МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Владимир ВЕРЕТКО

Департамент Программная Инженерия и Автоматика, группа TI-231M, Факультет Вычислительной Техники, Информатики и Микроэлектроники, Технический Университет Молдовы, Кишинев, Молдова

Автор корреспондент: Владимир ВЕРЕТКО, email: vladimir.veretco@isa.utm.md

Научный руководитель **Галина МАРУСИК**, PhD, DISA, UTM

Аннотация. *В статье рассмотрены основные методы анализа и моделирования отрезков временных рядов метеорологических величин. К ним относят метод полиномиальной аппроксимации, разложение вектора по собственным векторам ковариационной матрицы и метод периодических составляющих. Приведены описания этих методов на примере их использования в процессе обработки климатических данных. В ходе сравнительного анализа полученных результатов был сделан вывод о применимости данных методов при построении математических моделей и составлении долгосрочных прогнозов. В качестве исходных данных были взяты временные ряды значений приземной температуры воздуха, полученные за период наблюдений.*

Ключевые слова: *Временной ряд, аппроксимация, собственный вектор, ковариационная матрица, периодические составляющие.*

Введение

Временной ряд определяется как расположенные в хронологической последовательности данные измерений одной или нескольких величин и включает в себя два элемента - отметку времени вдоль оси X и значение величины ряда вдоль оси Y, соответствующее указанной отметке времени. В качестве показателя времени в рядах могут указываться как периоды наблюдений, так и отдельные моменты времени. Временной ряд характеризуется длиной, то количеством входящих в него уровней, где уровень - каждое новое наблюдение [1].

С применением ограниченного объема информации - временного ряда конечной длины - исследования дают возможность описать функцию, порождающую ряд, проанализировать его структуру и предсказать будущее поведение величины ряда на основании ее прошлых значений.

Временной ряд приземной температуры воздуха может быть получен с помощью автоматической метеорологической станции, собирающей и отправляющей данные в режиме реального времени или осуществляющей сохранение их в целях последующего восстановления [2]. Также они поступают в центры обработки данных, где используются метеорологами для составления долгосрочных прогнозов погоды и учеными для изучения климатических изменений в мире.

К основным математическим методам моделирования временных рядов относят метод полиномиальной аппроксимации, метод разложения ряда по собственным векторам ковариационной матрицы, а также метод моделирования временного ряда с помощью периодических составляющих.

Метод полиномиальной аппроксимации

Метод полиномиальной аппроксимации состоит в замене значений временного ряда функцией в виде полинома выбранной степени (Ур. (1)).

$$y(t_i) = a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \cdots + a_m t_i^m + \varepsilon \qquad (1)$$

В ходе аппроксимации определяется функция, график которой представляет собой гладкую непрерывную кривую, при этом не обязательно проходящую через все узловые точки, но наилучшим образом соответствующую им. Для экспериментальных данных, полученных в результате измерений, применяется сглаживание случайных ошибок. Коэффициенты искомой математической модели находятся из минимизации целевой функции (Ур. (2)):

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = min \qquad (2)$$

В качестве исходных данных был выбран временной ряд среднесуточной приземной температуры воздуха за март этого года [3]. В ходе аппроксимации временного ряда был получены следующие результаты (Рис. 1):

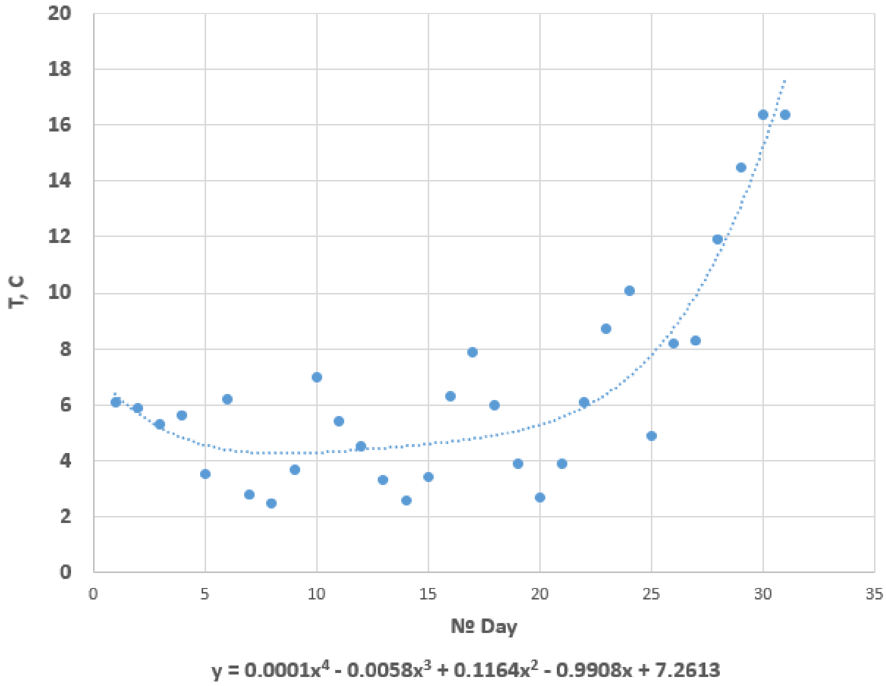

Рисунок 1. График среднесуточных температур воздуха в Кишиневе за март 2024 г.

В качестве аппроксимирующей функции был выбран многочлен четвертой степени. С увеличением степени многочлена погрешность при аппроксимации убывает. Синяя линия, представляющая собой график полиномиальной функцией, является линией тренда и указывает общую динамику среднесуточных температур в марте. При этом в отдельные сутки температура может значительно отличаться от линии тренда как в большую, так и в меньшую сторону.

Разложение временного ряда по собственным векторам

Метод разложения временного ряда по собственным векторам ковариационной матрицы включает в себя нескольких этапов, а именно генерирование ансамбля временных радов, составление ковариационной матрицы, расчет собственных значений и векторов матрицы для построения графика математической модели [4].

Собственный вектор матрицы обладает данной особенностью (Ур. 3), где l - собственное значение матрицы, являющееся действительным числом:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{3}$$

При этом ковариационная матрица *A* представляет собой матрицу, составленную из попарных ковариаций элементов случайных векторов. В случае, если вектор состоит из одной величины, ковариационная матрица показывает дисперсию этой случайной величины [5].

Для построения математической модели был выбран ансамбль временных рядов среднесуточной приземной температуры воздуха в Кишиневе первой недели марта за последние пять лет (Таблица 1).

Таблица 1

Среднесуточная температура воздуха в период 1 - 7 марта разных лет

Дата	**2020 г.**	**2021 г.**	**2022 г.**	**2023 г.**	**2024 г.**
01. 03	5.1	1.2	0.3	2.3	6.1
02. 03	6.4	4.5	-0.3	2.1	5.9
03. 03	11.0	5.7	0.4	2.5	5.3
04. 03	12.5	5.9	1.6	4.2	5.6
05. 03	7.7	8.5	-0.1	3.1	3.5
06. 03	7.8	1.6	-0.1	3.6	6.2
07. 03	10.3	-0.5	-0.6	4.9	2.8

Приведены вычисления собственных векторов и значений ковариационной матрицы, составленной на основе ансамбля временных рядов (Рис. 2), при этом собственные значения располагаются в порядке возрастания.

Собственные значения	1.67	6.17	9.5
Собственные вектора	0.27	-4.26	-8.36
	0.12	2.06	-17.68
	0.41	-0.26	-2.24
	-0.25	-1.7	0.32
	1	1	1

Рисунок 2. Собственные значения и вектора ковариационной матрицы

На основе матрицы, полученной из собственных векторов, была построена модель временного ряда. Точность модели увеличивается с увеличением размера ансамбля исходных временных рядов, а также количества уровней в каждом из них.

Метод периодических составляющих

Метод периодических составляющих применяется в случае периодических колебаний значений временного ряда и может включать в себя как одну, так и несколько компонент, образующих математическую модель. Компонентой (сезонной составляющей) называют величину временного ряда, описывающую изменяющуюся часть всего объема данных. Каждая компонента представляет собой синусоиду и задается уравнением гармонических колебаний (Ур. 4):

$$y = A * sin(\varphi_0 + \omega t) + b \tag{4}$$

, где *A* - амплитуда колебаний, j_0 - начальная фаза, w - циклическая частота, показывающая количество колебаний за единицу времени [6].

При использовании метода были взяты данные среднемесячных температур за 2022 - 2023 год [7], описывающие сезонные колебания приземной температуры воздуха в течение года и, с небольшой погрешностью, являющиеся циклическими (Рис. 3). Одно из преимуществ данного метода – возможность составления долгосрочных прогнозов погоды на большой период времени.

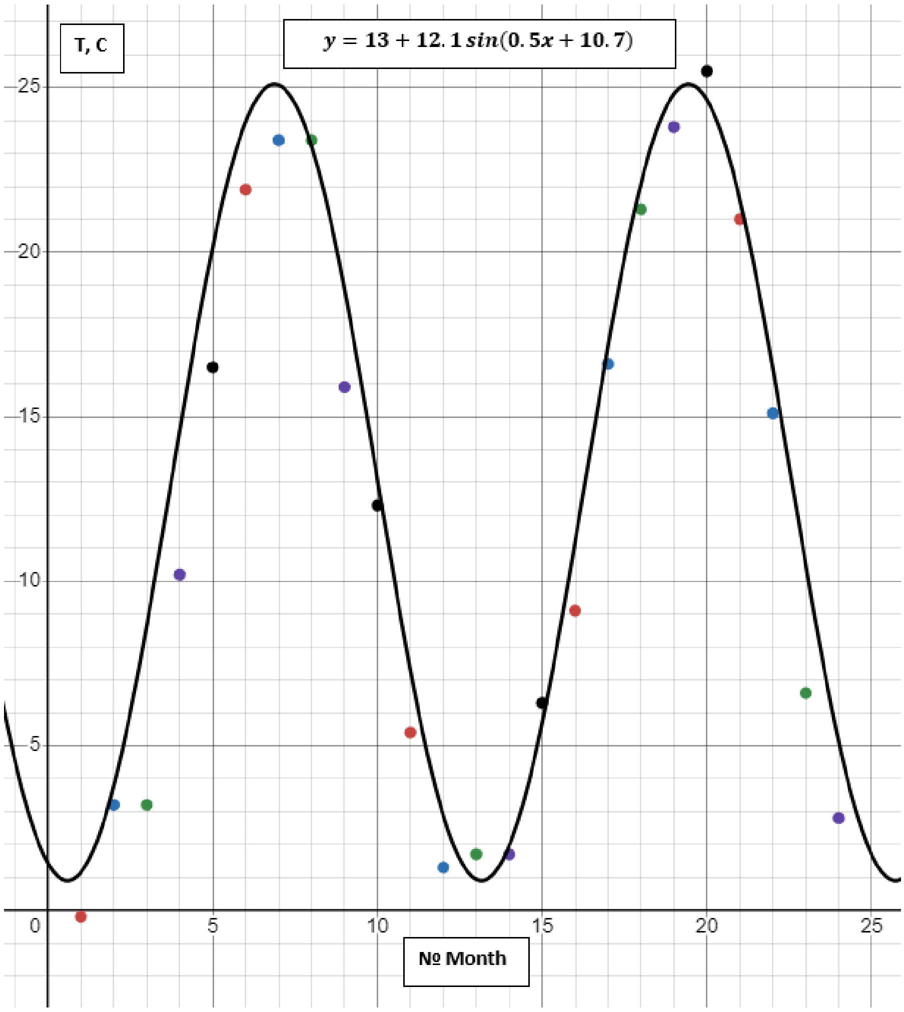

Рисунок 3. Математическая модель сезонных колебаний температуры воздуха

Выводы

Математические методы моделирования временных рядов, рассмотренные в данной статье, играют существенную роль в анализе климатических данных, позволяя получить модель их поведения на протяжении длительного периода времени. На ее основе возможно с высокой степенью точности составить долгосрочный прогноз без учета текущих характеристик погоды.

Важно, чтобы была возможность выбора нескольких методов для составления данной модели. В первом варианте был использован лишь один реальный временной ряд и была определены степень полинома для аппроксимации. При использовании метода разложения вектора по собственным векторам ковариационной матрицы предварительно потребовалось создать ансамбль временных рядов и провести расчет вспомогательных характеристик. Метод периодических составляющих предполагал представление временного ряда в виде функции гармонических колебаний.

Было выявлено, что у каждого из методов есть свои особенности. Так, метод полиномиальной аппроксимации обладает меньшей чувствительностью к аномальным значениям временного ряда при небольшой степени полинома. Метод с использованием ковариационной матрицы наиболее сложен, поскольку реализуется поэтапно и требует генерацию дополнительных ансамблей временных рядов. В то же время метод периодических составляющих применим исключительно к временным рядам с большой длиной и сезонным трендом.

Библиография

[1] Т.В. Саженкова, И.В. Пономарѐв, С.П. Пронь, “Методы анализа временных рядов,” *Издательство Алтайского Государственного университета*, Барнаул, 2020.

[2] К. Л. Восканян, “Исследование статистических характеристик временных рядов значений приземной температуры воздуха,” *Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук*, Санкт-Петербург, 2013.

[3] “Монитор погоды в Кишиневе,” [Онлайн]. Доступно: http://www.pogodaiklimat.ru/monitor.php?id=33815&month=3&year=2023.

[4] К. Л. Восканян, Т. И. Иванова, А. Д. Кузнецов, О. С. Сероухова, “К вопросу о математическом моделировании временных рядов приземной температуры воздуха,” *Российский Государственный Гидрометеорологический университет*, 2017.

[5] Г. М. Чечин, М. Ю. Захцер, “Собственные значения и собственные векторы матриц,” *Издательство Ростовского Государственного университета*, Ростов-на-Дону, 2006.

[6] Ю. Ф. Пугачев, “Колебания и волны,” *Ульяновское высшее авиационное училище*, Ульяновск, 2004.

[7] “Национальное бюро статистики Республики Молдова,” [Онлайн]. Доступно: https://statbank.statistica.md/PxWeb/pxweb/ro/10%20Mediul%20inconjurator/?rxid=b2ff27d7-0b96-43c9-934b-42e1a2a9a774.