{4}$$

Rezolvând ecuaţiile (3) şi (4) în raport cu $\bar{q}(\alpha)$, se obţine

$$\begin{aligned}\bar{p}(\alpha)&=\frac{\bar{q}(\alpha)}{1+D\alpha^4\bar{K}(\alpha)};\\ \bar{v}(\alpha)&=\frac{\bar{q}(\alpha)\bar{K}(\alpha)}{1+D\alpha^4\bar{K}(\alpha)}.\end{aligned} \tag{5}$$

Dacă ţinem seama că $\bar{K}(\alpha)=i\cdot\pi\cdot\mathrm{sign}(\alpha)$ şi pentru încărcări simetrice sistemul (5) are forma

$$\begin{aligned}\bar{p}(\alpha)&=\frac{\bar{q}(\alpha)}{1+C\pi D\alpha^2\,|\alpha|}=\frac{\bar{q}(\alpha)}{1+a^3\alpha^3};\\ \bar{v}(\alpha)&=\frac{C\pi}{|\alpha|}\frac{\bar{q}(\alpha)}{(1+C\pi D\alpha^2\,|\alpha|)}=\frac{C\pi}{\alpha}\frac{\bar{q}(\alpha)}{(1+a^3\alpha^3)},\end{aligned} \tag{6}$$

unde: $C=2(1-\nu_\circ^2)/\pi E_\circ$; $a^3=C\pi D$.

Soluţiile se vor obţine folosind formula de inversare a transformării Fourier

$$\begin{aligned}p(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar{q}(\alpha)}{1+a^3\alpha^3}e^{-i\alpha x}d\alpha;\\ v(x)&=\frac{C}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar{q}(\alpha)}{\alpha(1+a^3\alpha^3)}e^{-i\alpha x}d\alpha.\end{aligned} \tag{7}$$

2. STAREA LIMITĂ A GRINZII INFINITE SOLICITATĂ DE O FORŢĂ CONCENTRATĂ

Pentru grinda solicitată de o forţă concentrată F (fig. 2, *a*) încărcarea exterioară poate fi prezentată în forma $q(x)=F\cdot\delta(x)$, unde $\delta(x)$ – funcţia Dirac-delta şi $\bar{q}(\alpha)=F$.

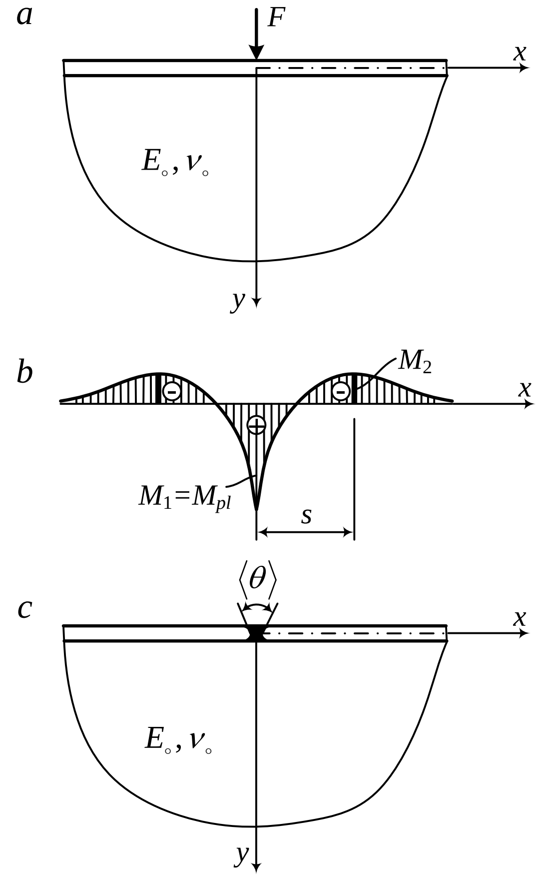

Figura 2.

Relaţiile (7) capătă forma

$$p(x)=\frac{F}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{1+a^3\alpha^3}d\alpha;$$

$$v(x)=F\,C\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{\alpha(1+a^3\alpha^3)}d\alpha.$$

Se menţionează că ultima integrală în sens clasic este divergentă şi se va trata în sens generalizat [1].

Mărind treptat forţa F, se va ajunge la situaţia când în secţiunea $x = 0$ se va forma o articulaţie plastică (fig. 2, *b*) şi $M(0) = M_1 = M_{pl}$, unde M_{pl} este momentul plastic al secţiunii grinzii.

Soluţia acestei probleme poate fi obţinută prin superpoziţie ca suma a două: una, provenită din acţiunea încărcării exterioare (fig. 2, *a*), şi soluţia particulară, provenită din saltul unghiului de rotire în articulaţia plastică (fig. 2, *c*)

$$p^*(x) = -\frac{D}{\pi}\langle\theta\rangle\int_0^\infty \frac{\alpha^2\cos\alpha x}{1+a^3\alpha^3}d\alpha;$$
$$v^*(x) = -\frac{a^3}{\pi}\langle\theta\rangle\int_0^\infty \frac{\alpha\cos\alpha x}{1+a^3\alpha^3}d\alpha, \tag{8}$$

unde $\langle\theta\rangle$ este saltul unghiului de rotire a normalei în articulaţie.

Relaţiile (8) s-au obţinut utilizând metoda transformării Fourier conform schemei generalizate [7].

Din condiţia $M^*(0) = M_{pl}$ se obţine relaţia dintre momentul plastic şi saltul unghiului de rotire $\langle\theta\rangle = 3\sqrt{3}M_{pl}a/2D$.

La apariţia articulaţiei plastice în punctul de aplicare a forţei F capacitatea portantă a grinzii nu este epuizată. La creşterea forţei momentul de încovoiere M_1 va fi constant, egal cu momentul plastic, dar în acelaşi timp vor creşte momentele în alte secţiuni ale grinzii. Valoarea încărcării exterioare se va majora până când în secţiunea cu abscisa s (fig. 2, *b*) momentul de încovoiere M_2 va fi egal cu momentul plastic al secţiunii. Coordonata s se va determina din condiţia

$$Q(s) = Q^\circ + Q^* = 0, \tag{9}$$

iar valoarea parametrului de încărcare al forţei F, la atingerea căruia va apărea a doua articulaţie plastică – din condiţia

$$M(s) = M^\circ + M^* = -M_{pl}, \tag{10}$$

unde M°, Q° şi M^*, Q^* sunt momentul de încovoiere şi forţa de forfecare provenite din forţa F, şi, respectiv, din M_{pl} din prima articulaţie plastică

$$M^\circ(x) = \frac{Fa^2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2a}e^{-\frac{|x|}{a}} - \int_0^\infty \frac{(1-a\alpha)\cos\alpha x}{(1+a^2\alpha^2)(1+a^3\alpha^3)}d\alpha\right];$$

$$Q^\circ(x) = \frac{Fa^3}{\pi}\left[\frac{\pi}{2a^3}e^{-\frac{|x|}{a}}\left(1-\operatorname{sign}(x)\right) - \int_0^\infty \frac{\alpha^2\sin\alpha x}{1+a^3\alpha^3}d\alpha\right];$$

$$M^*(x) = \langle\theta\rangle\frac{D}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+a^3\alpha^3}d\alpha;$$

$$Q^*(x) = -\langle\theta\rangle\frac{D}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{1+a^3\alpha^3}d\alpha.$$

Realizând condiţiile (9) şi (10) obţinem un sistem de ecuaţii neliniare, care poate fi rezolvat prin metode numerice. Rezolvând acest sistem se obţine distanţa $s = \pm 1{,}41a$ şi valoarea forţei în momentul apariţiei simultană a două articulaţii $F_{u,2} = 8{,}85M_{pl}/a$.

În continuare se prezintă diagramele momentului de încovoiere în grindă (fig.3) şi tensiunilor de contact (fig.4), raportate la M_{pl} pentru $x \geq 0$. Introducând notaţiile $\gamma = F\cdot a/M_{pl}$, $x = a\cdot\tilde{x}$ şi $\tilde{\alpha} = a\cdot\alpha$, expresiile momentului de încovoiere în grindă şi a tensiunilor de contact între grindă şi mediu în domeniul elastic vor avea forma

$$\frac{M(a\tilde{x})}{M_{pl}} = \frac{\gamma}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}e^{-|\tilde{x}|} - \int_0^\infty \frac{(1-\tilde{\alpha})\cos\tilde{\alpha}\tilde{x}}{(1+\tilde{\alpha}^2)(1+\tilde{\alpha}^3)}d\tilde{\alpha}\right];$$

$$\frac{p(a\tilde{x})a^2}{M_{pl}} = \frac{\gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\tilde{\alpha}\tilde{x}}{1+\tilde{\alpha}^3}d\tilde{\alpha},$$

şi, respectiv, în domeniul elastoplastic

$$\frac{M(a\tilde{x})}{M_{pl}} = \frac{\gamma}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}e^{-|\tilde{x}|} - \int_0^\infty \frac{(\tilde{\alpha}^2-\tilde{\alpha}+2)\cos\tilde{\alpha}\tilde{x}}{(1+\tilde{\alpha}^2)(1+\tilde{\alpha}^3)}d\tilde{\alpha}\right] + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\tilde{\alpha}\tilde{x}}{1+\tilde{\alpha}^3}d\tilde{\alpha};$$

$$\frac{p(a\tilde{x})a^2}{M_{pl}} = \frac{\gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1+\tilde{\alpha}^2)\cos\tilde{\alpha}\tilde{x}}{1+\tilde{\alpha}^3}d\tilde{\alpha} - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\tilde{\alpha}^2\cos\tilde{\alpha}\tilde{x}}{1+\tilde{\alpha}^3}d\tilde{\alpha},$$

Se observă că punctele de modificare a semnului tensiunilor în stadiul elastic au aceeaşi valoare pentru diferite valori ale parametrului γ şi pot fi determinate egalând cu zero tensiunile $p(x)$. De exemplu, pentru o forţă concentrată $x = \pm 3{,}80a$.

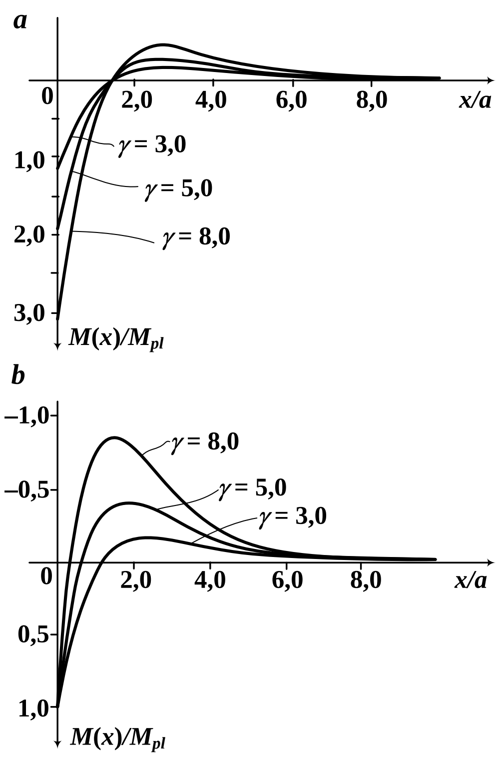

Figura 3. Diagrama momentului de încovoiere în grindă în stadiul elastic (*a*) şi elastoplastic (*b*).

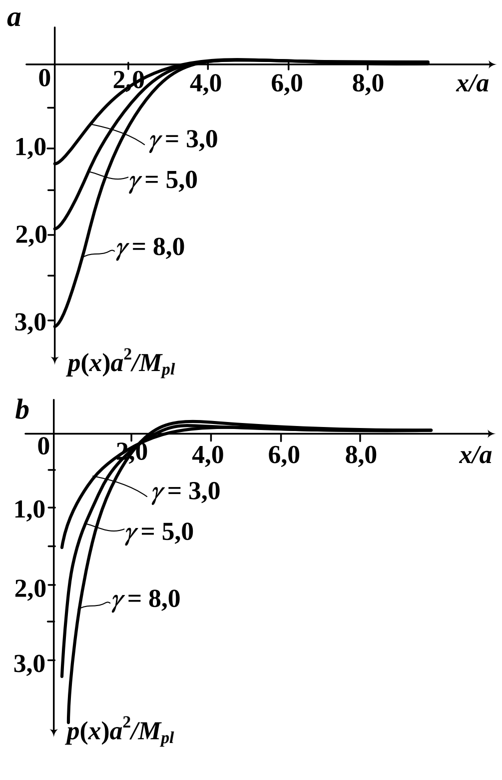

Figura 4. Diagrama tensiunilor de contact în stadiul elastic (*a*) şi elastoplastic (*b*).

CONCLUZII

1. A fost formulată şi rezolvată problema determinării stărilor limită ale grinzilor de lungime mare amplasate pe mediu de tip semispaţiu elastic. Ca stare limită se ia grinda în care apar două sau mai multe articulaţii plastice, transformând-o în mecanism.
2. S-au stabilit zonele în care tensiunile de contact nu îşi schimbă semnul. Determinarea acestei zone de contact prezintă interes practic la proiectarea grinzilor pe mediu elastic.
3. Metodica propusă a fost aplicată pentru grinda solicitată de o forţă concentrată. Ideile expuse pot fi aplicate pentru grinzi solicitate de orice tip de încărcări.

Autorul exprimă recunoştinţă dlui prof. univ. dr.hab. Gh. Moraru pentru sprijin şi îndrumare la elaborarea prezentei lucrări.

Bibliografie

1. Moraru Gh., Mursa C. *Teoria elasticităţii// Chişinău, Tehnica-Info, 2006.*
2. Moraru Gh., Taranenco A. *Determinarea stadiului de cedare plastică a grinzilor pe mediu elastic. Meridian Ingineresc Nr. 2, Chişinău, pag.16...19, 2006.*
3. Gorbunov-Posadov M.I. i dr. *Raschet konstrukczij na uprugom osnovanii// Moskva, Strojizdat, 1984.*
4. Zhemochkin B.N., Siniczy'n A.P. *Prakticheskie metody' rascheta fundamenntny'x balok i plit na uprugom osnovanii// Moskva, Gosstrojizdat, 1962.*
5. Korenev B.G. *Voprosy' rascheta balok i plit na uprugom osnovanii// Moskva, Izdatel'stvo literatury' po stroitel'stvu i arxitekture, 1954.*
6. Moraru G.A. *Metod razry'vny'x reshenij v mexanike deformiruemy'x tel// Kishinev,Shtiincza, 1990.*
7. Popov G.Ya. *Konczentracziya uprugix napryazhenij vozle shtampov, razry'vov, tonkix vklyuchenij i podkreplenij// Moskva, Nauka, 1982.*
8. *Razvitie teorii kontaktny'x zadach v SSSR (pod red. Galina L.A.)// Moskva, Nauka, 1976.*
9. Rzhaniczy'n A.R. *Raschet sooruzhenij s uchetom plasticheskix svojstv materialov// Moskva, Strojvoenmorizdat, 1954.*
10. Siniczy'n A.P. *Raschet balok i plit na uprugom osnovanii za predelom uprugosti// Moskva, Strojizdat, 1974.*

Recomandat spre publicare: 25.05.2007.