DESPRE UNELE SUPRAFEŢE RIGLATE

Luciana-Gabriela ROTARU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *În lucrare se examinează două suprafeţe de ordinul doi: hiperboloidul cu o pânză şi paraboloidul hiperbolic. Se arată, că pe fiecare din aceste suprafeţe există câte două familii de drepte, care acoperă în întregime aceste suprafeţe. Dreptele dintr-o familie nu se intersectează, iar cele din familii diferite au doar câte un punct comun. Prin fiecare punct al suprafeţei trece exact câte o dreaptă din fiecare familie. Asemenea suprafeţe se numesc riglate. Se prezintă exemple de aplicare a acestor suprafeţe în arhitectură.*

Cuvinte cheie: *suprafeţe de ordinul 2, hiperboloid cu o pânză, paraboloid hiperbolic, generatoare rectilinii.*

O suprafaţă se numeşte *riglată*, dacă ea se obţine prin deplasarea unei drepte. Mulţimea tuturor dreptelor, obţinute prin această deplasare, formează o familie *de generatoare* a acestei suprafeţe. Planul este cea mai simplă suprafaţă riglată. Cu fiecare dreaptă din plan se asociază o familie de generatoare, aceasta fiind mulţimea tuturor dreptelor din plan, paralele dreptei date. Există o infinitate de asemenea familii, deci planul este o suprafaţă infinit riglată.

Din geometria elementară se cunosc două suprafeţe riglate. Acestea sunt cilindrul circular drept şi conul, mai exact, suprafeţele laterale ale lor. Pentru fiecare din ele generatoarele îşi au sensul lor obişnuit. Ambele aceste suprafeţe admit generalizări.

a) *Suprafaţa cilindrică.* Se consideră o linie arbitrară *L* într-un plan şi o dreaptă, perpendiculară acestui plan. Mulţimea tuturor dreptelor, ce trec prin punctele liniei *L*, paralel dreptei date, formează această suprafaţă cilindrică (Fig. 1). Evident, suprafaţa cilindrică este o suprafaţă riglată. În particular, dacă linia *L* este un cerc, se obţine suprafaţa cilindrului circular, care, spre deosebire de cilindrul din matematica elementară, este infinită.

b) *Suprafaţa conică*. Se consideră o linie arbitrară *L* într-un plan şi un punct *S*, care nu aparţine planului. Mulţimea tuturor dreptelor, ce trec prin *S* şi prin punctele liniei *L*, formează această suprafaţă (Fig. 2). Evident, şi această suprafaţă este o suprafaţă riglată. În particular, dacă linia *L* este un cerc, iar proiecţia lui *S* pe plan coincide cu centrul cercului, se obţine suprafaţa conică obişnuită.

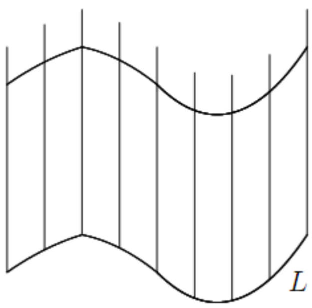

Fig. 1

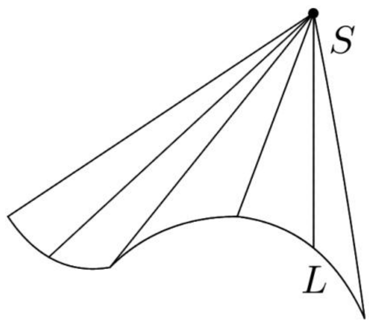

Fig. 2

Studiul suprafeţelor a luat o amploare deosebit de mare după elaborarea sistemului cartezian de coordonate în spaţiu. A devenit posibilă aplicarea multor metode algebrice, iar calculului diferenţial şi integral i-a revenit rolul principal în acest studiu. Cel mai profund au fost studiate suprafeţele de ordinul 2, adică suprafeţele determinate de ecuaţiile de gradul 2.

Printre aceste suprafeţe, numite şi *cuadrice*, cu excepţia celor amintite mai sus, se află şi două suprafeţe riglate. Acestea sunt hiperboloidul cu o pânză şi paraboloidul hiperbolic. Fiecare din ele reprezintă graficul unei ecuaţii de gradul 2 în necunoscutele x, y, z, adică o ecuaţie de forma $F(x, y, z) = 0$. Prin graficul unei ecuaţii se înţelege mulţimea tuturor punctelor din spaţiu, coordonatele (x, y, z) ale cărora satisfac aceas-tă ecuaţie.

1. **Hiperboloidul cu o pânză**, notat şi cu H1, se defineşte ca o suprafaţă, care într-un careva sistem de coordonate este determinată de ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

Oricare plan, paralel planului de coordonate *XOY*, intersectează H1 după o elipsă. Cea mai mică ellipsă este cea din planul *XOY* şi se numeşte *elipsa colier* (Fig. 3). Planele *XOZ* şi *YOZ* intersectează H1 după hiperbole. Dacă $a=b,$ hiperboloidul devine o suprafaţă de rotaţie.

Pentru a arăta, că H1 este o suprafaţă riglată, se procedează în felul următor. Ecuaţia (1) este echivalentă cu ecuaţia

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right). \qquad (2)$$

În continuare, se examinează sistemul de două ecuaţii

$$\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\[2mm] \beta\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\dfrac{y}{b}\right).\end{cases} \qquad (3)$$

Pentru început, numerele reale α şi β se consideră nenule. Ecuaţiile sistemului sunt de gradul 1, deci ele reprezintă câte un plan, iar sistemul determină o dreaptă în spaţiu. Prin înmulţirea ecuaţiilor se obţine ecuaţia (2), adică ecuaţia hiperboloidului. Aceasta înseamnă, că dreapta, determinată de (3), aparţine în întregime suprafeţei H1.

Afirmaţia este adevărată şi în cazul, în care unul din numerele $\alpha,\ \beta$ este nul. Fie $\alpha=0,\ \beta\neq 0$. Din pri-ma ecuaţie a sistemului rezultă $y=b$. Din ecuaţia a doua se află $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0.$ Sistemul de ecuaţii $y=b$ şi $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0$ de asemenea reprezintă o dreaptă, care aparţine suprafeţei H1.

Este adevărată şi afirmaţia inversă: pentru oricare punct (x_0, y_0, z_0) de pe H1 există numerele reale α şi β astfel încât dreapta determinată de (3) conţine acest punct. Asemenea drepte se numesc *generatoare rectilinii* ale suprafeţei. Astfel, hiperboloidul cu o pânză este o suprafaţă riglată. Mulţimea tuturor genera-toarelor rectilinii, determinate de (3) pentru oricare pereche de numere reale α şi β, care satisfac condiţia $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, se notează cu L_1 (Fig. 4). Oricare două drepte din L_1 nu se intersectează.

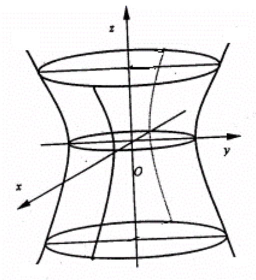

Fig. 3

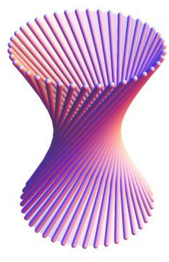
Fig. 4

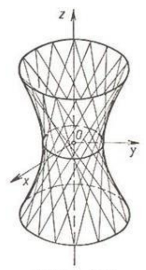

Fig. 5

Pe H1 mai există încă o familie de asemenea generatoare. Pentru ecuaţia (2) se mai examinează un sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases}\lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\mu\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\[2mm] \mu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases}$$

care conduce la altă familie de generatoare, L_2. Prin fiecare punct al suprafeţei H1 trece câte o dreaptă din fiecare clasă L_1, L_2 (Fig. 5). Alte clase de asemenea drepte nu mai există. Astfel, hiperboloidul cu o pânză este o suprafaţă dublu riglată.

Oricare generatoare din L_1 (respectiv, din L_2) intersectează elipsa colier într-un punct. Prin acest punct trece planul tangent la suprafaţa H1, care este perpendicular planului *XOY* şi care conţine cele două generatoare. Intersecţia acestui plan cu H1 determină aceste generatoare. Astfel, generatoarele rectilinii pot fi determinate şi ca intersecţia planelor tangente la H1 prin punctele elipsei colier.

2. Paraboloidul hiperbolic este suprafaţa, care într-un careva sistem de coordonate este determinată de ecuaţia

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{4}$$

Geometric, paraboloidul hiperbolic, notat de obicei cu PH, reprezintă o suprafaţă în formă de şa (Fig. 6). Ca şi H1, această suprafaţă este dublu riglată. Pentru a arăta acest lucru, ecuaţia (4) se reprezintă sub forma echivalentă

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1 \cdot z.$$

(5)

Pentru oricare două numere reale nenule α şi β se examinează sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \beta \cdot 1, \\ \beta\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \alpha z. \end{cases}$$

Două ecuaţii de gradul 1 determină două plane, iar sistemul lor determină o dreaptă. Dacă un triplet de numere reale satisface ecuaţiile sistemului, atunci el satisface şi ecuaţia (4). Astfel, oricare dreaptă, determinată de acest sistem, aparţine în întregime suprafeţei paraboloidului hiperbolic. Fie L_1 mulţimea tuturor acestor drepte. Oricare două drepte distincte din L_1 nu se intersectează. Mai mult, prin oricare punct al suprafeţei PH trece exact câte o dreaptă din L_1. Prin urmare, suprafaţa PH este o suprafaţă riglată.

Pentru aceeaşi suprafaţă PH mai există o familie de generatoare rectilinii. Pentru oricare numere reale λ şi μ se mai examinează un sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \mu z, \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \lambda \cdot 1. \end{cases}$$

Ca şi în cazul precedent, acest sistem mai determină o familie de generatoare rectilinii, notată cu L_2. Prin fiecare punct al suprafeţei PH trece câte o dreaptă din fiecare familie L_1, L_2 (Fig. 7). Astfel, suprafaţa paraboloidului hiperbolic este o suprafaţă dublu riglată.

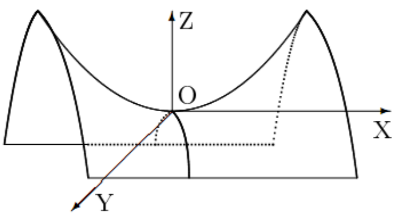

Fig. 6

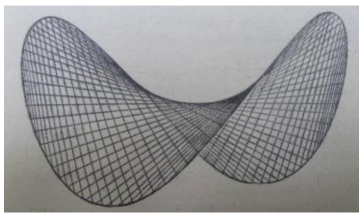
Fig. 7

3. Unele aplicaţii în arhitectură. Caracterul riglat al hiperboloidului cu o pânză şi al paraboloidului hiperbolic şi-a găsit o serie de aplicaţii în arhitectură şi construcţii. Pentru prima oară această idee a fost propusă de inginerul rus V. Şuhov, care a proiectat şi construit (1896) un turn cu înălţimea de 37m pentru expoziţia din Nijnii Novgorod (Fig.8, a)). Partea hiperboloidului constituie 25 m. În această construcţie barele metalice erau în poziţia generatoarelor rectilinii ale unui hiperboloid (de rotaţie) cu o pânză. O asemenea construcţie este uşoară şi durabilă. A urmat apoi turnul radio din Moscova cu o înălţime de 150 m (1922). Iniţial, turnul era proiectat pentru o înălţime de 350 m, care a fost redusă din cauza lipsei de oţel calitativ. Ideea folosirii suprafeţelor riglate s-a răspândit în toată lumea. Forma suprafeţei H1 se foloseşte în diverse construcţii: turnuri TV, faruri în porturile maritime, coşuri la centralele termice şi electrice, construcţii decorative etc. În Fig. 8, b) este imaginea farului din Adziogol (Ucraina), în delta Niprului, de asemenea, proiectat de V. Şuhov în 1911 (70 m). Farul din Kobe (Fig. 8, c)) a fost construit în 1963 (108 m). Turnul din Huancijou (China) a fost construit în 2010 pentru festivitatea de deschidere a unor competiţii sportive de amploare din Asia (Fig. 8, d)) şi are o înălţime impunătoare de 600 m.

Suprafaţa paraboloidului hiperbolic de asemenea şi-a găsit aplicaţii, mai ales, pentru acoperişurile diferitor edificii – de la construcţii mici până la stadioane. În Fig. 8, e) este reprezentată clădirea unei mici gări auto, situată în Polonia. Acestea şi multe alte asemenea construcţii au legătură directă cu arhitectura moder-nistă a anilor 70, iniţiată de Oscar Niemeyer.

a) b) c) d)

e)

Fig. 8

Bibliografie :

1. Н.В. Ефимов, *Краткий курс аналитической геометрии.* М., Наука, 1969.