

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Cu titlu de manuscris

C.Z.U.: 624.04:539.3/.6:517(043.3)

GALBINEAN SERGIU

**CALCULUL PLĂCILOR PRIN METODA ELEMENTELOR
DE FRONTIERĂ BAZATĂ PE SOLUȚII DISCONTINUE**

135.02. MECANICA CORPULUI SOLID

Teză de doctor în științe inginerești

Conducători științifici:

Moraru Gheorghe, doctor habilitat în
științe fizico-matematice, profesor
universitar

Șeremet Victor, doctor habilitat în
științe fizico-matematice, profesor
universitar

Autor:

Galbinean Sergiu

CHIȘINĂU, 2024

©Galbinean Sergiu, 2024

CUPRINS

ADNOTARE	5
LISTA TABELELOR	8
LISTA FIGURILOR	8
LISTA ABREVIERILOR	12
INTRODUCERE	13
1. ECUAȚIILE DE BAZĂ PENTRU PLĂCI CONFORM TEORIEI CLASICE ȘI A TEORIEI LUI REISSNER.....	16
1.1. Dezvoltarea teoriei de calcul a plăcilor.....	16
1.2. Teoria clasică a plăcilor	19
1.2.1. Deplasări și deformații în plăcile subțiri la încovoiere	20
1.2.2. Tensiuni în plăcile subțiri la încovoiere	21
1.2.3. Ecuația diferențială a suprafeței mediane deformate a plăcii plane	26
1.2.4. Eforturile interne în placa deformată	26
1.2.5. Formularea condițiilor la limită	30
1.2.6. Eforturi secționale în placa de contur curbiliniu	33
1.2.7. Puncte de colț	35
1.3. Teoria Reissner a încovoierii plăcilor	38
1.3.1. Introducerea ecuațiilor de bază în teoria lui Reissner	39
1.3.2. Formularea condițiilor la limită în teoria generalizată (Reissner).....	45
1.4. Concluzii la Capitolul 1	46
2. METODE NUMERICE DE CALCUL	47
2.1. Metoda elementelor finite	47
2.2. Metoda elementelor de frontieră	51
2.2.1. Istoria dezvoltării metodei elementelor de frontieră	51
2.2.2. Metoda directă a elementelor de frontieră pentru plăci.....	52
2.2.3. Metoda indirectă a elementelor de frontieră pentru plăci. Metoda extinderii sistemului dat.	55
2.3. Concluzii la capitolul 2	61
3. SOLUȚII DISCONTINUE PENTRU PLĂCI.....	62
3.1. Soluții discontinue în teoria clasică a plăcilor	62
3.1.1. Soluții provenite din salturi concentrate	62
3.1.2. Soluții discontinue pentru placa de contur arbitrar.	67

3.1.3. Implementarea numerică a soluțiilor discontinue în teoria clasică a plăcilor.	69
3.1.4. Calculul integralelor pe frontieră.	74
3.1.5. Transformarea sistemelor de coordonate.	76
3.1.6. Exemple de calcul a plăcilor dreptunghiulare în teoria clasică folosind soluțiile discontinue	78
3.1.7. Exemplu de calcul a plăcilor cu defect.....	94
3.1.8. Exemplu de calcul a plăcii având condiții de rezemare mixte pe contur.	95
3.1.9. Exemple de calcul a plăcilor circulare în teoria clasică folosind soluțiile discontinue	97
3.1.10. Exemple de calcul a plăcilor de contur arbitrar în teoria clasică folosind soluțiile discontinue	108
3.2. Soluții discontinue în teoria plăcilor ținând cont de deformațiile transversale de forfecare.	115
3.2.1. Soluții provenite din salturi concentrate.....	115
3.2.2. Implementarea numerică a soluțiilor discontinue în teoria plăcilor ținând cont de deformațiile transversale	124
3.2.3. Exemple de calcul a plăcilor plane în teoria ce ține cont de deformațiile transversale de forfecare (Reissner) folosind soluțiile discontinue.....	128
3.3. Concluzii la capitolul 3	130
CONCLUZII GENERALE.....	131
RECOMANDĂRI	131
BIBLIOGRAFIE	132
ANEXE.....	144
Anexa 1. Transformarea Fourier generalizată	144
Anexa 2. Soluții discontinue pentru ecuația Laplace.....	146
Anexa 3. Program la calculator.....	149
DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII.....	160
CV-ul CANDIDATULUI.....	161

ADNOTARE

Galbinean Sergiu

Calculul plăcilor prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue

Teză de doctor în științe tehnice

Chișinău, 2024

Structura tezei: este compusă din introducere, trei capitole, concluzii generale, recomandări, bibliografie din 158 de titluri, 3 anexe, 120 de pagini de text de bază, 128 de figuri, 12 tabele. Rezultatele obținute sunt publicate în 8 lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: plăci, metoda elementelor de frontieră, soluții discontinue, funcții Green.

Scopul lucrării: constă în obținerea și aplicarea soluțiilor discontinue în metoda elementelor de frontieră pentru calculul plăcilor plane.

Obiectivele cercetării: obținerea soluțiilor discontinue la calculul plăcilor plane cu diferite moduri de rezemare, încărcări, defecte etc.; rezolvarea integralelor de frontieră; implementarea numerică a soluțiilor discontinue; elaborarea programelor de calcul; validarea aplicativă a metodei propuse.

Noutatea și originalitatea științifică: MEFr bazată pe soluții discontinue reprezintă o abordare nouă în mecanica corpului solid. Utilizând soluțiile discontinue pot fi rezolvate probleme pentru care metodele existente nu au soluții sau o exactitate satisfăcătoare, cum ar fi: plăci de contur arbitrar, prezența defectelor, condiții mixte la frontieră, probleme de contact, domenii infinite etc.

Rezultatele obținute care contribuie la soluționarea unei probleme științifice: constă în elaborarea și implementarea numerică a soluțiilor discontinue în MEFr, fapt ce a permis la rezolvarea unui spectru larg de probleme ale încovoierii plăcilor plane.

Semnificația teoretică: MEFr bazată pe soluții discontinue permite de a rezolva nu doar probleme ale plăcilor plane, dar poate fi aplicată și pentru alte tipuri de elemente, cum ar fi: plăci curbe, plăci în stare de tensiune sau deformație plană, membrane, corpuri tridimensionale etc.

Valoarea aplicativă: Rezultatele obținute cu ajutorul soluțiilor discontinue au fost validate prin compararea cu metodele analitice de calcul și cu MEF.

Implementarea rezultatelor științifice: Rezultatele cercetărilor au fost aplicate în cadrul proiectului de cercetare științifică cu titlul: „Calculul plăcilor prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue”. Director de proiect: Moraru Gh. Perioada de realizare: 2011-2014.

АННОТАЦИЯ

Сергей Галбинян

Расчет плит методом граничных элементов на основе разрывных решений

Докторская диссертация по техническим наукам

Кишинев, 2024 г.

Структура диссертации: состоит из введения, трех глав, общих выводов, рекомендаций, библиографии из 158 наименований, 3 приложений, 120 страниц основного текста, 128 рисунков, 12 таблиц. Полученные результаты опубликованы в 8 научных статьях.

Ключевые слова: плиты, метод граничных элементов, разрывные решения, функции Грина.

Цель работы: состоит в получении и применении разрывных решений в методе граничных элементов для расчета плоских плит.

Задачи исследования: получение разрывных решений для расчета плоских пластин с различными способами опирания, загрузки, дефектами и т. д.; решение граничных интегралов; численная реализация разрывных решений; разработка расчетных программ; практическое подтверждение предложенного метода.

Научная новизна и оригинальность: МГЭ на основе разрывных решений представляет собой новый подход в механике твёрдого тела. С помощью разрывных решений можно решать задачи, для которых существующие методы не имеют решений или удовлетворительной точности, такие как: плиты произвольного контура, наличие дефектов, смешанные краевые условия, контактные задачи, бесконечные области и т.д.

Полученные результаты которые способствуют решению научной задачи: заключаются в разработке и численной реализации разрывных решений в МГЭ, что позволило решить широкий спектр задач изгиба плоских пластин.

Теоретическая значимость: МГЭ на основе разрывных решений позволяет решать не только задачи плоских пластин, но также может быть применено и для других типов элементов, например: оболочки, пластины в плоской напряжении или деформации, мембраны, трёхмерные тела и т.д.

Прикладное значение: Результаты, полученные с помощью разрывных решений, подтверждены сравнением с аналитическими методами расчета и МКЭ.

Внедрение научных результатов: Результаты исследований были применены в научно-исследовательском проекте: «Расчет плит методом граничных элементов на основе разрывных решений». Руководитель проекта: Морару Г. Срок реализации: 2011-2014 г.

ANNOTATION

Sergiu Galbinean

Plate analysis with boundary element method based on discontinuous solutions

Doctoral thesis in technical sciences

Chisinau, 2024

Structure of the thesis: it is composed of introduction, three chapters, general conclusions, recommendations, bibliography of 158 titles, 3 annexes, 120 pages of basic text, 128 figures, 12 tables. The obtained results are published in 8 scientific papers.

Keywords: plate, boundary element method, discontinuous solutions, Green's functions.

The purpose of the work: consists in obtaining and applying discontinuous solutions in the boundary element method for plate analysis.

Research objectives: to obtain discontinuous solutions for the analysis of plates with different support modes; loads, defects etc.; to solve boundary integrals; the numerical implementation of discontinuous solutions; the development of calculation programs; practical validation of the proposed method.

Scientific novelty and originality: BEM based on discontinuous solutions represents a new approach in mechanics of solid body. Using the discontinuous solutions, we can solve such problems for which the existing methods do not have solutions or a satisfactory accuracy, such as: plates of arbitrary shape, presence of defects, mixed boundary conditions, contact problems, infinite domains etc.

The obtained results that contribute to the solution of a scientific problem: consists in the development and numerical implementation of discontinuous solutions in BEM, that allowed to solve a large spectrum of plate bending problems.

Theoretical significance: BEM based on discontinuous solutions can solve not only plate bending problems, but can also be applied to other types of elements, such as: curved plates, plates in plane state of tension or deformation, membranes, three-dimensional bodies etc.

Applicative value: The obtained result using discontinuous solutions were validated by comparing with analytical methods and FEM.

Implementation of the scientific results: The research results were applied in the scientific research project with the title: "Plate analysis with boundary element method based on discontinuous solutions". Project manager: Moraru Gh. Implementation period: 2011-2014.

LISTA TABELELOR

Tabelul 3.1. Deplasări, eforturi și devieri pentru placa simplu rezemată.	81
Tabelul 3.2. Deplasări, eforturi și devieri pentru placa simplu rezemată.	84
Tabelul 3.3. Deplasări, eforturi și devieri pentru placa încastrată.	87
Tabelul 3.4. Deplasări, eforturi și devieri pentru placa încastrată.	90
Tabelul 3.5. Rezultate pentru placa cu diferite moduri de rezemare.	93
Tabelul 3.6. Rezultate pentru placa circulară simplu rezemată.	101
Tabelul 3.7. Rezultate pentru placa circulară încastrată.	103
Tabelul 3.8. Rezultate pentru placa circulară cu diferite moduri de rezemare.	105
Tabelul 3.9. Rezultate pentru placa încastrată acționată de o forță excentrică.	108
Tabelul 3.10. Rezultate pentru placa cu contur neregulat.	110
Tabelul 3.11. Valorile săgeții W pentru o placa de contur arbitrar de la o forță concentrată.	113
Tabelul 3.12. Valorile deplasărilor verticale W pentru o placa de contur arbitrar de la o sarcină uniform distribuită.	114

LISTA FIGURILOR

Fig. 1.1. Deplasarea orizontală u și verticală w a punctului C de pe normală.	20
Fig. 1.2. Variația tensiunilor după grosimea plăcii.	24
Fig. 1.3. Variația tensiunilor σ_z pe grosimea plăcii.	25
Fig. 1.4. Eforturi în placă.	27
Fig. 1.5. Fâșie de placă.	28
Fig. 1.6. Direcțiile de acțiune ale eforturilor.	29
Fig. 1.7. Placă cu diferite moduri de rezemare.	31
Fig. 1.8. Substituirea momentului de torsiune M_{yx} cu un cuplu de forțe.	32
Fig. 1.9. Transformarea tensiunilor dintr-un sistem de coordonate în altul.	33
Fig. 1.10. Eforturile pe frontiera curbilinie.	34
Fig. 1.12. Reacțiuni în colțurile plăcii.	37
Fig. 1.13. Variația tensiunilor pe grosimea plăcii.	40
Fig. 1.14. Placă dreptunghiulară având diferite moduri de rezemare.	45
Fig. 2.1. Tipuri de elemente finite.	48
Fig. 2.2. Element finit triunghiular.	48
Fig. 2.3. Contur arbitrar de placă solicitat de o forță unitară concentrată.	53

Fig. 2.4. Soluții fundamentale.	54
Fig. 2.5. Diferite tipuri de elemente de frontieră: constante (a); liniare (b); parabolice (c).	55
Fig. 2.6. Sarcini echivalente aplicate pe conturul plăcii.	56
Fig. 2.7. Placă sollicitată de forțe concentrate.	57
Fig. 3.1. Placă infinită cu defect.	62
Fig. 3.2. Saltul funcției f la trecerea prin defect.	63
Fig. 3.3. Sisteme de coordonate locale amplasate pe defectul L	68
Fig. 3.4. Placă de contur arbitrar având diferite moduri de rezemare.	69
Fig. 3.5. Cazuri de încărcare a plăcilor.	71
Fig. 3.6. Poziția punctului interior în raport cu elementele de frontieră constante.	73
Fig. 3.7. Sistemul global și local de coordonate.	75
Fig. 3.8. Coordonatele nodurilor elementelor în sistemul global.	76
Fig. 3.9. Coordonatele nodului i^m în sistemul de coordonate local cu centrul în nodul j^m	77
Fig. 3.10. Placă discretizată: a) MEFr; b) MEF.	78
Fig. 3.11. Placă pătrată, simplu rezemată pe toate laturile.	79
Fig. 3.12. Schema de calcul a plăcii pentru metoda analitică.	79
Fig. 3.13. Câmpul deplasărilor verticale w în placa simplu rezemată pe toate laturile, prezentat pe schema deformată.	79
Fig. 3.14. Câmpul momentului de încovoiere M_x în placa simplu rezemată pe toate laturile.	79
Fig. 3.15. Câmpul momentului de torsiune M_{xy} în placa simplu rezemată pe toate laturile.	80
Fig. 3.16. Câmpul forței transversale Q_x în placa simplu rezemată pe toate laturile.	80
Fig. 3.17. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$	81
Fig. 3.18. Momentul de încovoiere M_x pe secțiunea centrală $y = 0$	81
Fig. 3.19. Placă pătrată, simplu rezemată pe toate laturile.	82
Fig. 3.20. Schema de calcul a plăcii pentru metoda analitică.	82
Fig. 3.21. Câmpul deplasărilor verticale w în placa simplu rezemată pe toate laturile prezentat pe schema deformată.	82
Fig. 3.22. Câmpul momentului M_x în placa simplu rezemată pe toate laturile.	82
Fig. 3.23. Câmpul momentului M_{xy} în placa simplu rezemată pe toate laturile.	83
Fig. 3.24. Câmpul forței transversale Q_x în placa simplu rezemată pe toate laturile.	83
Fig. 3.25. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$	84
Fig. 3.26. Momentul de încovoiere M_x pe secțiunea centrală $y = 0$	84
Fig. 3.27. Placă pătrată, încastrată.	85
Fig. 3.28. Schema de calcul a plăcii pentru metoda analitică.	85

Fig. 3.29. Câmpul deplasării verticale w în placa încastrată pe toate laturile.	85
Fig. 3.30. Câmpul momentului încovoietor M_x în placa încastrată pe toate laturile.	85
Fig. 3.31. Câmpul momentului de torsiune M_{xy} în placa încastrată pe toate laturile.	
Fig. 3.32. Câmpul forței transversale Q_x în placa încastrată pe toate laturile.....	85
Fig. 3.33. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$	87
Fig. 3.34. Momentul de încovoiere M_y pe marginea $y = \pm b/2$	87
Fig. 3.35. Placă pătrată încastrată pe toate laturile.	88
Fig. 3.36. Schema de calcul a plăcii pentru metoda analitică.....	88
Fig. 3.37. Câmpul deplasării verticale w în placa încastrată pe toate laturile.	88
Fig. 3.38. Câmpul momentului încovoietor M_x în placa încastrată pe toate laturile.	88
Fig. 3.39. Câmpul momentului de torsiune M_{xy} în placa încastrată pe toate laturile.	
Fig. 3.40. Câmpul forței transversale Q_x în placa încastrată pe toate laturile.....	88
Fig. 3.41. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$	89
Fig. 3.42. Momentul de încovoiere M_y pe marginea $y = \pm b/2$	89
Fig. 3.43. Placă pătrată având diferite moduri de rezemare.	90
Fig. 3.44.Schema de calcul a plăcii pentru metoda analitică.....	90
Fig. 3.44. Câmpul deplasării verticale w în placa cu diferite condiții de rezemare.....	90
Fig. 3.45. Câmpul momentului încovoietor M_x în placa cu diferite condiții de rezemare.....	90
Fig. 3.46. Câmpul momentului încovoietor M_y în placa cu diferite condiții de rezemare.	91
Fig. 3.47. Câmpul momentului de torsiune M_{xy} în placa cu diferite condiții de rezemare.....	91
Fig. 3.48. Câmpul forței transversale Q_x în placa cu diferite condiții de rezemare.....	91
Fig. 3.49. Câmpul forței transversale Q_y în placa cu diferite condiții de rezemare.....	91
Fig. 3.50. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$	92
Fig. 3.51. Săgeata w pe secțiunea centrală $x = 0$	92
Fig. 3.52. Momentul de încovoiere M_x pe secțiunea centrală $y = 0$	93
Fig. 3.53. Momentul de încovoiere M_y pe secțiunea centrală $x = 0$	93
Fig. 3.54. Placă încastrată cu defect.	94
Fig. 3.55. Schema discretizării conturului plăcii cu defect.	94
Fig. 3.56. Câmpul deplasărilor verticale w în placa cu defect [m].....	94
Fig. 3.57. Câmpul tensiunilor normale σ_x în placa cu defect [kPa].....	94
Fig. 3.58. Câmpul tensiunilor normale σ_y în placa cu defect [kPa].....	95
Fig. 3.59. Câmpul tensiunilor tangențiale τ_{xy} în placa cu defect [kPa].....	95
Fig. 3.60. Câmpul tensiunilor tangențiale τ_{xz} în placa cu defect [kPa].....	95
Fig. 3.61. Câmpul tensiunilor tangențiale τ_{yz} în placa cu defect [kPa].....	95

Fig. 3.62. Placă pătrată având condiții mixte pe contur.	96
Fig. 3.63. Schema discretizării conturului plăcii având condiții mixte.	96
Fig. 3.64. Câmpul deplasărilor verticale w în placă având condiții mixte pe contur [m].....	96
Fig. 3.65. Momentul M_x în placă având condiții mixte pe contur [kNm/m].	96
Fig. 3.66. Momentul M_y în placă având condiții mixte pe contur [kNm/m].	96
Fig. 3.67. Momentul M_{xy} în placă având condiții mixte pe contur [kNm/m].	96
Fig. 3.68. Forța transversală Q_x în placă având condiții mixte pe contur [kN/m].	97
Fig. 3.68*. Forța transversală Q_y în placă având condiții mixte pe contur [kN/m].	97
Fig. 3.69. Transformarea coordonatelor carteziene în polare.	98
Fig. 3.70. Placă circulară încărcată cu o sarcină distribuită pe o fâșie inelară.	98
Fig. 3.71. Placă circulară discretizată: a) MEFr; b) MEF.	99
Fig. 3.72. Placă circulară simplu rezemată, încărcată cu o forță concentrată la centru.	99
Fig. 3.73. Câmpul deplasărilor verticale w în placa circulară simplu rezemată.	99
Fig. 3.74. Câmpul momentului radial M_r în placa circulară simplu rezemată.	100
Fig. 3.75. Câmpul forței transversale radiale Q_r în placa circulară simplu rezemată.	100
Fig. 3.76. Săgeata w pe o secțiune radială.	100
Fig. 3.77. Momentul radial M_r pe o secțiune radială.	101
Fig. 3.78. Placă circulară încastrată, încărcată cu sarcină uniform distribuită pe toată suprafața.	102
Fig. 3.79. Câmpul deplasărilor verticale w în placa circulară încastrată.	102
Fig. 3.80. Câmpul momentului radial M_r în placa circulară încastrată.	102
Fig. 3.81. Câmpul forței transversale radiale Q_r în placa circulară încastrată.	102
Fig. 3.82. Săgeata w pe o secțiune radială.	103
Fig. 3.83. Momentul radial M_r pe o secțiune radială.	103
Fig. 3.84. Placă circulară simplu rezemată, încărcată cu o forță concentrată la centru.	104
Fig. 3.86. Câmpul momentului radial M_r în placa circulară având jumătate de contur încastrată, iar cealaltă simplu rezemată.	104
Fig. 3.85. Câmpul deplasărilor verticale w în placa circulară având jumătate de contur încastrată, iar cealaltă simplu rezemată.	104
Fig. 3.87. Câmpul forței tăietoare Q_r în placa circulară având jumătate de contur încastrată, iar cealaltă simplu rezemată.	104
Fig. 3.88. Săgeata w pe secțiunea centrală $x = 0$	105
Fig. 3.89. Momentul radial M_r pe secțiunea centrală $x = 0$	105
Fig. 3.90. Placă circulară încastrată, încărcată cu o forță excentrică.	107

Fig. 3.91. Câmpul deplasărilor verticale w în placa circulară încastrată, încărcată cu o forță excentrică.....	107
Fig. 3.92. Săgeata w pe secțiunea $\theta = 0$	107
Fig. 3.93. Placă de formă combinată dintr-un dreptunghi și semicerc: a) schema de calcul;	109
b) discretizare MEFr; c) discretizare MEF.....	109
Fig. 3.94. Distribuția câmpului deplasării verticale w : a) MEFr; b) MEF.	109
Fig. 3.95. Distribuția câmpului momentului M_x : a) MEFr; b) MEF.....	109
Fig. 3.96. Săgeata w pe secțiunea centrală $x = 0$	110
Fig. 3.97. Momentul M_x pe secțiunea centrală $y = 0$	110
Fig. 3.98. Placă de contur arbitrar încărcată cu: a) forță concentrată; b) sarcină uniform distribuită.....	111
Fig. 3.99. Placă discretizată: a) MEFr – 50 elem.; b) MEF – 165 elem. (182 noduri); c) MEF – 321 elem. (320 noduri); d) MEF – 641 elem. (663 noduri);.....	112
Fig. 3.100. Câmpurile deplasărilor verticale de la acțiunea unei sarcini concentrate: a) MEFr – 50 elem.; b) MEF – 165 elem.; c) MEF – 321 elem.; d) MEF – 641 elem.	113
Fig. 3.101. Câmpurile deplasărilor verticale de la acțiunea unei sarcini uniform distribuite: a) MEFr – 50 elem.; b) MEF – 165 elem.; c) MEF – 321 elem.; d) MEF – 641 elem.....	114
Fig. 3.102. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$, pentru raportul $h/a = 0,01$	128
Fig. 3.103. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$, pentru raportul $h/a = 0,1$	128
Fig. 3.104. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$, pentru raportul $h/a = 0,15$	129
Fig. 3.105. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$, pentru raportul $h/a = 0,2$	129

LISTA ABREVIERILOR

- MEF – Metoda Elementelor Finite;
- MEFr – Metoda Elementelor de frontieră;
- MDF – Metoda Diferențelor Finite;
- NE – numărul de elemente pe conturul plăcii;
- ND – numărul de elemente pe defect.

INTRODUCERE

Actualitatea și importanța problemei abordate

Plăcile sunt elemente importante ale diferitor structuri de rezistență. Aceste elemente se regăsesc în construcțiile civile, în construcțiile navale, construcții de aeronave etc.

Deși teoria de calcul are o istorie de peste 200 de ani, până în prezent nu există metode care ar rezolva toate tipurile de probleme întâlnite ale încovoierii plăcilor. Unele soluții pentru plăci dreptunghiulare și circulare sunt prezentate în serii Fourier slab convergente [124, 156], însă acestea nu pot fi utilizate pentru toate modurile de rezemare și cazurile de încărcare. Odată cu dezvoltarea tehnicii computaționale au fost elaborate metode numerice de calcul. Cele mai răspândite sunt: Metoda Diferențelor Finite (MDF), Metoda Elementelor Finite (MEF) [90, 136] și Metoda Elementelor de Frontieră (MEFr) [2-8, 10, 13-16, 23, 24, 49, 61-64, 74] .

În ultimul timp este larg răspândită metoda elementelor finite. Cel mai mare dezavantaj al calculului plăcilor prin MEF constă în utilizarea problematică a elementelor finite cu un număr sporit de grade de libertate în noduri, care ar putea satisface toate condițiile la limită posibile. S-a constatat că majoritatea programelor MEF nu conțin elemente finite de placă cu un număr mai mare de trei grade de libertate în nod. Dacă sunt utilizate elemente de plăci curbe, numărul de grade de libertate se majorează până la șase, însă nu conțin toți parametrii necesari pentru a satisface toate condițiile de frontieră. De regulă, MEF conduce la rezolvarea unui sistem masiv de ecuații liniare, ce necesită mult timp, memorie internă și spațiu de stocare a datelor în calculator pentru rezolvarea lor. Totodată, MEF este inefficientă: la calculul plăcilor cu condiții mixte la limită, a problemelor ce prezintă concentrări de tensiuni, defecte, probleme de contact etc. Problemele sunt actuale și la moment nu au soluții satisfăcătoare.

Soluțiile propuse în această lucrare exclud dezavantajele enunțate și oferă noi posibilități de calcul, eficacitate, precizie și cheltuieli minime ale resurselor calculatorului.

Scopul tezei

Scopul studiului efectuat în această lucrare constă în obținerea și aplicarea soluțiilor discontinue în metoda elementelor de frontieră pentru calculul plăcilor plane.

Obiectivele cercetării

Pentru atingerea scopului propus a fost necesar de a îndeplini următoarele obiective:

- obținerea soluțiilor discontinue la calculul plăcilor plane cu diferite moduri de rezemare, încărcări, defecte etc., atât în interpretarea clasică, cât și ținând seama de deformațiile din forfecare (teoria Reissner);
- rezolvarea integralelor de frontieră și tratarea singularităților acestora;

- implementarea numerică a soluțiilor discontinue;
- elaborarea programelor de calcul pentru a rezolva problemele ce se regăsesc în practica de proiectare curentă;
- validarea rezultatelor obținute prin MEFr.

Ipoteza de cercetare

Soluțiile prezentate în această lucrare au fost construite pornind de la ipotezele teoriei clasice a plăcilor și teoria ce ține cont de deformațiile transversale de forfecare (Teoria Reissner).

Sinteza metodologiei de cercetare și justificarea metodelor de cercetare alese

Problemele de încovoiere ale plăcilor plane, abordate în această lucrare, au fost analizate folosind metoda indirectă a elementelor de frontieră. Această metodă numerică, relativ nouă, poate fi aplicată la rezolvarea unui șir de probleme, pentru care metodele numerice și analitice existente nu au soluții sau nu oferă o exactitate satisfăcătoare. În MEFr discretizarea este supus doar conturul plăcii, iar acest lucru conduce la reducerea dimensiunii sistemului global de ecuații față de celelalte metode numerice, totodată MEFr conferă o exactitate mai bună, soluțiile fiind continue în interiorul domeniului și numerice la conturul plăcii.

Aprobarea rezultatelor cercetărilor.

Rezultatele cercetărilor au fost aplicate în cadrul proiectului de cercetare științifică cu titlul: „Calculul plăcilor prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue”. Director de proiect: Moraru Gh. Perioada de realizare: 2011-2014. Deasemenea, rezultatele au fost expuse în 9 lucrări științifice:

- reviste din Registrul Național al revistelor de profil
 - Galbanean, S. Calculation errors of the plates using finite element method. In: *Meridian Ingineresc*. 2013, nr. 2, pp. 64-66. ISSN 1683-853X.
 - Galbanean, S. Soluții discontinue pentru calculul plăcilor în teoria clasică. In: *Akademios*. 2018, vol.1, nr. 48, pp 31-35. ISSN 1857-0461.
 - Galbanean, S. Application of discontinuous solutions in Boundary Element Method for the bending problems of Kirchhoff plates with an arbitrary contour. In: *Journal of Engineering Science*, vol. 30, nr.2, UTM, 2023, pp.23-33. ISSN 2587-3474 .
- conferințe naționale
 - Galbanean, S. Calculul plăcilor consolidate pe contur cu grinzi. In: Tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. I, Chișinău, 2011, p.391-394. ISBN 978-9975-45-208-3.
 - Galbanean, S. Elaborarea programului de calcul al plăcii simplu rezemate pe două laturi opuse folosind seriile Levy. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. I, Chișinău, 2011, p. 395-398. ISBN 978-9975-45-208-3.

- Galbinean, S. Metode numerice de calcul a plăcilor. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. II, Chișinău, 2012, p.107-110. ISBN 978-9975-45-251-9.
- Galbinean, S. Calculul plăcilor prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. II, Chișinău, 2013, p. 407-411. ISBN 978-9975-45-312-7.
- Galbinean, S. Implimentarea numerică a metodei elementelor de frontieră. In: tezele Conferinței jubiliare tehnico-științifice jubiliare a colaboratorilor, doctoranzilor și studenților consacrată celei de-a 50-a aniversare a UTM, Vol. II, Chișinău, 2014, p.202-205. ISBN 978-9975-45-382-0.
- conferințe internaționale
 - Galbinean, S. Discontinuous solutions in BEM for plate analysis in Reissner-Mindlin theory. In: International Azerbaijan Academic Research Congress, 2022, p.751-758. ISBN 978-605-71461-7-5.

Sumarul compartimentelor tezei

Capitolul 1. „*Ecuatiile de bază pentru plăci utilizând teoria clasică și teoria lui Reissner*” prezintă evoluția teoriilor și metodelor de calcul de la apariția primelor formulări matematice și până în prezent. Sunt enumerate cele mai importante publicații științifice de-a lungul timpului care au contribuit la dezvoltarea tehnicii de calcul. Tot în acest capitol este descrisă teoria clasică a plăcilor și teoria, care ține cont de deformațiile din forfecare.

Capitolul 2. „*Metode numerice de calcul*” include cele mai utilizate metode numerice de calcul a plăcilor la momentul actual, și anume: Metoda elementelor finite (MEF), Metoda elementelor de frontieră (MEFr) în formularea directă și cea indirectă. Sunt prezentate principalele avantaje și dezavantaje ale metodelor numerice enumerate mai sus.

Capitolul 3. „*Soluții discontinue pentru plăci*”. În acest capitol se propune spre cercetare o nouă direcție în metoda indirectă a elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue. Aceste soluții au fost aplicate la rezolvarea mai multor probleme de încovoiere a plăcilor: contur arbitrar, diferite moduri de rezemare, diferite tipuri de încărcări, defecte etc. Pentru a demonstra veridicitatea și corectitudinea metodei propuse, a fost elaborat un program de calcul scris în limbajul Matlab, cu ajutorul căruia au fost calculate deplasările și eforturile în plăci pentru problemele menționate mai sus. Rezultatele obținute au fost comparate cu MEF și cu cele analitice.

1. ECUAȚIILE DE BAZĂ PENTRU PLĂCI CONFORM TEORIEI CLASICE ȘI A TEORIEI LUI REISSNER

1.1. Dezvoltarea teoriei de calcul a plăcilor

Din cele mai vechi timpuri oamenii utilizau plăcile la construcția clădirilor, podurilor, monumentelor etc. Dimensiunile, capacitatea portantă a plăcilor și tehnicile de execuție erau obținute din practică și transmise din generație în generație, pe când inginerii din zilele noastre utilizează diferite metode demonstrate științific.

Dezvoltarea mecanicii structurilor a dat un imbold pentru rezolvarea unui șir de probleme statice, inclusiv și pentru dezvoltarea teoriei de calcul a plăcilor.

Primele formulări matematice pentru calculul plăcilor au fost introduse de Euler în anul 1776, care a rezolvat un șir de probleme legate de oscilațiile libere ale plăcilor de formă dreptunghiulară, triunghiulară și circulară, echivalând placa cu un sistem de fire, reciproc perpendiculare [29]. Mai târziu, Bernoulli a înlocuit firele cu un sistem de bare [9], care posedă rigiditate la încovoiere.

Un aport considerabil la calculul oscilațiilor libere ale plăcilor a fost adus de către fizicianul german Chladni, care a efectuat diferite experimente pe plăci metalice vibrante [20] și a reușit să determine frecvențele corespunzătoare acestor forme de oscilații.

În 1811, matematicianul francez Germain a fost prima femeie care a obținut ecuația diferențială a suprafeței mediane a plăcii, însă în această ecuație lipsea termenul de torsiune [44]. Puțin mai târziu, în 1813, Lagrange a completat ecuația introducând termenul lipsă, astfel, el a devenit prima persoană care a prezentat într-o formă completă ecuația generală a plăcii [73].

Cauchy [19] și Poisson [100] au fost primii savanți care au formulat problema încovoierii plăcilor reieșind din ecuațiile generale ale teoriei elasticității. Astfel, ei au obținut ecuația diferențială pentru deplasarea verticală w (săgeată), care este analogică cu cea formulată de Germain-Lagrange. În 1829, Poisson a rezolvat problema încovoierii plăcii sub acțiunea sarcinilor statice, totuși, în aceste soluții rigiditatea cilindrică D era înlocuită cu o constantă. Deasemenea, el a propus ca pe conturul plăcii să fie prescrise câte trei condiții la limită, iar acest lucru a condus la multe dispute, întrucât numărul lor era în contradicție cu gradul ecuației diferențiale, care permite de a satisface doar două condiții.

Mai târziu, Navier [98] a introdus în ecuația suprafeței mediane a plăcii, rigiditatea cilindrică $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$. De asemenea, el a elaborat metoda de calcul a încovoierii plăcilor, transformând ecuația diferențială în expresii algebrice sub formă de serii trigonometrice Fourier.

Cu toate acestea, fondatorul teoriei clasice este considerat Kirchhoff, care în anul 1850 a publicat o lucrare importantă despre teoria plăcilor subțiri [69]. În această lucrare, Kirchhoff a formulat două ipoteze fundamentale, care actualmente sunt acceptate pe larg în teoria încovoierii plăcilor și sunt cunoscute ca „Ipotezele lui Kirchhoff”. După ce a propus aceste ipoteze Kirchhoff a redus problema tridimensională a teoriei elasticității într-o problemă bidimensională. De asemenea, el a accentuat faptul că pe conturul plăcii pot fi prescrise doar două condiții la limită și nu trei, cum enunțase anterior Navier. Acest lucru a fost posibil prin înlocuirea momentului de torsiune la frontiera plăcii cu un cuplu de forțe, iar acestea, la rândul lor au fost adăugate la forța tăietoare, astfel obținându-se forța tăietoare generalizată. În consecință, toate condițiile la limită pot fi prezentate ca funcție de săgeată și derivatele ei în raport cu x sau y .

Alte contribuții semnificative ale lui Kirchhoff constau în obținerea ecuației frecvenței plăcilor și introducerea metodei deplasărilor virtuale [70]. Teoria lui Kirchhoff a pus baza fizică a teoriei încovoierii plăcilor și a facilitat utilizarea ei pe scară largă în practică. Din aceste motive, în multe surse, teoria clasică este asociată cu numele său.

Lucrarea lui Kirchhoff a fost tradusă de Clebsh [21], în care se găsesc multe comentarii valoroase ale lui Saint-Venant: cea mai semnificativă fiind dezvoltarea ecuației diferențiale ale plăcilor subțiri ca acțiune combinată a încovoierii și a întinderii. De asemenea, el a constatat faptul că seriile propuse de Cauchy și Poisson, de regulă, sunt divergente.

La sfârșitul sec. XIX, Levy [76] a obținut soluțiile sub formă de serii trigonometrice Fourier pentru placa dreptunghiulară având două laturi opuse simplu rezemate, iar celelalte două arbitrare.

La sfârșitul sec. XIX și începutul sec. XX, industria navală a cunoscut o ascensiune rapidă, datorită înlocuirii lemnului cu oțelul. Această schimbare a constituit un avantaj pentru dezvoltarea mai multor teorii și metode de calcul ale plăcilor, în mare parte, de către savanții ruși, fiind primii care au înlocuit metodele „antice” cu teorii matematice solide, în special, Krylov [71] și studentul său Bubnov [137, 138]. Bubnov a elaborat o metodă nouă de integrare a ecuațiilor diferențiale ale teoriei elasticității și a prezentat sub formă de tabele valorile săgeții și ale momentului de încovoiere în anumite puncte caracteristice pentru plăci de diferite forme, încărcări și moduri de rezemare.

Mai târziu, Galerkin a dezvoltat această teorie și a aplicat-o la calculul plăcilor a căror contur nu poate fi descris cu ajutorul funcțiilor matematice. Galerkin a prezentat în monografia sa [140] un șir de probleme ale încovoierii plăcilor de contur arbitrar.

Timoshenko a avut un aport semnificativ la dezvoltarea teoriilor de calcul ale plăcilor [122]. Printre numeroasele sale contribuții se numără soluțiile pentru plăcile circulare, luând în

considerație deplasările mari. Deasemenea, el a rezolvat și un șir de probleme ale stabilității elastice a plăcilor subțiri. Timoshenko și Woinowsky-Krieger au publicat împreună o monografie [123], considerată fundamentală, care reprezintă o analiză profundă pentru o varietate de probleme ale încovoierii plăcilor.

Cercetări și aplicații importante în domeniul teoriei plăcilor au fost efectuate de oameni de știință precum Hencky, Huber, von Karman, Nadai, Föppl.

Hencky [51] a avut o contribuție considerabilă la teoria plăcilor cu deformații mari și la teoria generală a stabilității elastice ale plăcilor subțiri. Nadai [97] a efectuat cercetări teoretice și experimentale pentru a verifica corectitudinea și exactitatea teoriei lui Kirchhoff. El a tratat diferite tipuri de singularități în plăci provenite de la forțe concentrate, efectele punctelor de colț etc. Ecuațiile generale pentru plăcile foarte subțiri (membrane) au fost simplificate de către Föppl [33] care a folosit funcția de tensiune ce acționează în planul median al plăcii. Forma finală a ecuației diferențiale a teoriei plăcilor cu deformații mari, a fost obținută de către von Karman [60]. De asemenea, el a cercetat comportarea postflambaj a plăcilor.

Huber [52] a elaborat o teorie aproximativă ale plăcilor ortotrope și a rezolvat problemele plăcilor: supuse unor sarcini distribuite neuniform și de momente marginale. Bazele teoriei generale ale plăcilor anizotrope au fost elaborate de Gehring [42] și Boussinesq [12]. Lekhnitskii [146] a avut o contribuție esențială la dezvoltarea calculului liniar și neliniar a plăcilor anizotrope.

Dezvoltarea industriei aeronautice moderne a dat un impuls puternic pentru cercetări analitice suplimentare și mai exacte ale plăcilor. Plăcile solicate de forțe în plan, comportarea postflambaj, probleme de oscilații și plăcile rigide au fost studiate de mulți savanți și ingineri [68, 139, 141, 155].

Cea mai importantă ipoteză a teoriei clasice presupune că normala la suprafața mediană rămâne normală și plană după deformare. Întrucât teoria neglijează deformațiile provenite din forța tăietoare, pentru plăcile de grosimi relativ mari acest lucru poate conduce la erori considerabile. Pentru a elimina neajunsurile sus menționate ale teoriei clasice, Reissner și Midlin au elaborat două teorii diferite pentru plăcile moderat groase. Teoria elaborată de către Reissner [104-106] include efectele deformațiilor provenite din forța tăietoare și tensiunea normală. Conform teoriei sale, în loc de două trebuie satisfăcute trei condiții la limită. Din aceste trei condiții, una implică săgeata și celelalte două reprezintă deformația de rotire a normalei și respectiv, a tangentei.

Tendința actuală [125] în dezvoltarea teoriilor plăcilor este strâns legată de apariția calculatoarelor performante, care a condus la apariția metodelor numerice de calcul așa cum sunt: Metoda Elementelor Finite (MEF) [90, 136] și Metoda Elementelor de Frontieră (MEFr) [2-8, 10, 13-16, 23, 24, 49, 61-64, 74] care sunt descrise mai detaliat în capitolul 2 al lucrării.

1.2. Teoria clasică a plăcilor

În teoria clasică a plăcilor, în afara ipotezelor fundamentale folosite în mecanica solidului deformabil se introduc ipoteze suplimentare [87, 126] specifice plăcilor:

1. Planul median al plăcii nu suferă deformații de întindere, compresiune sau lunecare. Acesta se consideră neutru, analogic cu axa din teoria barelor. Din această ipoteză rezultă că în punctele planului median al plăcii, deplasările în direcția axelor OX și OY sunt nule.

$$u(x,y,0) = 0; \quad v(x,y,0) = 0;$$

2. Similar ipotezei secțiunii plane a lui Bernoulli pentru bare, se aplică așa-numită ipoteza cinematică a lui Kirchhoff [70]: segmentul rectiliniu normal la suprafața mediană înainte de deformare rămâne rectiliniu și normal la suprafața deformată a planului median și nu-și schimbă lungimea (Fig. 1.1.). Din această ipoteză derivă două rezultate. Primul – unghiurile drepte dintre normala pe suprafață și axele OX și OY rămân drepte și după deformație, de unde rezultă că:

a) deformațiile de alunecare în planul OZX și OZY :

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0;$$

b) ca urmare tensiunile tangențiale:

$$\tau_{zx} = G \cdot \gamma_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = G \cdot \gamma_{zy} = 0$$

Al doilea – permite ca în analiza deformațiilor plăcii să fie studiate numai deplasările punctelor suprafeței mediane. Într-adevăr, din motivul că deplasările tuturor punctelor de pe normala la suprafața mediană sunt constante și egale cu deplasările w ale punctului corespunzător din suprafața mediană rezultă:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{și} \quad w(x, y, z) = w(x, y, 0).$$

3. Ipoteza statică: tensiunile ce acționează în direcția normalei la suprafața mediană σ_z pot fi neglijate. Adică se neglijează interacțiunile straturilor plăcii paralele cu suprafața mediană. Aceasta corespunde unei stări plane de tensiuni:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x);$$

De menționat faptul că în *Teoria Elasticității* [87, 152, 153], prin utilizarea ecuațiilor

diferențiale de echilibru ce corespunde problemei spațiale rezultă că tensiunea σ_z are valori foarte mici, de ordinul 1% din valoarea celorlalte tensiuni, ceea ce justifică neglijarea ei. În această ordine de idei se admite că ele există, dar se vor omite din motivul că ele ar complica aparatul matematic de calcul. Prin urmare, această supoziție poate fi considerată o ipoteză simplificatoare matematică.

1.2.1. Deplasări și deformații în plăcile subțiri la încovoiere

Se consideră o secțiune a plăcii paralelă la planul XOY . Fie C – un punct arbitrar ce aparține acestei secțiuni, iar AB – normala către planul median, care trece prin punctul C . Poziția acestui punct pe această suprafață după deformație va fi definită prin deplasările u (în direcția axei x), w (în direcția axei z) și a unghiurilor de rotire a normalei φ . Pozițiile punctului C în starea nedeformată și deformată sunt date în Fig. 1.1.

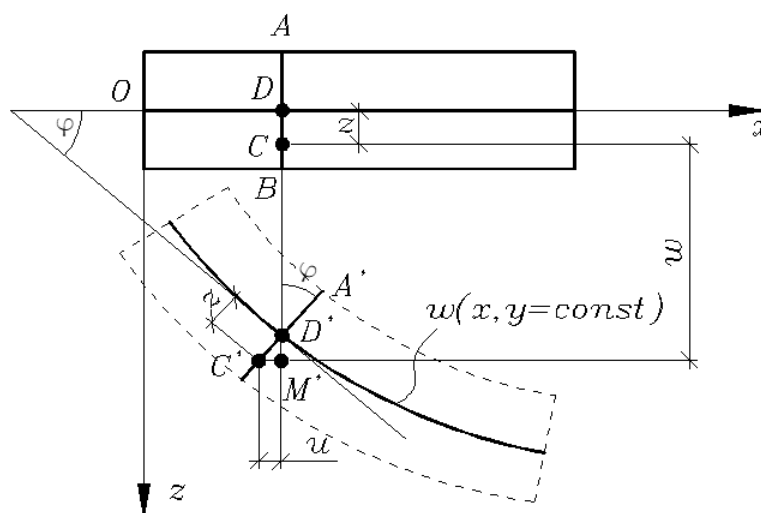


Fig. 1.1. Deplasarea orizontală u și verticală w a punctului C de pe normală

Dacă se va ține seama de sensul geometric al primei derivatei, se poate scrie:

$$\tan \varphi = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Din triunghiul dreptunghic $C'D'M'$ (Fig. 1.3.) rezultă:

$$u = -z \sin \varphi = -z \tan \varphi = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.1)$$

Aici $\sin \varphi \cong \tan \varphi$ în baza ipotezei deplasărilor și unghiurilor mici. De asemenea, dacă se consideră o secțiune paralelă la planul YOZ , se obține:

$$v = -z \sin \alpha = -z \tan \alpha = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.2)$$

Se observă că expresiile deplasărilor u și v depind liniar de variabila z , prin urmare, acestea sunt funcții necunoscute de două coordonate din planul plăcii.

Dacă se vor considera ecuațiile de legătură dintre deformații și deplasări (ecuațiile geometrice ale lui Cauchy), se obțin relațiile pentru deformații, exprimate în funcție de săgeată:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$\varepsilon_z = 0$; $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ – conform ipotezei a doua,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Prin urmare, deformațiile, ca și deplasările, sunt funcții liniare în raport cu variabila z și funcții necunoscute de două coordonate din planul plăcii.

1.2.2. Tensiuni în plăcile subțiri la încovoiere

Relațiile dintre deformații și tensiuni (ecuațiile constitutive ale lui Hooke) pentru problema plană [90]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} (\sigma_x + \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y + \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

În continuare, pentru comoditate, se va utiliza forma inversă a acestor ecuații. Se obține:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{E}{(1+\nu)} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Din relațiile (1.5) reiese că distribuirea tensiunilor σ_x , σ_y și τ_{xy} pe grosimea plăcii este liniară. Conform ipotezelor de calcul, tensiunile σ_z , τ_{xz} și τ_{yz} sunt nule. În realitate, ele nu pot fi nule, întrucât nu se va realiza echilibrul în placă.

În scopul determinării acestor tensiuni se vor utiliza ecuațiile de echilibru ale unui element de placă, nu înainte de a introduce încă o ipoteză: întrucât grosimea plăcii este mică în raport cu dimensiunile ei din plan, se consideră că forțele volumice pot fi substituie cu forțe de suprafață, astfel $\bar{Z} = 0$. S-a stabilit că forțele din planul plăcii, adică \bar{X} și \bar{Y} , de asemenea, sunt nule.

Se consideră ecuația diferențială de echilibru:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{E}{(1+\nu)} z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0,$$

din cauză că $\tau_{xz} = 0$, nu verifică ecuația de mai sus. În continuare se va obține acea mărime a lui τ_{xz} care ar satisface această ecuație:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{E}{1+\nu} z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \\ &= z \left[\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} + 1 \right) \right] = z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Prin integrarea ambelor părți ale acestei ecuații în raport cu variabila z , se obține:

$$\tau_{xz} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \left(\frac{z^2}{2} + f(x, y) \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \left(\frac{z^2}{2} + f(x, y) \right),$$

unde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ reprezintă operatorul Laplace.

Funcția necunoscută $f(x, y)$ se determină din condițiile la limită pe suprafețele plăcii: pe fețele superioară și interioară $z = \pm h/2$, tensiunile tangențiale $\tau_{xz} = 0$ (conform definiției de

încovoiere a plăcii). Substituind în relația pentru τ_{xz} variabila z prin $z = \pm h/2$ și egalând-o cu zero, se obține:

$$\tau_{xz} \Big|_{z=\pm h/2} = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \left(\frac{h^2}{8} + f(x, y) \right) = 0,$$

de unde $f(x, y) = -h^2/8$.

Astfel, se va stabili formula pentru tensiunea tangențială τ_{xz} , care anterior era considerată nulă:

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \Delta w. \quad (1.6)$$

Se observă că tensiunea τ_{xz} este funcție pătrată de variabila z și funcție necunoscută de coordonatele din planul plăcii.

În mod analogic, dacă se verifică a doua ecuație diferențială de echilibru, se obține relația pentru tensiunea tangențială τ_{yz}

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \Delta w. \quad (1.7)$$

Formulele (1.5)-(1.7) permit construirea diagramelor de distribuire a tensiunilor pe grosimea plăcii (Fig. 1.2.).

În teoria încovoierii plăcilor se admite următoarea regulă a semnelor: tensiunile normale sunt pozitive când produc întindere, iar negative – când produc comprimare. Pentru tensiunile tangențiale, dacă normala exterioară a secțiunii este de același sens cu axele de referință, atunci direcția pozitivă a tensiunilor are același sens cu axa de coordonate corespunzătoare. În Fig. 1.2. direcțiile pozitive ale tensiunilor în secțiunile respective sunt arătate pentru cazul când variabila z este o mărime pozitivă.

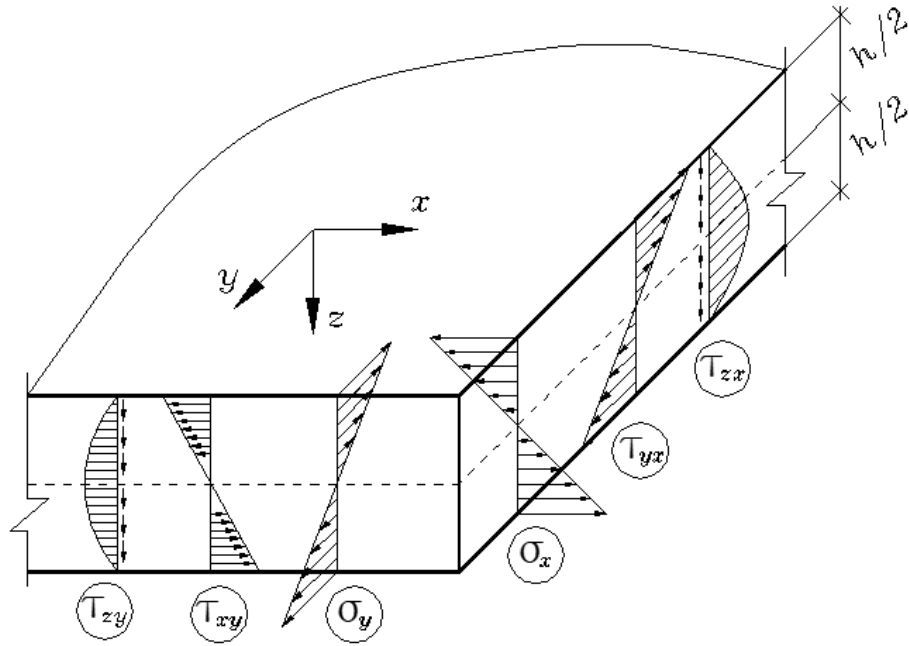


Fig. 1.2. Variația tensiunilor după grosimea plăcii

Din diagramele Fig.1.2. se observă caracterul de distribuire a tensiunilor în secțiunile respective: tensiunile σ_x , σ_y , τ_{xy} variază pe grosime liniar, fiind nule în planul median, iar τ_{xz} și τ_{yz} — după o parabolă, având valoarea maximă în planul median.

A treia ecuație de echilibru oferă posibilitatea de a determina tensiunea normală σ_z

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Se va ține cont de relațiile (1.6) și (1.7), astfel se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \right] = \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta w = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \Delta(\Delta w). \end{aligned}$$

Dacă se va efectua integrarea în raport cu variabila z :

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \Delta(\Delta w) \left(\frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) + f(x, y). \quad (1.8)$$

Funcția $f(x, z)$ se determină utilizând condițiile pentru suprafețele plăcii $z = -h/2$ și $z = +h/2$:

$$\sigma_z |_{z=-h/2} = -p(x, y); \quad \sigma_z |_{z=h/2} = 0. \quad (1.9)$$

Dacă se consideră relațiile (1.8) și (1.9), se obțin două ecuații:

$$\sigma_z |_{z=-h/2} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \Delta(\Delta w) \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{24} \right) + f(x, y) = -\frac{EI^*}{2(1-\nu^2)} \Delta(\Delta w) + f(x, y) = -p(x, y);$$

$$\sigma_z |_{z=h/2} = \frac{EI^*}{2(1-\nu^2)} \Delta(\Delta w) + f(x, y) = 0,$$

din care rezultă că:

$$f(x, y) = -\frac{p(x, y)}{2}.$$

Astfel, relația pentru tensiunile normale σ_z se scrie:

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \Delta(\Delta w) - \frac{p(x, y)}{2}. \quad (1.10)$$

Diagrama tensiunilor normale σ_z pe grosimea plăcii este ilustrată în Fig. 1.3.

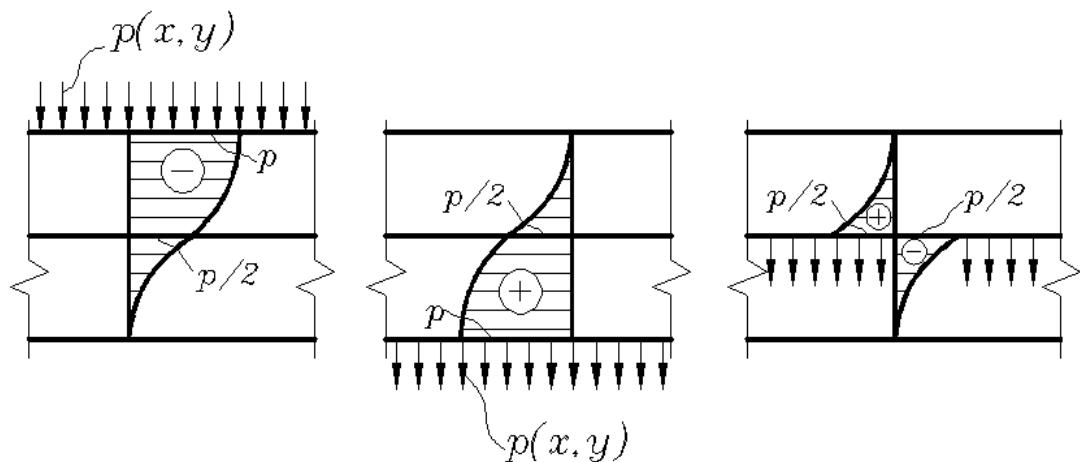


Fig. 1.3. Variația tensiunilor σ_z pe grosimea plăcii

1.2.3. Ecuația diferențială a suprafeței mediane deformate a plăcii plane

Dacă se va considera relația (1.10) și de condițiile pe suprafața plăcii $z = h/2$, se obține:

$$\frac{Eh^3}{12 \times 2(1-\nu^2)} \Delta(\Delta w) - \frac{p(x,y)}{2} = 0,$$

sau

$$\boxed{\Delta(\Delta w) = \frac{p(x,y)}{D}} \quad (1.11)$$

Relația (1.11) este cunoscută ca ecuație diferențială a suprafeței mediane a plăcii plane subțiri, numită și ecuația generală a încovoierii plăcilor plane. În formă desfășurată ea se va scrie:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}. \quad (1.12)$$

Această ecuație este considerată guvernantă, întrucât dacă se poate preciza așa o funcție $w(x,y)$ pentru suprafața mediană deformată, care satisface atât ecuația diferențială de echilibru (1.12), cât și condițiile de pe conturul plăcii, atunci starea de tensiuni, deformații și deplasări în fiecare punct al plăcii este rezolvată. Aceasta mai este numită ecuația lui Sophie Germain [44].

Introducerea celor trei ipoteze simplificatoare enunțate mai sus, permite reducerea problemei spațiale, la determinarea unei singure funcții de două variabile independente; altfel zis, problema tridimensională a fost redusă la o problemă bidimensională.

1.2.4. Eforturile interne în placa deformată

În studiul plăcilor, ca și la încovoierea barelor, se propune ca problema determinării tensiunilor să fie înlocuită prin determinarea caracteristicilor integrale ale stării de tensiuni – eforturile interne.

Se consideră o secțiune plană a plăcii deformate, dată de normala x . La distanța z de la planul median va fi cercetat un element de secțiune, cu înălțimea dz și având lungime unitară (Fig.1.4.). Deoarece înălțimea elementului este foarte mică, se poate considera că distribuția tensiunilor pe înălțimea lui este uniformă.

Rezultatele tensiunilor pe acest element se vor calcula din ecuațiile de proiecții pe axele x , y și z respectiv:

$$\sigma_x \cdot 1 \cdot dz; \quad \tau_{yx} \cdot 1 \cdot dz; \quad \tau_{zx} \cdot 1 \cdot dz.$$

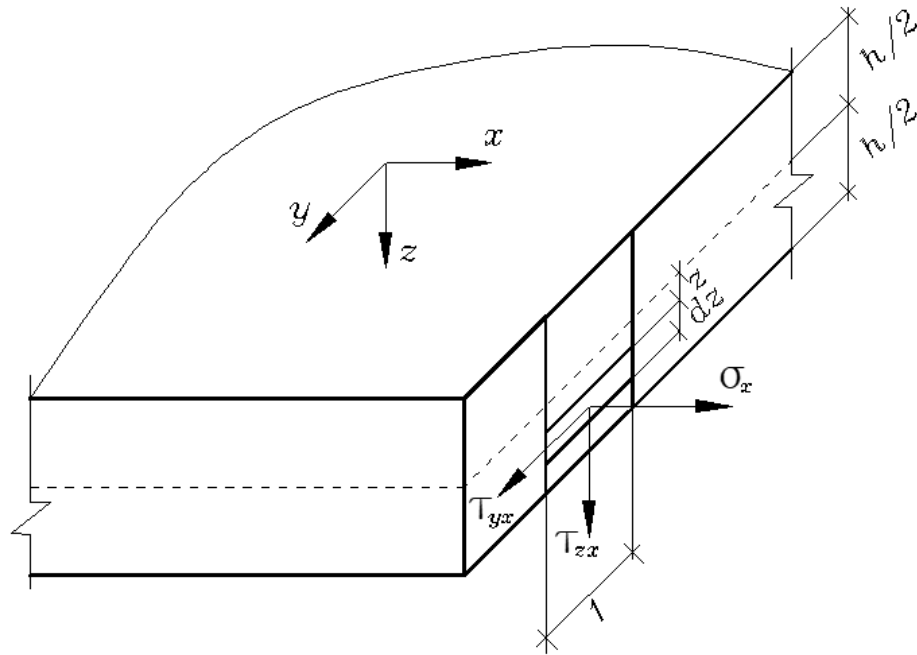


Fig. 1.4. Eforturi în placă

Prin integrarea după variabila z în intervalul $(-h/2; +h/2)$ se obțin proiecțiile vectorului principal ale eforturilor interne, ce acționează pe suprafața cu lățimea unitară.

Se consideră un element de înălțimea h decupat dintr-o placă plană de lungime unitară în direcția axelor x și y . Pe suprafața $z = h/2$ a plăcii acționează sarcina distribuită de intensitate $p(x, y)$ (Fig. 1.4.). Se vor determina componentele eforturilor secționale, la care se reduc tensiunile ce acționează în punctele fețelor laterale zy și zx date, respectiv, de normalele x și y . Va fi cercetată mai întâi fața laterală cu normala x .

Se va nota prin N_x – forța normală în direcția axei OX , ca rezultantă a tensiunilor normale σ_x ; cu S_x și cu Q_x – forțele de forfecare, orientate pe OY și OZ , reprezentând rezultantele tensiunilor tangențiale τ_{xy} și τ_{yz} .

În mod analogic, forțele N_y , S_y și Q_y vor fi considerate rezultante ale tensiunilor de pe fața laterală cu normala y . În Fig. 1.5. sunt indicate direcțiile pozitive ale acestor forțe în corespundere cu direcțiile pozitive ale tensiunilor. Întrucât forța exterioară este aplicată vertical, componentele forțelor din planul OXY sunt nule: $N_x = S_x = N_y = S_y = 0$. Forțele Q_x și Q_y se determină din relațiile:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \\ Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Eforturile (1.13) sunt raportate la o unitate de lungime și, întrucât acestea sunt obținute prin integrarea pe înălțimea h , sunt distribuite de-a lungul laturilor suprafeței mediane.

În relațiile (1.13):

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.14)$$

și este numită rigiditatea cilindrică. Ea definește rigiditatea la încovoiere a unei fâșii, având lățime unitară, cu secțiunea transversală $1 \times h$, decupată din placă (Fig.1.5.) de două planuri paralele, normale pe latura cea mai mare a ei. Se consideră că planul median a plăcii la încovoiere capătă o formă cilindrică.

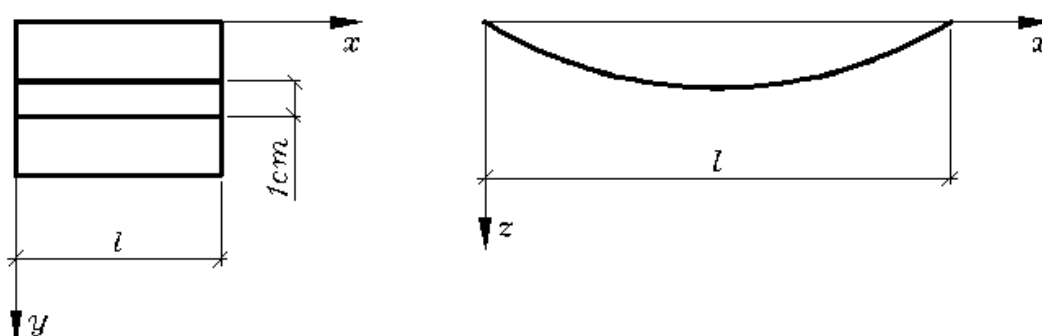


Fig. 1.5. Fâșie de placă

În continuare vor fi determinate momentele forțelor aplicate pe fețele laterale ale elementului considerat. Se va cerceta fața cu normala x . Momentele forțelor aplicate pe un element de suprafață ($1 \times dz$) în raport cu axele x și y (Fig.1.4.) se scrie:

$$dM_{xy} = \tau_{xy} \cdot 1 \cdot zdz; \quad dM_x = \sigma_x \cdot 1 \cdot zdz.$$

Momentul forțelor în raport cu axa z se neglijează ca fiind mărime infinit de mică.

Prin integrarea acestor expresii în raport cu variabila z în intervalul $(-h/2; h/2)$ se obține:

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} zdz = -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x zdz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

în care M_x este momentul de încovoiere, iar M_{xy} – momentul de torsiune. De asemenea, momentele sunt distribuite de-a lungul laturilor planului median. În mod analogic, se obțin momentele de pe fața cu normala y .

Astfel pentru ambele fețe se va scrie:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{yx} = M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

În Fig. 1.6. sunt arătate direcțiile pozitive ale acestor momente.

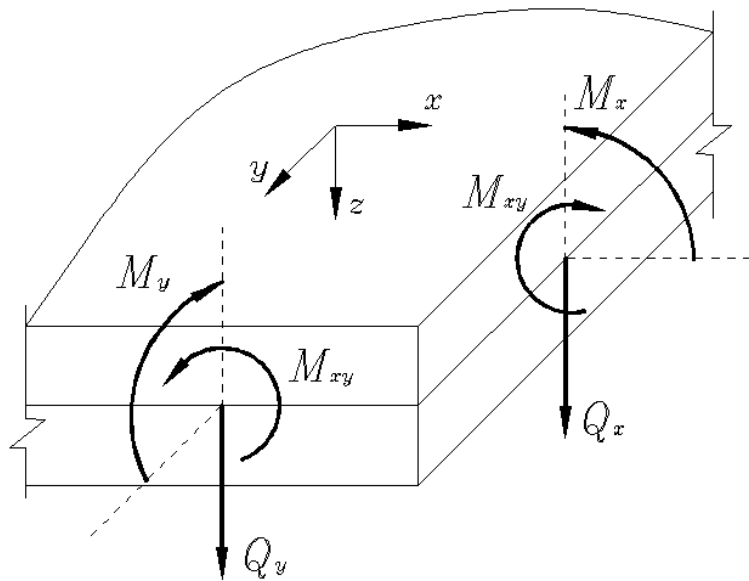


Fig. 1.6. Direcțiile de acțiune ale eforturilor

În secțiunile plăcii încovoiate forțele și momentele secționale definite mai sus se consideră ca eforturi interne. Dacă se compară aceste eforturi cu cele din bare se observă:

1. Eforturile interne în secțiunea transversală a barei sunt aplicate în centrul de greutate al secțiunii; în placa încovoiată eforturile sunt raportate la o unitate de lungime a secțiunii. Astfel, se obțin următoarele unități de măsură: pentru eforturi $N, S, Q - N/m$, iar pentru momente $- Nm/m$.

2. În placa deformată sollicitată de sarcina transversală $p(x,y)$ apar momente de răsucire, pe când în bare astfel de sollicitări nu există.

Prin aceeași cale de comparație cu bara încovoiată, în continuare vor fi determinate valorile maxime ale eforturilor în placa deformată. În acest scop, tensiunile vor fi exprimate prin eforturile interne respective. Având în vedere că:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

și notând: $I^* = 1 \times h^3/12$ pentru momentul de inerție al secțiunii transversale de lățimea $b = 1$, prima relație din (1.16) va fi scrisă:

$$M_x = -\frac{EI^*}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (1.17)$$

Din compararea formulilor (1.16), ținând cont de (1.17), rezultă că relația dintre tensiune și efortul respectiv:

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{I^*} = \frac{12M_x}{h^3} z. \quad (1.18)$$

În mod analogic se va obține:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{M_y z}{I^*} = \frac{12M_y}{h^3} z; \\ \tau_{xz} &= \frac{Q_x S_y^*}{I^*} = \frac{6Q_x}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{M_{xy}}{I^*} z = \frac{12M_{xy}}{h^3} z; \\ \tau_{yz} &= \frac{Q_y S_x^*}{I^*} = \frac{6Q_y}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

unde $S^* = (h^2/4 - z^2)/2$ este momentul static al semisețiunii decupate.

1.2.5. Formularea condițiilor la limită

Soluția analitică $w(x,y)$, care verifică ecuația diferențială de încovoiere a plăcii, impune determinarea a două funcții: $w_0(x,y)$ – soluția generală a ecuației omogene pentru $p = 0$ de aceeași structură biarmonică ca și ecuația diferențială; $w_p(x,y)$ – soluția particulară a ecuației neomogene. Întrucât ecuația este de ordinul patru, în soluția generală se obțin opt constante de integrare, funcții de două variabile, care se definesc prin condițiile de pe conturul plăcii.

În continuare este prezentată formularea condițiilor pentru conturul plăcii în funcție de modurile de rezemare enumerate mai sus (Fig.1.7.).

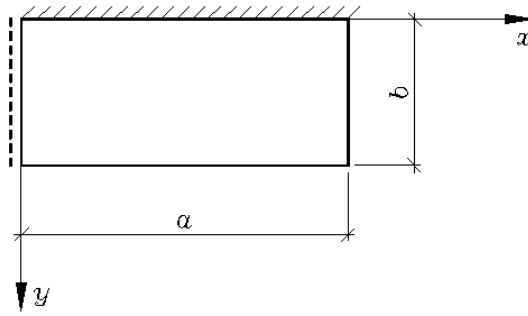


Fig. 1.7. Placă cu diferite moduri de rezemare

- **Încadrarea rigidă pe lungimea unei laturi $y = 0$.** Ecuația ce definește această latură (a segmentului de contur de sprijin) este $y = 0$. În toate punctele ce aparțin acestei laturi săgeata și unghiul de rotire a oricărei normale către planul median în raport cu axa x sunt nule. În mod matematic se scrie:

$$w|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (1.20)$$

- **Rezemarea simplă pe lungimea laturii $x = 0$.** Aici săgeata și momentul încovoietor sunt nule:

$$w|_{x=0} = 0; \quad M_x|_{x=0} = 0. \quad (1.21)$$

Este mai eficient de a exprima a doua condiție din (1.21) prin funcția săgeții. Dacă se consideră relația (1.10), rezultă:

$$M_x|_{x=0} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{sau} \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0} = 0.$$

Întrucât pe latura $x = 0$ săgeata w este nulă, obținem și $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$. Prin urmare, condiția $M_x = 0$ este echivalentă condiției $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$. Astfel, sunt valabile condițiile:

$$w|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x=0} = 0. \quad (1.22)$$

- **Latura liberă de orice sarcini** se va considera latura $y = b$. Întrucât pe suprafața laterală a plăcii dată de normala exterioară y sarcinile exterioare nu acționează, se scrie:

$$M_y|_{y=b} = 0; \quad M_{xy}|_{y=b} = 0; \quad Q_y|_{y=b} = 0. \quad (1.23)$$

Conform gradului ecuației diferențiale, pentru orice latură pot fi prescrise numai două condiții. Prin urmare, cele trei condiții impuse (1.23) sunt în contradicție cu gradul ecuației diferențiale. Kirchhoff [69, 70] a propus ca două din condițiile impuse, și anume, momentul M_{yx} și forța tăietoare Q_y să fie înlocuite cu una singură.

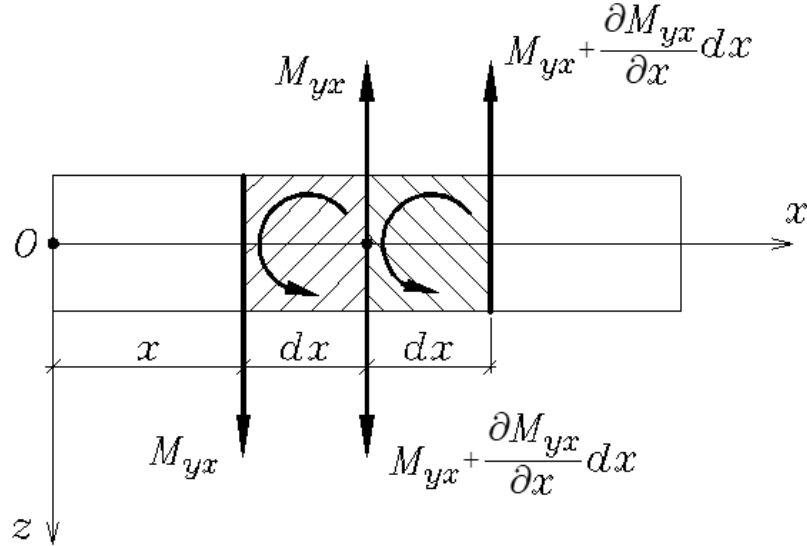


Fig. 1.8. Substituirea momentului de torsiune M_{yx} cu un cuplu de forțe

Pentru marginea $y = b$, într-o secțiune oarecare cu normala y se va cerceta elementul dx (Fig. 1.8.). Momentul de torsiune $M_{yx} dx$ va fi substituit de un cuplu de forțe M_{yx} cu brațul dx . Pe intervalul dx vecin, momentul de torsiune va avea valoarea $[M_{yx} + (\partial M_{yx}/\partial x)dx]dx$ și va fi înlocuit de un cuplu de forțe $M_{yx} + (\partial M_{yx}/\partial x)dx$ cu brațul dx .

Efectuând suma proiecțiilor forțelor pe verticală pe linia dintre elementele cercetate, se va obține componenta provenită din momentul de torsiune

$$-M_{yx} + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx \right) = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx.$$

Pe o unitate de lungime va reveni

$$\frac{(\partial M_{yx}/\partial x) dx}{dx} = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}.$$

Componenta stabilită din momentul de torsiune se va adăuga la forța tăietoare Q_y , astfel se va obține forța tăietoare generalizată V_y .

Relațiile pentru forțele tăietoare generalizate:

$$\left. \begin{aligned} V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \\ V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Condițiile exprimate prin funcție de săgeata w , se scriu în forma:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=b} = 0; \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \Big|_{y=b} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

1.2.6. Eforturi secționale în placa de contur curbiliniu

În cazul plăcii cu contur curbiliniu originea sistemului de coordonate local va fi amplasat în punctul A de pe contur, iar axele se vor îndrepta în direcția normalei n și tangentei t , după cum este arătat în Fig.1.9.

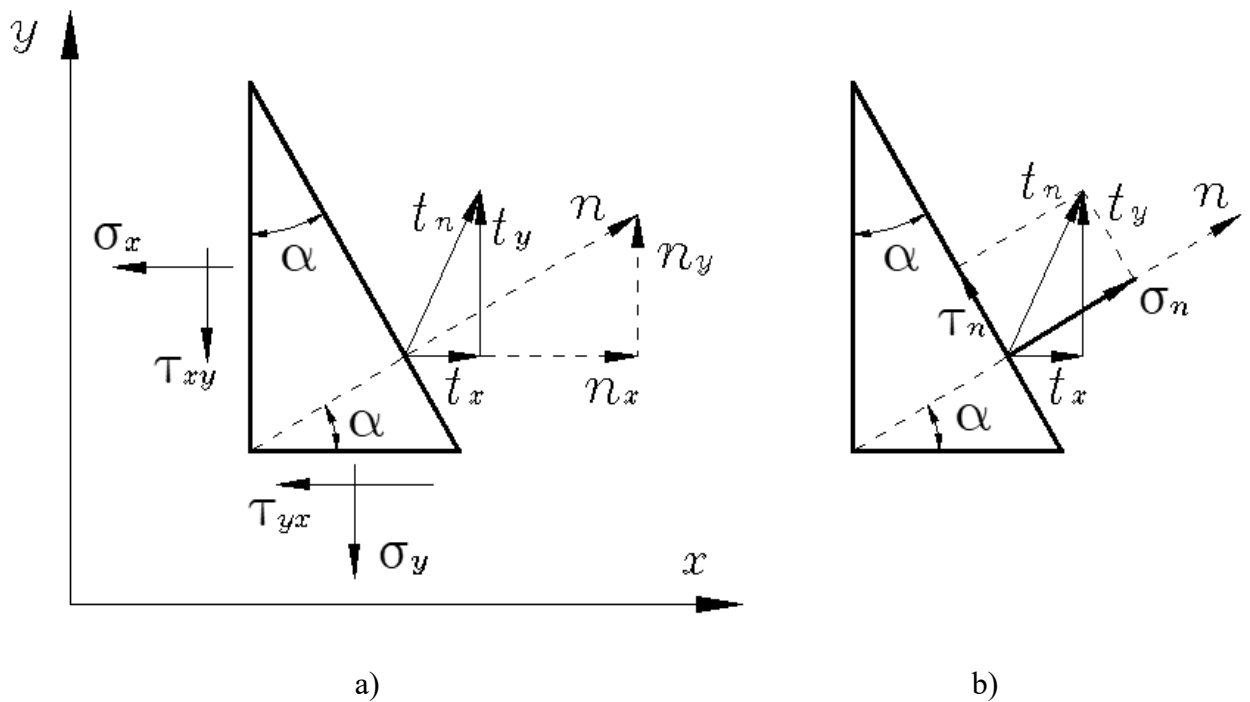


Fig. 1.9. Transformarea tensiunilor dintr-un sistem de coordonate în altul

Din ecuația de echilibru a unui element triunghiular (Fig. 1.9., a) se obține:

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha; \\ t_y &= \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1.26)$$

unde: $n_x = \cos \alpha$; $n_y = \sin \alpha$.

Considerând ecuațiile de echilibru a elementelor din (Fig. 1.9, b) pot fi obținute relațiile dintre componentele σ_n , τ_{nt} și t_x , t_y :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= t_x \cos \alpha + t_y \sin \alpha; \\ \tau_{nt} &= -t_x \sin \alpha + t_y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Substituind (1.26) în (1.27) se obține:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha; \\ \tau_{nt} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \quad (1.28)$$

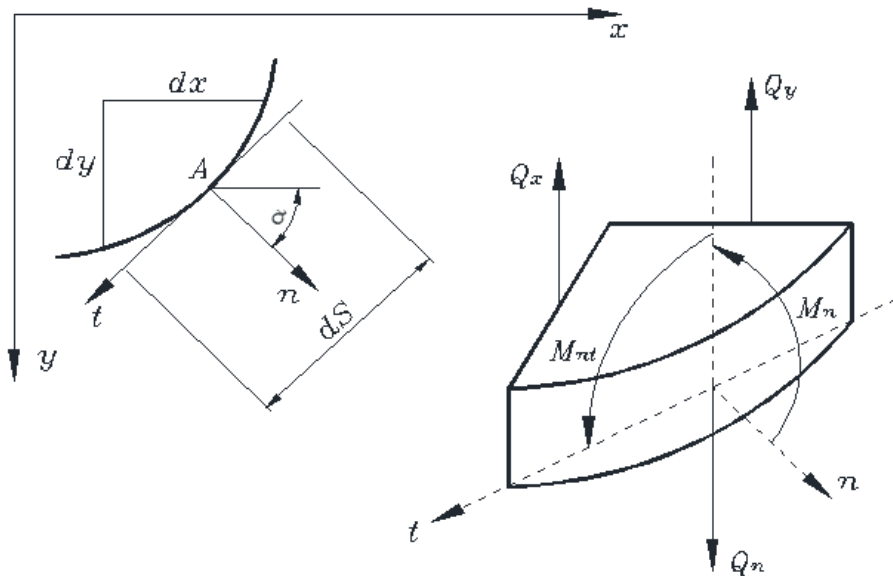


Fig. 1.10. Eforturile pe frontiera curbilinie

Multiplicând expresiile de mai sus cu z și integrând pe intervalul $(-h/2, +h/2)$ se obține:

$$\begin{aligned} M_n &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n z dz = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y; \\ M_{nt} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{nt} z dz = (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Prin analogie, din condiția de echilibru a forțelor tăietoare pe axa verticală rezultă:

$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y. \quad (1.30)$$

Unghiul de rotire

$$\theta_n = -\frac{\partial w}{\partial x} n_x - \frac{\partial w}{\partial y} n_y. \quad (1.31)$$

Condițiile la limită pentru diferite moduri de rezemare a plăcii cu contur curbiliniu au forma:

- **latura încastrată:**

$$\begin{aligned} w &= 0; \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= \frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y = 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

- **latura simplu rezemată:**

$$\begin{aligned} w &= 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} n_x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} n_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

- **latura liberă:**

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (n_x^2 + \nu n_y^2) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1 - \nu) n_x n_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (n_y^2 + \nu n_x^2) = 0; \\ V_n &= Q_n + \frac{\partial M_n}{\partial t} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} [n_x^3 + (2 - \nu) n_x n_y^2] - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} [(1 - \nu) n_x^2 n_y - (2 - \nu) n_y^3] + \\ &+ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} [n_y^3 + (2 - \nu) n_x^2 n_y] - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} [(1 - \nu) n_x n_y^2 - (2 - \nu) n_x^3] = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

1.2.7. Puncte de colț

Transformarea momentului de torsiune în cupluri de forță, așa cum s-a arătat anterior, se vor obține nu numai forțe tăietoare $\partial M_{xy}/\partial y$ distribuite de-a lungul laturii $x = a$, dar și două forțe concentrate la capetele acestor margini (Fig. 1.11., a). Mărimea acestor forțe este egală cu mărimea cuplului de torsiune M_{xy} în colțurile corespunzătoare plăcii. Prin transformare analogică a momentului de torsiune de-a lungul marginii $y = b$, se obține, pe lângă forțele tăietoare $\partial M_{yx}/\partial x$, forțe concentrate M_{yx} , care acționează în colțurile plăcii. Acest lucru demonstrează că orice placă dreptunghiulară încărcată transversal, indiferent de modul de rezemare, va genera nu doar reacțiuni repartizate de-a lungul conturului plăcii, dar și reacțiuni concentrate în colțurile ei.

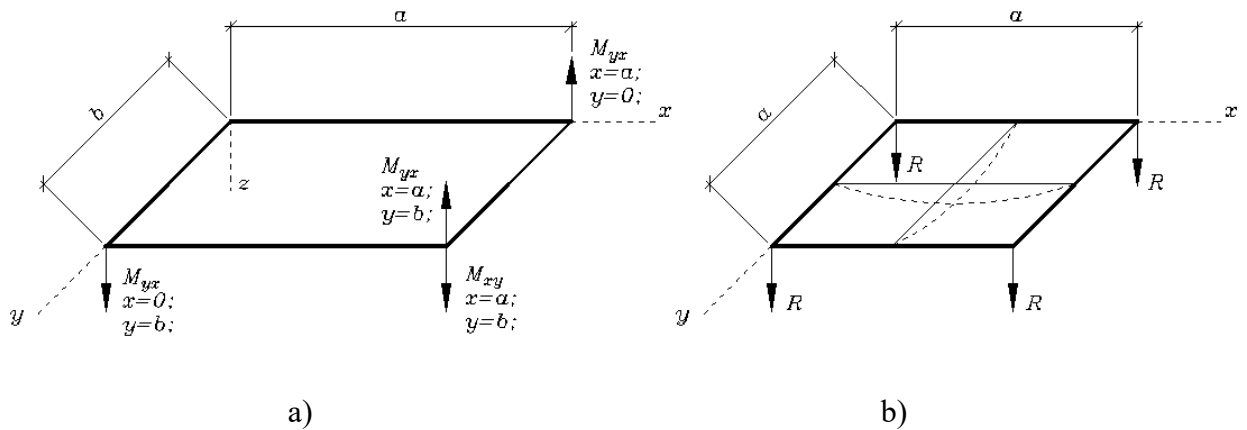


Fig. 1.11. Reacțiuni în colțurile plăcii dreptunghiulare

Problema punctelor de colț a fost studiată în mai multe lucrări [66, 67, 75, 82, 92, 99, 133, 142]. De exemplu, fie o placă pătrată uniform încărcată, simplu rezemată pe contur. Forma generală a suprafeței deformate este indicată în Fig. 1.11., *b*, prin linii întrerupte sunt reprezentate secțiunile suprafeței mediane ale plăcii prin plane paralele planelor de coordonate xz și yz . Ținând cont de aceste linii, se poate vedea că în apropierea reazemului A derivata $\partial w / \partial x$ ce reprezintă panta suprafeței deformate după direcția x este negativă, și scade ca valoare odată cu creșterea lui y . De aici rezultă că $\partial^2 w / \partial x \partial y$ este pozitivă în colțul A . Din a treia ecuație a expresiilor (1.15) se observă că M_{xy} este pozitiv și că M_{yx} este negativ în același colț de placă. Din aceste condiții cât și din sensurile momentelor M_{xy} și M_{yx} rezultă că cele două forțe concentrate, reprezentate în Fig. 1.11., *a*, în punctul $x = a$ și $y = b$ sunt direcționate în jos. Din considerente de simetrie rezultă că forțele concentrate au aceeași mărime și același sens în toate colțurile plăcii (Fig. 1.11., *b*) unde:

$$R = 2 \left(M_{xy} \right)_{x=a, y=b} = 2D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b}. \quad (1.35)$$

Se observă, dacă o placă dreptunghiulară este uniform încărcată, colțurile acesteia au în general tendința de a se ridica și această tendință este stopată de reacțiunile concentrate din colțuri, așa cum este reprezentat în Fig. 1.11., *b*.

Pe marginea liberă forța tăietoare generalizată este nulă. Acest lucru nu înseamnă că ambii termeni – forța tăietoare și momentul de torsiune, sunt nuli. Prin urmare, pe latura liberă se obține o soluție provenită din tensiuni tangențiale τ_{zx} (corespunzător Q_x) și τ_{yx} (corespunzător M_{xy}). Aceste eforturi sunt echilibrate în secțiune și, conform principiului Saint-Venant, le corespunde un câmp suplimentar de tensiuni, care se atenuează rapid pe măsura depărtării de colț spre interiorul plăcii și nu influențează starea de tensiune a întregii plăci.

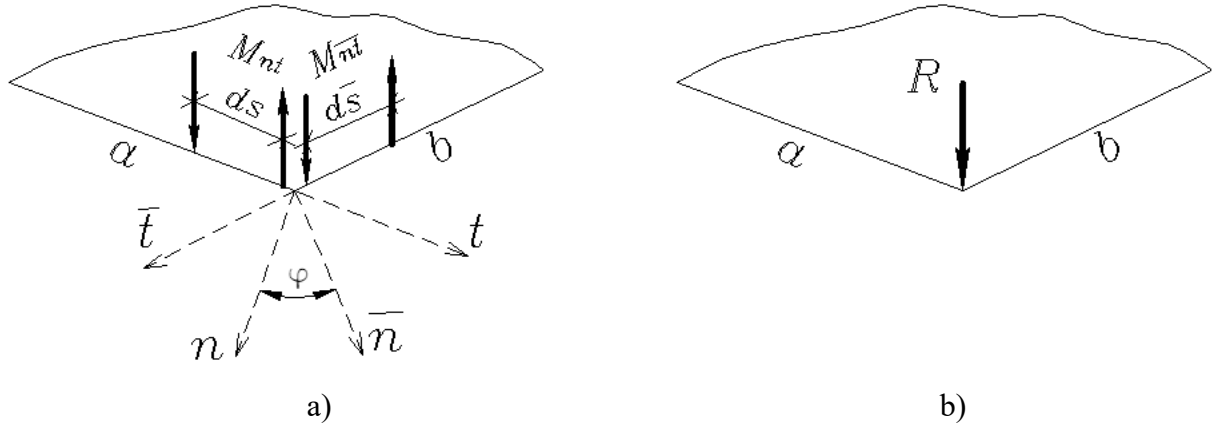


Fig. 1.12. Reacțiuni în colțurile plăcii

Dacă laturile plăcii se întâlnesc în punctul de colț sub un unghi diferit de 90° , atunci valoarea reacțiunii R va depinde de unghiul dintre aceste laturi (Fig. 1.12., a). Valoarea acestei reacțiuni va fi:

$$R = M_{\bar{n}\bar{t}} - M_{nt} = -D(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{n} \partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \right) \right]. \quad (1.36)$$

Înlocuind variabilele \bar{n} și \bar{t} cu n și t , forța R poate fi scrisă sub forma:

$$R = -2M_{nt} \sin^2 \varphi - \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right) \sin 2\varphi. \quad (1.37)$$

Dacă ambele laturi, la intersectarea lor, formează un unghi de 90° , atunci expresia reacțiunii R capătă forma:

$$R = -2M_{nt}. \quad (1.38)$$

Posibilitatea apariției forței concentrate R în punctul de intersecție a două laturi, depinde de modul lor de rezemare (Fig. 1.12.):

- Dacă laturile a și b sunt ambele încastrate, atunci:

$$M_{nt} = M_{\bar{n}\bar{t}} = 0, \quad (1.39.)$$

de unde rezultă că și reacțiunea R va fi nulă, indiferent de unghiul φ .

- Dacă laturile a și b sunt ambele simplu rezemate, sau dacă una dintre acestea este simplu rezemată, iar cealaltă liberă, atunci sunt îndeplinite următoarele condiții:

$$M_n = M_t = M_{\bar{n}} = 0. \quad (1.2.40.)$$

Totodată

$$\begin{aligned} M_{\bar{n}} &= M_{nt} 2cs = M_{nt} \sin 2\varphi = 0; \\ M_{\bar{nt}} &= M_{nt} (c^2 - s^2) = M_{nt} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (1.41)$$

De unde rezultă că pentru $\varphi \neq \pm\pi/2$ nu va apărea reacțiune concentrată în colț și numai pentru $\varphi = \pm\pi/2$ valoarea nenulă a reacțiunii se va determina din relația (1.38).

- Dacă latura a este simplu rezemată, iar latura b este încastrată, atunci se respectă următoarele condiții:

$$M_n = M_t = M_{\bar{nt}} = 0; \quad (1.42)$$

$$M_{\bar{nt}} = M_{nt} \cos 2\varphi = 0. \quad (1.43)$$

Astfel, pentru $\varphi \neq \pm\pi/4$ și $\varphi \neq \pm3\pi/4$ este necesar ca $M_{nt} = 0$ și, prin urmare, $R = 0$. Iar pentru $\varphi = \pm\pi/4$ și $\varphi = \pm3\pi/4$ se obține

$$R = -M_{nt}. \quad (1.44)$$

- Dacă latura a este liberă, iar latura b este încastrată, atunci reacțiunea R se determină cu ajutorul relației (1.44), deoarece $M_{\bar{nt}} = 0$.
- Dacă ambele laturi a și b sunt libere, atunci pentru determinarea reacțiunii de colț se va utiliza expresia (1.37).

1.3. Teoria Reissner a încovoierii plăcilor

Ca și în cazul grinzilor, de regulă, la calculul plăcilor conform ipotezelor teoriei clasice influența forțelor transversale asupra săgeții este neglijată. Însă, pentru grinzi scurte sau plăci de grosime considerabilă această influență devine mai pronunțată, și trebuie inclusă în calcul. Mai mulți cercetători sau ocupat de această problemă. Printre aceștia se numără: Reissner [104-106], Midlin [86], Love [80], Timoshenko și Woinowsky-Krieger [123], Huber [52] etc. În acest subcapitol va fi examinată doar teoria propusă de Reissner.

În teoria lui Reissner se introduce sistemul alcătuit din două ecuații diferențiale, dintre care una este de ordinul patru, iar cealaltă de ordinul doi. Acest lucru îndeplinește trei condiții de frontieră, pe când, după cum bine se știe, în teoria clasică pot fi prescrise doar două condiții. Soluția generală a sistemului de ecuații este prezentată sub forma a două funcții plane armonice și o funcție, care reprezintă soluția generală a ecuației $\Delta\psi - (10/h^2)\psi = 0$.

1.3.1. Introducerea ecuațiilor de bază în teoria lui Reissner

La fel ca și în teoria clasică a plăcilor subțiri, se propune ca distribuția tensiunilor σ_x , σ_y și τ_{xy} să fie liniară pe grosimea plăcii:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x}{h^3} z; \\ \sigma_y &= \frac{12M_y}{h^3} z; \\ \tau_{xy} &= -\frac{12M_{xy}}{h^3} z. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

Substituind expresiile (1.45) în primele două ecuații diferențiale de echilibru se obțin relațiile pentru tensiuni provenite de la forțele de forfecare distribuite după legea pătratică pe grosimea plăcii.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]; \\ \tau_{yz} &= \frac{3Q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Înlocuind relațiile (1.46) în a treia ecuație diferențială de echilibru, se obține expresia pentru tensiunea normală σ_z (funcție cubică):

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \Delta \Delta w - \frac{q(x, y)}{2} = -\frac{q(x, y)}{2} \left(1 + 3 \frac{z}{h} + 4 \frac{z^3}{h^3} \right), \quad (1.47)$$

unde $\Delta \Delta w = \frac{q(x, y)}{D}$.

Înlocuind tensiunile prin eforturi interioare, ecuațiile diferențiale de echilibru capătă forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0; \\ \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

Relațiile (1.48) reprezintă ecuațiile de echilibru în eforturi interioare.

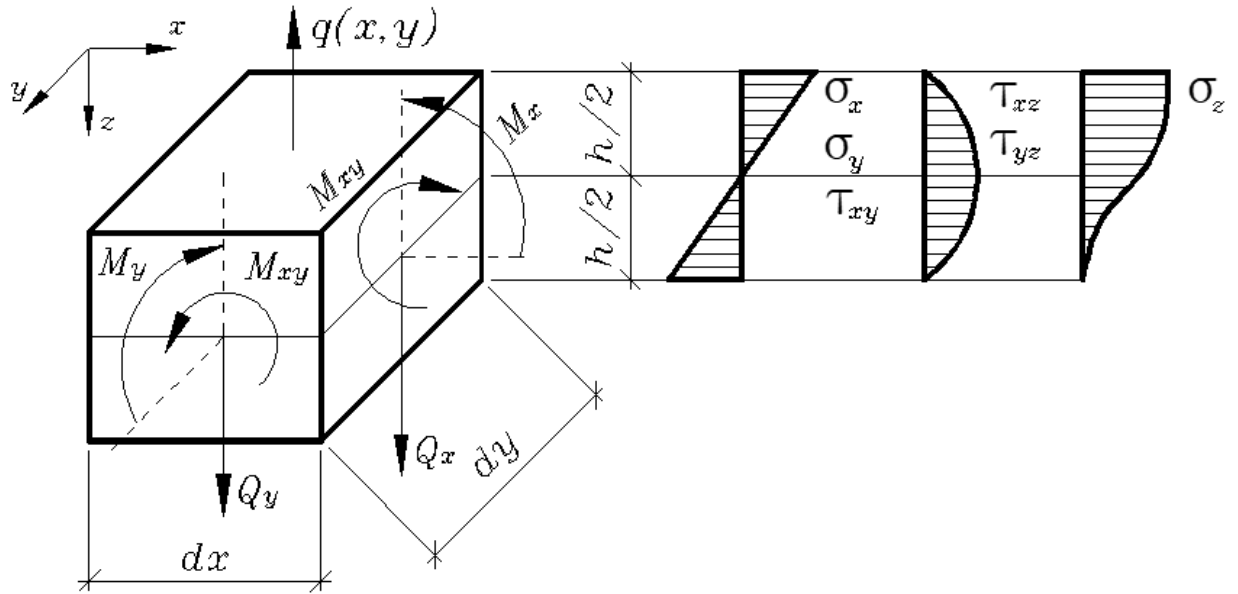


Fig. 1.13. Variația tensiunilor pe grosimea plăcii

Apoi, se va considera legea lui Hooke și se vor substitui deformațiile cu deplasările

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \frac{\partial u_0}{\partial x} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; & \frac{\partial v_0}{\partial y} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; & \Rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\
 \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}; & \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}; \\
 \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}; & \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} &= \frac{1}{G} \tau_{yz};
 \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

unde u_0 , v_0 , w_0 – reprezintă deplasările reale.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \\
 \frac{\partial w_0}{\partial z} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].
 \end{aligned}$$

Aceste ecuații nu satisfac legea de distribuție liniară pentru tensiunile σ_x și σ_y .

Reissner a propus să se introducă deplasări medii. Valorile medii pentru deplasări pot fi obținute egalând lucrul rezultatelor tensiunilor exprimate prin deplasări reale cu cele ale eforturilor exprimate prin deplasări medii (Fig. 1.4.):

- forța rezultantă a tensiunilor normale va fi:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot 1 \cdot dz = N_x = 0;$$

- momentul rezultant al tensiunilor normale:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = M_x;$$

- lucrul eforturilor distribuite:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot u_0 \cdot dz = M_x \cdot \theta_x.$$

Prin analogie se obțin următoarele expresii:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot u_0 \cdot dz &= M_x \cdot \theta_x; \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot v_0 \cdot dz &= M_y \cdot \theta_y; \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} \cdot w_0 \cdot dz &= Q_x \cdot w; \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \cdot v_0 \cdot dz &= M_{yx} \cdot \theta_y; \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot u_0 \cdot dz &= M_{xy} \cdot \theta_x; \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} \cdot w_0 \cdot dz &= Q_y \cdot w. \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

Se vor utiliza expresiile pentru tensiuni, în rezultat, se obțin formulele pentru deplasările medii:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{u_0 \cdot z}{h} dz; \\ \theta_y &= \frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{v_0 \cdot z}{h} dz; \\ w &= \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} w_0 \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Tensiunile medii pot fi exprimate prin deplasări reale:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \end{aligned} \right\}$$

unde

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{q(x,y)}{2} \left(1 - 3\frac{z}{h} + 4\frac{z^3}{h^3} \right); \\ \sigma_x - \nu\sigma_y &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\nu}{E} \sigma_z; \\ \sigma_y - \nu\sigma_x &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu}{E} \sigma_z, \end{aligned} \right\}$$

din care rezultă:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{q(x,y)}{2} \left(1 - 3\frac{z}{h} + \frac{4z^3}{h^3} \right); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{q(x,y)}{2} \left(1 - 3\frac{z}{h} + \frac{4z^3}{h^3} \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

Se vor considera două expresii pentru τ_{xz} :

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \quad \text{și} \quad \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right).$$

În continuare, egalând părțile drepte ale ambelor expresii înmulțindu-le la $3[1 - (2z/h)^2]/2h$ și integrând după variabila z în intervalul $[-h/2; +h/2]$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial u_0}{\partial z} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz + \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz &= \frac{9Q_x}{4h^2 G} \int_{-h/2}^{h/2} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz; \\ \frac{9Q_x}{4h^2 G} \int_{-h/2}^{h/2} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz &= \frac{12Q_x(1+\nu)}{5Eh}; \\ \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz &= \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

se obține:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{12Q_x(1+\nu)}{5Eh}; \\ \theta_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{12Q_y(1+\nu)}{5Eh}. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Rezultă 8 necunoscute: $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, w, \theta_x, \theta_y$ și 8 ecuații:

- 3 ecuații de echilibru în eforturi interioare;
- 3 ecuații pentru M_x, M_y, M_{xy}
- 2 ecuații pentru θ_x, θ_y

Pentru micșorarea numărului de necunoscute și simplificarea ecuațiilor, se va exclude θ_x și θ_y din expresiile pentru M_x, M_y , și M_{xy}

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu}; \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu}; \\ M_{xy} &= (1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Substituind expresiile pentru M_x, M_y , și M_{xy}

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \Rightarrow Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{h^2}{10} \Delta Q_x - D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x}$$

sau

$$\left. \begin{aligned} Q_x - \frac{h^2}{10} \Delta Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x}; \\ Q_y - \frac{h^2}{10} \Delta Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

Dacă grosimea plăcii $h=0$ se obțin expresiile respective ale teoriei clasice. Conform teoriei lui Reissner rezultă că expresiile și ecuațiile teoriei clasice sunt valabile doar pentru plăcile subțiri.

Din a treia ecuație de echilibru (1.48) se obține ecuația diferențială a suprafeței mediane în teoria lui Reissner.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \Rightarrow \boxed{D\Delta\Delta w = q - \frac{h^2(2-\nu)}{10(1-\nu)}\Delta q} \quad (1.56)$$

Rezolvarea ecuației are forma:

$$w = w^* + w^{**},$$

unde: w^* – rezolvarea ecuației omogene fără partea dreaptă, $w^* \Rightarrow D\Delta\Delta w = 0$;

w^{**} – rezolvarea particulară a ecuației neomogene.

Ecuația primită este de ordinul patru, deci pot fi prescrise câte două condiții la limită pentru fiecare latură a plăcii. Pentru obținerea ecuației suplimentare, se introduce în relațiile (1.55) o funcție nouă – funcția de tensiune.

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{\partial \psi}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

unde $\boxed{\psi(x, y)}$ – funcția de tensiune.

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= Q_x^* + Q_x^{**} \\ Q_y &= Q_y^* + Q_y^{**} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} Q_x &= Q_x^{**} - D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w^* + \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ Q_y &= Q_y^{**} - D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w^* - \frac{\partial \psi}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

Q_x^* , Q_y^* sunt validate prin ecuațiile:

$$\left. \begin{aligned} Q_x^* - \frac{h^2}{10} \Delta Q_x^* &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w^{**} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x}; \\ Q_y^* - \frac{h^2}{10} \Delta Q_y^* &= -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w^{**} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

Dacă se va substitui (1.58) cu (1.55) se va obține:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\psi - \frac{h^2}{10} \Delta \psi \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi - \frac{h^2}{10} \Delta \psi \right) = 0; \quad (1.60)$$

$$\psi - \frac{h^2}{10} \Delta \psi = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \psi - \frac{10}{h^2} \psi = 0.} \quad (1.61)$$

Relația (1.61) reprezintă ecuația diferențială suplimentară de ordinul doi care oferă posibilitatea de a introduce încă o condiție la limită.

1.3.2. Formularea condițiilor la limită în teoria generalizată (Reissner)

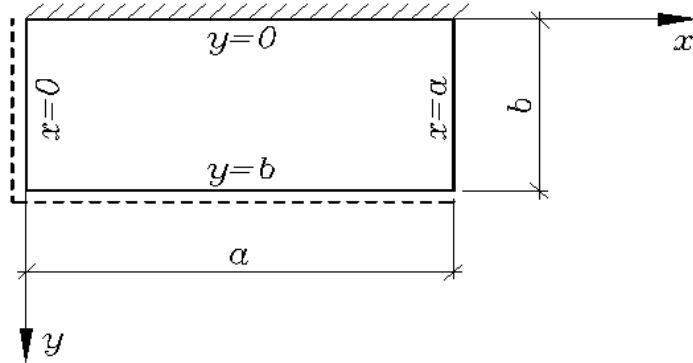


Fig. 1.14. Placă dreptunghiulară având diferite moduri de rezemare

- **Latura încastrată.**

$$\text{Pentru } y = 0; \left. \begin{array}{l} w = 0; \\ \theta_x = 0; \\ \theta_y = 0. \end{array} \right\} - \text{tip cinematic.}$$

- **Latura simplu rezemată.**

$$\text{Pentru } x = 0; \left. \begin{array}{l} w = 0; \\ M_x = 0; \\ M_{yx} = 0. \end{array} \right\} - \text{tip mixt.}$$

- **Latura liberă.**

$$\text{Pentru } x = a; \left. \begin{array}{l} M_x = 0; \\ Q_x = 0; \\ M_{yx} = 0. \end{array} \right\} - \text{tip static.}$$

În cazul **elementului de contur curbiliniu**, dat de normala n și tangenta la suprafață t (Fig. 1.10.), se poate de fixat poziția elementului cu ecuațiile:

$$w = \bar{w}; \quad \theta_n = \bar{\theta}_n; \quad \theta_t = \bar{\theta}_t. \quad (1.62)$$

Aici \bar{w} reprezintă săgeata medie, iar $\bar{\theta}_n$ și $\bar{\theta}_t$ – unghiurile medii de rotire ale elementului în raport cu axele n și t . În cazul laturii încastrate aceste ecuații capătă forma:

$$w = 0; \quad \theta_n = 0; \quad \theta_t = 0. \quad (1.63)$$

Condițiile la limită pot fi exprimate și prin valorile eforturilor $\overline{Q_n}$, $\overline{M_n}$, $\overline{M_{nt}}$, atunci acestea vor căpăta forma:

$$Q_n = \overline{Q_n}; \quad M_n = \overline{M_n}; \quad M_t = \overline{M_{nt}}. \quad (1.64)$$

Pentru latura liberă aceste condiții capătă forma $Q_n = 0$, $M_n = 0$, $M_{nt} = 0$, iar pentru latura simplă rezemată $w = 0$, $M_n = 0$, $M_{nt} = 0$. În ultimul caz dispar reacțiunile concentrate în colțurile plăcii, care apar în teoria clasică.

1.4. Concluzii la Capitolul 1

După cum a fost menționat anterior, teoria clasică a încovoierii plăcilor subțiri permite de a satisface mai puține condiții la limită decât există în realitate. De exemplu, de-a lungul laturii libere, în realitate există trei condiții în loc de două: forța de forfecare, momentul de încovoiere și momentul de torsiune trebuie egalate cu zero. Kirchhoff a demonstrat, că ipotezele admise în formularea clasică sunt responsabile de reducerea condițiilor la limită de la trei la două. Totodată, transformând momentul de torsiune în cupluri de forță se obțin nu numai forțe transversale distribuite de-a lungul laturilor, dar și forțe concentrate în colțurile plăcii.

În teoria clasică influența forțelor transversale asupra săgeții este neglijată. Prin urmare, teoria clasică poate fi aplicată cu succes doar la calculul plăcilor subțiri, pentru care această influență este minimă. Pentru plăci de grosime medie, neglijarea deformațiilor transversale în calcul poate duce la erori considerabile.

Teoria propusă de Reissner, în mare măsură este lipsită de restricțiile enunțate mai sus. În această teorie sunt luate în considerație deformațiile transversale, astfel, ea se dovedește a fi aplicabilă și la calculul plăcilor de grosime medie. Introducerea ecuației diferențiale suplimentare de ordinul doi face posibilă îndeplinirea tuturor condițiilor la limită necesare, astfel pentru fiecare latură pot și trebuie să fie satisfăcute trei condiții în loc de două. Prin urmare, în colțurile plăcilor nu vor mai apărea reacțiuni concentrate.

Odată cu dezvoltarea tehnicii de calcul, în baza ipotezelor admise atât în teoria clasică a plăcilor, cât și în teoria Reissner au fost elaborate metode numerice de calcul, cum ar fi: metoda elementelor finite (MEF) și metoda elementelor de frontieră (MEFr).

2. METODE NUMERICE DE CALCUL

Odată cu apariția tehnicii moderne de calcul, metodele numerice [40] au cunoscut și ele o dezvoltare intensă, în comparație cu cele analitice. Metodele numerice pot fi aplicate la rezolvarea unui spectru mai larg de probleme ale teoriei elasticității, deoarece soluționează aproximativ ecuațiile fundamentale ale teoriei elasticității.

Cele mai utilizate metode de calcul pentru rezolvarea problemelor de elasticitate, termoelasticitate, elastoplasticitate, mecanica ruperii materialelor sunt:

- a) Metoda Diferențelor Finite – MDF;
- b) Metoda Elementelor Finite – MEF;
- c) Metoda Elementelor de Frontieră – MEFr.

Alegerea unei anumite metode numerice de calcul depinde de mai mulți factori: generalitatea problemei, complexitatea acesteia, cunoașterea metodei de calcul, existența unui program de calcul etc. Pentru probleme simple, pot fi folosite metodele analitice. Trebuie de menționat faptul că nu orice metodă analitică este exactă. De exemplu, în cazul dezvoltării în serie, exactitatea soluțiilor depinde de tipul seriei, de convergența acesteia și de numărul de termeni utilizați în calcul.

Metodele numerice sunt folosite pe larg la calculul structurilor, deoarece acestea oferă posibilitatea de a crea softuri și de a rezolva probleme practice din inginerie, pentru care metodele analitice nu oferă soluții sau rezultate satisfăcătoare. La momentul actual cea mai utilizată metodă numerică de calcul este MEF, datorită generalității și simplității acesteia în procesul de programare.

În acest capitol vor fi prezentate doar MEF și MEFr, deoarece actualmente MDF practic nu mai este utilizată.

2.1. Metoda elementelor finite

Metoda elementelor finite (MEF) actualmente este cea mai utilizată metodă numerică de calcul a plăcilor [90, 136]. MEF este foarte eficientă pentru studierea multiplelor probleme extrem de variate din diferite domenii de activitate ale inginerului. MEF, de regulă, determină rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice cu un număr mare de necunoscute. Din acest motiv, aceasta este strâns legată de utilizarea calculatoarelor. Un șir de softuri au fost create pe baza MEF așa cum sunt: Ansis, AxisVM, Nastran, SCAD, Lira etc.

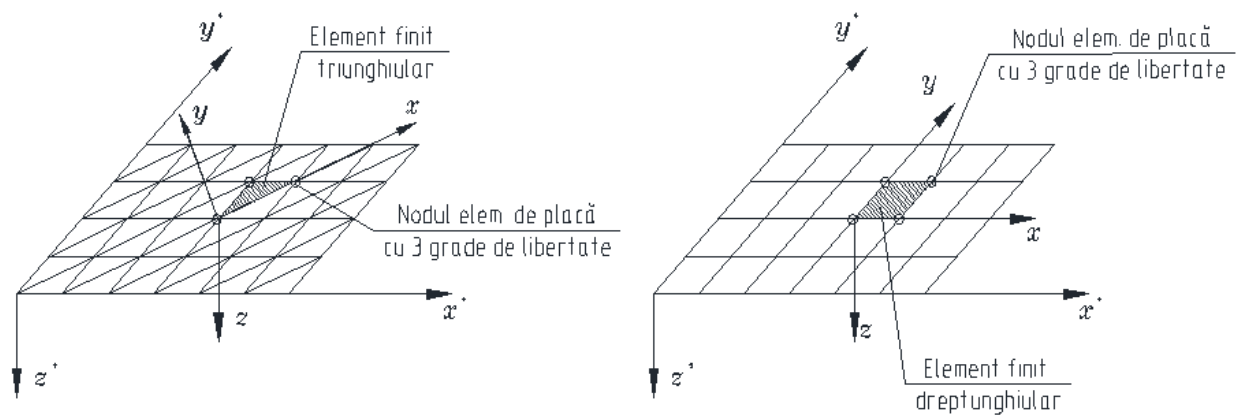


Fig. 2.1. Tipuri de elemente finite

În MEF placa este prezentată ca o structură discretizată în elemente finite triunghiulare sau dreptunghiulare (Fig. 2.1.). Cel mai simplu element finit utilizat la modelarea plăcilor este elementul triunghiular cu 3 noduri, având câte 3 grade de libertate în fiecare nod (w, φ_x, φ_y) (Fig. 2.2.). Principalul avantaj al elementului triunghiular față de alte elemente finite constă în posibilitatea de a aproxima cu o exactitate mai mare conturul plăcilor de diferită configurație.

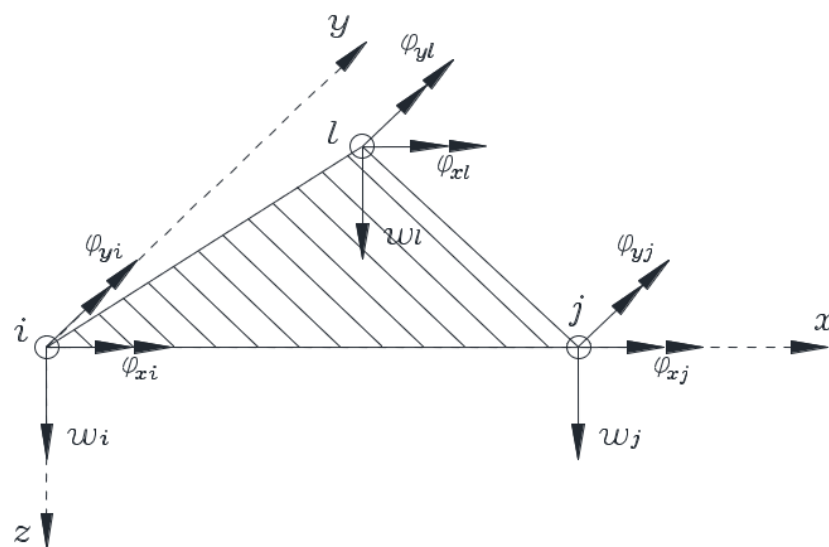


Fig. 2.2. Element finit triunghiular

Problema de bază a MEF este de a determina matricea de rigiditate a elementului finit. Pentru elementul finit triunghiular, matricea de rigiditate în coordonate locale are forma:

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_{44}^* & 0 & k_{46}^* & k_{47}^* & k_{48}^* & k_{49}^* \\ & & & & k_{55}^* & 0 & 0 & k_{58}^* & 0 \\ & & & & & k_{66}^* & k_{67}^* & k_{68}^* & k_{69}^* \\ & & & & & & k_{77}^* & k_{78}^* & k_{79}^* \\ & & & & & & & k_{88}^* & k_{89}^* \\ & & & & & & & & k_{99}^* \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

simetric

Coeficienții nenuli din (2.1) au forma:

$$\begin{aligned} k_{44}^* &= 2cx_j y_l; & k_{78}^* &= vcx_j y_l (x_j^2 + x_j x_l + x_l^2); & k_{58}^* &= c\gamma y_l^2 x_j / 3; \\ k_{47}^* &= 2cx_j y_l (x_j + x_l); & k_{89}^* &= cx_j y_l^2 (x_j + 2x_l) / 2; & k_{68}^* &= 2cx_j y_l (x_j + x_l) / 3; \\ k_{49}^* &= 2vcy_l^2 x_j; & k_{99}^* &= 3cx_j y_l^3; & k_{77}^* &= 3cx_j y_l (x_j^2 + x_j x_l + x_l^2); \\ k_{66}^* &= 2cx_j y_l; & k_{46}^* &= 2vcx_j y_l; & k_{79}^* &= vcx_j y_l^2 (x_j + 2x_l) / 2; \\ k_{67}^* &= 2vcx_j y_l (x_j + x_l); & k_{48}^* &= 2vcx_j y_l (x_j + x_l) / 3; & k_{88}^* &= c [x_j y_l (x_j^2 + x_j x_l + x_l^2) + \gamma x_j y_l^3] / 3; \\ k_{69}^* &= 2cy_l^2 x_j; & k_{55}^* &= c\gamma x_j y_l / 2; \end{aligned} \quad (2.2)$$

unde $c = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; $\gamma = 2(1-\nu)$.

În coordonate globale matricea de rigiditate va avea forma:

$$[K] = [T]([C]^{-1})^T [K^*] [C]^{-1} [T]^T, \quad (2.3)$$

unde

$$[T] = \begin{bmatrix} [\lambda] & [0] & [0] \\ [0] & [\lambda] & [0] \\ [0] & [0] & [\lambda] \end{bmatrix} - \text{matricea de rotire}; \quad [\lambda] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & 0 & x_j^2 & 0 & 0 & x_j^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_j & 0 & 0 & -3x_j^2 & 0 & 0 \\ 1 & x_l & y_l & x_l^2 & x_l y_l & y_l^2 & x_l^3 & x_l y_l^2 & y_l^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_l & 2y_l & 0 & 2x_l y_l & 3y_l^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_l & -y_l & 0 & -3x_l^2 & -y_l^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistemul global de ecuații al structurii analizate are forma:

$$[K]^{sist} \{\delta\} = \{F\}, \quad (2.4)$$

unde: $[K]^{sist}$ – reprezintă matricea globală de rigiditate;

$\{\delta\} = [w_i \ \varphi_{xi} \ \varphi_{yi} \ w_j \ \varphi_{xj} \ \varphi_{yj} \ w_l \ \varphi_{xl} \ \varphi_{yl}]$ – vectorul parametrilor nodali;

$\{F\} = [T]\{F^*\}$ – vectorul forțelor nodale în sistemul global de coordonate;

$\{F^*\}$ – vectorul încărcărilor nodale în sistemul local de coordonate.

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații sunt folosite diferite metode: Gauss, Choleski ș.a., care oferă posibilitatea de a obține vectorul deplasărilor $\{\delta\}$, adică valorile în noduri ale funcțiilor căutate. Cu ajutorul deplasărilor nodale obținute pot fi calculate tensiunile și eforturile în fiecare element finit.

De menționat că tensiunile în limitele fiecărui element sunt constante. De regulă, aceste valori sunt considerate în centrul de greutate al elementului finit. Tensiunile în noduri se calculează ca media aritmetică a tensiunilor din centrul de greutate a elementelor învecinate nodului respectiv. Metoda de mediere oferă rezultate mai satisfăcătoare pentru nodurile interioare și mai puțin satisfăcătoare pentru cele de pe frontiera plăcii.

2.2. Metoda elementelor de frontieră

2.2.1. Istoria dezvoltării metodei elementelor de frontieră

Soluțiile numerice aproximative ale problemelor de frontieră pentru ecuații diferențiale parțiale au început să fie puse în practică abia la începutul anilor 1960 [129]. Acest lucru a fost posibil datorită dezvoltării tehnologiilor informaționale ce au permis construcția calculatoarelor performante, capabile să stocheze mii de instrucțiuni și date, și totodată au fost create primele limbaje de programare.

Primele soluții propuse pentru rezolvarea ecuațiilor integrale de frontieră se întâlnesc în lucrările lui Jawsan, Ponter și Symm [56-58, 121]. Soluțiile obținute pentru ecuația Laplace în calculul bidimensional sunt cunoscute ca *formularea directă* a metodei elementelor de frontieră [2, 3, 13-16, 120, 121], în care funcția Green [26, 27, 84, 111, 119] pentru un domeniu infinit este înlocuită cu identitatea simetrică Green pentru a obține ecuația integrală de frontieră. Implementarea numerică este foarte simplă, funcția și derivata ei în raport cu normala sunt considerate constante pe fiecare segment de frontieră. Cu toate acestea, metoda s-a dovedit a fi o alternativă promițătoare la metoda diferențelor finite și a elementelor finite. Însă, în 1963, când această lucrare [58] a fost publicată, metoda elementelor finite era deja destul de cunoscută, și în ciuda rezultate remarcabile prezentate de Jawsan și colegii săi, această lucrare, în mare parte, a fost ignorată.

Contribuții semnificative în dezvoltarea MEFr sunt prezentate în lucrările cercetătorilor georgieni Muskhelishvili [95, 96] și Kupradze [145], prin care calculul tridimensional poate fi redus la soluția unei singure ecuații integrale de frontieră, exprimată prin funcția săgeții. Aceasta reprezintă *formularea indirectă* a metodei elementelor de frontieră [10, 11, 14, 127].

Cercetătorul Banerjee a propus o versiune specială a metodei indirecte [6], iar Brebbia [13-16] a introdus pentru prima dată noțiunea de „element de frontieră”.

Ideea de bază a lui Jawsan și colegii săi a fost dezvoltată de Rizzo [108, 109] pentru starea de tensiune-deformație a elasticității plane, iar mai târziu de Cruse [24] pentru problema tridimensională. Baza teoretică pentru lucrarea lui Rizzo au fost: teorema lui Betti, care este analogică cu identitatea simetrică Green, și soluția fundamentală a stării de tensiune plană. Rizzo a prezentat unele condiții pentru existența unei soluții, și necesitatea de a calcula valoarea principală Cauchy a ecuației integrale.

Începând cu anii 1970, nu mai era necesar de a demonstra că metodele elementelor de frontieră funcționează, dar deja prezenta un interes deosebit îmbunătățirea acestora. Primul pas în acest sens a fost făcut de către Riccardella [107], care a elaborat un program de calcul pentru

problema stării de tensiune plane, în care deplasările și eforturile variază liniar în fiecare element. Însă, acest lucru contribuie la rezolvarea unor ecuații integrale mai complicate și prezintă o dificultate de a prescrie ecuația integrală în colțuri. Aceasta se datorează faptului că nodurile sunt situate la capetele elementului, dar nu în centrul său. Elementele erau încă liniare, și din această cauză necesita un număr mai mare pentru a descrie un contur curbiliniu.

Cercetările în domeniul elementelor de frontieră au atins apogeul între anii 1980 și 1990. Timp în care au început să se dezvolte sisteme de calcul precum: BEASY (Marea Britanie), BETSY (Germania), BEST3D (SUA). Mai multe lucrări au fost scrise, însă un dezavantaj aparent îl constituia faptul că MEFr era eficientă doar pentru calculul liniar, dar nu și pentru problemele neliniare. Formularea indirectă a metodei a fost în mare parte uitată, cu excepția metodei panourilor în aerodinamică și metoda discontinuității deplasării în minerit [22, 23].

Ecuațiile integrale hipersingulare [46, 47, 59, 83, 93, 94] au un rol important la calculul fisurilor, întrucât o ecuație integrală unică nu oferă informații suficiente pentru calculul deplasărilor ambelor fețe. Metode de calcul ale integralelor hipersingulare includ: regularizarea lui Hadamard [48], soluții simple, aplicarea teoremei lui Stokes.

Începând cu anii 1990, deja calculele puteau fi efectuate cu ajutorul unui calculator personal în locul unui mainframe. Calculatoarele personale oferă o viteză de operare și memorie de stocare a informației net superioară mainframelor. Au fost introduse limbaje de programare noi, care facilitează procesul de programare și conferă posibilități mult mai avansate.

2.2.2. Metoda directă a elementelor de frontieră pentru plăci.

La baza MEFr directe se află teorema reciprocității lucrului mecanic (teorema Maxwell-Betti) și soluțiile fundamentale reprezentate de funcțiile de influență Green [26, 27, 84, 111, 119] pentru un domeniu infinit. Prin funcția Green se înțelege soluția ecuației diferențiale parțiale, în care termenul neomogen a fost înlocuit cu produsul funcțiilor delta, astfel, reprezentând efectul unei forțe concentrate. În consecință, soluția fundamentală satisface ecuația diferențială în orice punct al domeniului infinit cu excepția punctului sursă. În acest punct soluția va prezenta singularitate și va tinde la infinit.

Soluția fundamentală a ecuației diferențiale parțiale de ordinul patru (1.12) are forma:

$$w^*(P, Q) = \frac{r^2}{8\pi D} \ln(r), \quad (2.5)$$

unde Q reprezintă un punct al domeniului în care este dată soluția provenită de la o forță unitară

concentrată aplicată în punctul P , iar r reprezintă distanța dintre aceste două puncte (Fig. 2.3.). Aplicând soluția fundamentală (2.5) pentru o placă infinită acționată de o forță concentrată, ecuația plăcilor (1.11) capătă forma:

$$D\Delta\Delta w^*(x, y) = \delta(P, Q), \quad (2.6)$$

unde δ – funcția Dirac, are următoarea proprietate:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, \xi) dx = 1.$$

În continuare, va fi utilizată identitatea Gauss-Green pentru operatorul biarmonic sub forma

$$\iint_A (u\Delta\Delta v - v\Delta\Delta u) dA = \int_L \left(u \frac{\partial}{\partial n} \Delta v - \frac{\partial u}{\partial n} \Delta v - v \frac{\partial}{\partial n} \Delta u + \frac{\partial v}{\partial n} \Delta u \right) dL, \quad (2.7)$$

unde u și v sunt două funcții ce au derivate de ordinul patru în interiorul domeniului A , și derivate de ordinul trei pe frontiera L .

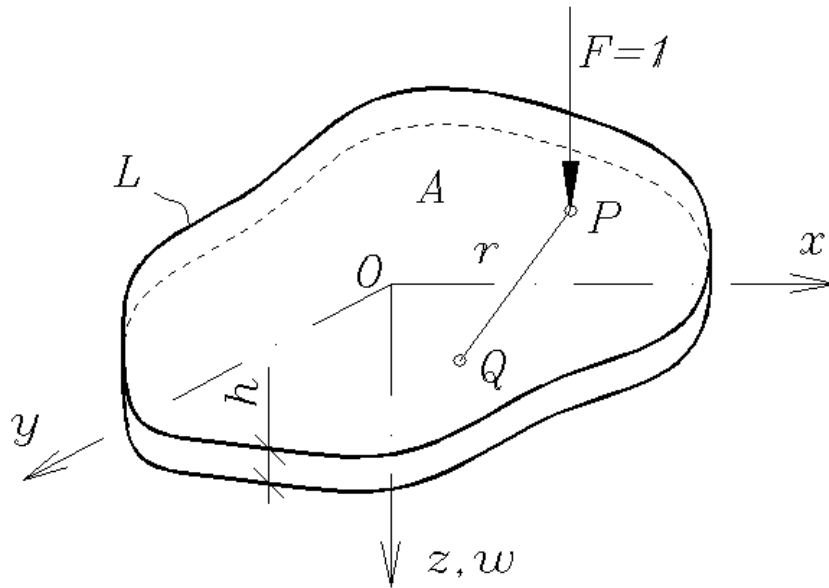


Fig. 2.3. Contur arbitrar de placă solicitat de o forță unitară concentrată

Dacă $u = w$ și $v = w^*$ atunci se obține următoarea relație:

$$\iint_A w\delta(P, Q) dA - \iint_A pw^* dA = D \int_L \left(w \frac{\partial}{\partial n} \Delta w^* - \frac{\partial w}{\partial n} \Delta w^* - w^* \frac{\partial}{\partial n} \Delta w + \frac{\partial w^*}{\partial n} \Delta w \right) dL. \quad (2.8)$$

Relația de mai sus reprezintă ecuația integrală generală a plăcilor la încovoiere. Aceasta mai poate fi exprimată de-a lungul frontierei prin unghiul de rotire pe direcția normalei θ_n ,

momentul încovoietor M_n , forța transversală generalizată V_n și reacțiunile de colț R_i . Dacă se vor efectua anumite operații matematice și se vor exclude condițiile de rezemare a frontierei, aceasta va căpăta forma:

$$Cw(P) - \int_L (M_n^* \theta_n + V_n^* W) dL - \sum_{i=1}^{N_c} W_i R_i^* = \iint_A p w^* dA, \quad (2.9)$$

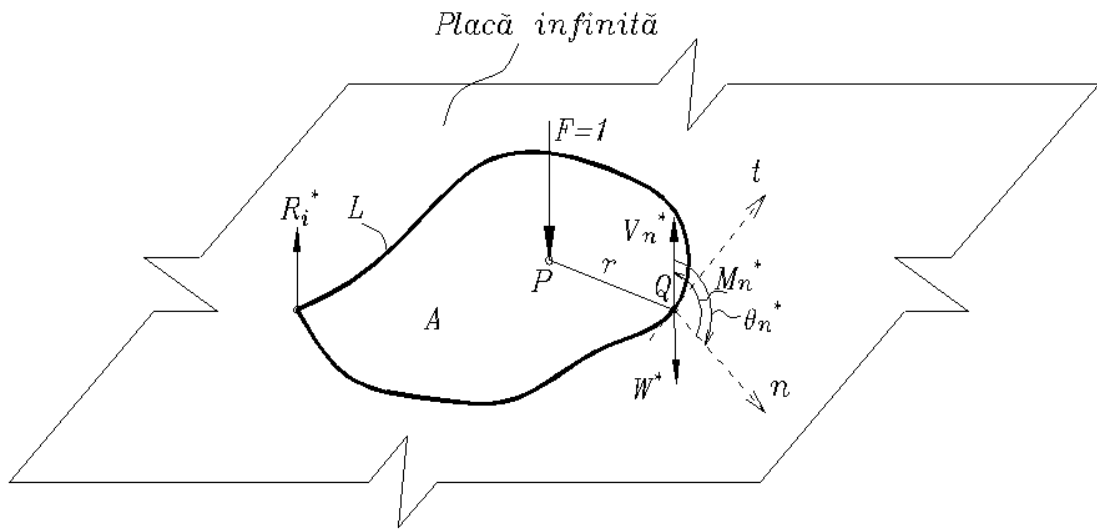


Fig. 2.4. Soluții fundamentale

unde W reprezintă deplasarea de-a lungul frontierei, iar N_c – numărul punctelor de colț. Parametrul C din această ecuație va fi egal cu o unitate dacă punctul P va fi situat în interiorul domeniului A și zero dacă punctul P va fi situat înafara lui.

În această formulare deplasarea W și unghiul de rotire pe direcția normalei θ_n sunt necunoscute. Prin urmare, sunt necesare două ecuații integrale. Prima ecuație integrală o constituie expresia (2.9), iar a doua ecuație se obține prin diferențierea ecuației fundamentale în raport cu normala n și are forma:

$$C \frac{\partial w(P)}{\partial n} - \int_L \left(\frac{\partial M_n^*}{\partial n} \theta_n + \frac{\partial V_n^*}{\partial n} W \right) dL - \sum_{i=1}^{N_c} W_i \frac{\partial R_i^*}{\partial n} = \iint_A p \frac{\partial w^*}{\partial n} dA, \quad (2.10)$$

unde $\partial w(P) / \partial n$ este unghiul de rotire pe direcția normalei în punctul P .

Ecuațiile (2.9) și (2.10) reprezintă formularea integrală pentru placă fără condiții de frontieră. Pentru a rezolva aceste două ecuații integrale este necesar de a discretiza frontiera plăcii în segmente. Un avantaj important al MEFr constă în faptul că ea oferă posibilitatea de a utiliza o gamă largă de elemente de frontieră. Cele mai frecvent utilizate elemente sunt: constante, liniare și parabolice (Fig.2.5.).

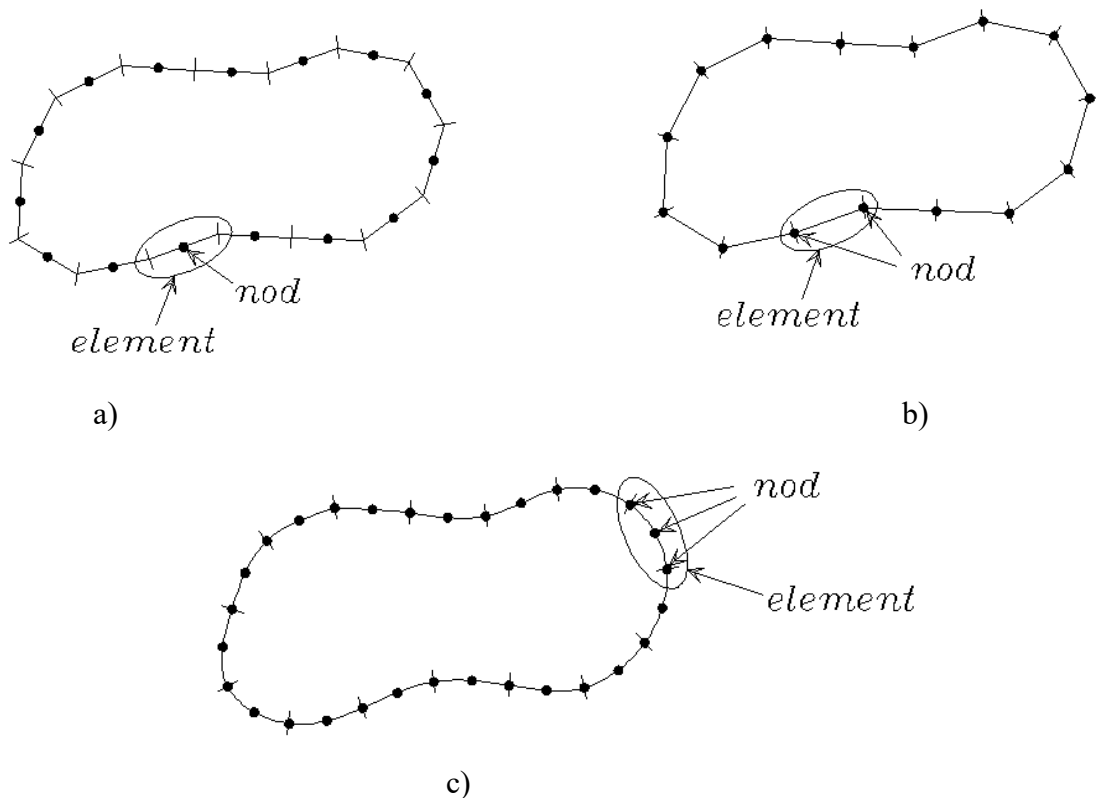


Fig. 2.5. Diferite tipuri de elemente de frontieră: constante (a); liniare (b); parabolice (c)

2.2.3. Metoda indirectă a elementelor de frontieră pentru plăci. Metoda extinderii sistemului dat.

O variantă a metodei indirecte a elementelor de frontieră, numită și metoda extinderii sistemului dat, a fost propusă de Lujin [147]. O abordare mai generală, bazată pe modele de potențial, este prezentată în lucrările lui Kupradze [145], Novatski [152], Cruse [24] ș.a. Această formulare se numește „indirectă” deoarece folosește funcții sau densități fictive care nu au nici o semnificație fizică, dar pot fi aplicate la calculul unor mărimi fizice cum sunt deplasările și tensiunile în cazul elasticității. În cadrul metodei indirecte, în prima etapă sunt rezolvate singularitățile, astfel încât să fie satisfăcute condițiile pe frontieră, iar în a doua etapă se calculează valorile necunoscute pe frontieră în funcție de soluțiile singulare.

Se va considera, că în sistemul cartezian de coordonate este dată o placă (Fig. 2.6.) acționată de o sarcină transversală $q(x,y)$ și în care sunt date condițiile de contur. În locul plăcii date se va examina o altă placă, de dimensiuni mari în plan, care ar include regiunea corespunzătoare plăcii inițiale. Forma acestei plăci și condițiile la limită trebuie să fie selectate în așa mod ca pentru aceasta să fie cunoscute soluțiile și, respectiv, să poată fi găsită funcția lui Green $G(x,y,\zeta,\eta)$, care determină săgeata în orice punct al plăcii extinse cu coordonatele x,y de la acțiunea unei forțe concentrate aplicată în punctul cu coordonatele ζ, η . Placa extinsă are același sens ca și

sistemul fundamental în mecanica structurilor.

Pe placa extinsă (Fig. 2.6.) acționează sarcina, care în regiunea ce coincide cu placa inițială de contur închis L este echivalentă cu sarcina $q(x,y)$, iar pe regiunea rămasă această sarcină poate fi arbitrară.

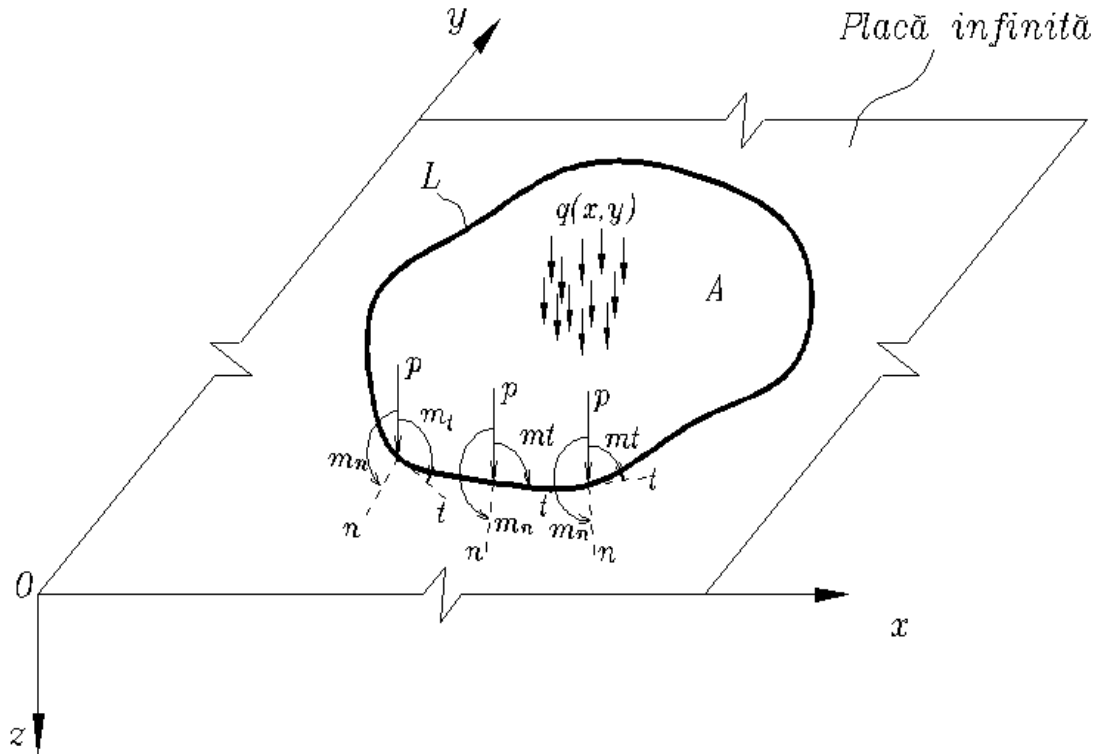


Fig. 2.6. Sarcini echivalente aplicate pe conturul plăcii

Pe placa extinsă se vor aplica încă trei tipuri de încărcări: sarcină liniar distribuită $p(s)$ și momentele $m_n(s)$, $m_t(s)$ a căror lege de variație pe conturul L sunt funcții necunoscute. Pentru a găsi aceste trei funcții este nevoie ca în placa extinsă să fie satisfăcute acele condiții la limită pe conturul L , care sunt identice cu cele ale plăcii inițiale.

Așadar, dacă marginea plăcii inițiale este încastrată, este necesar ca și în placa extinsă pe aceeași curbă săgeata și unghiurile de rotire a secțiunii în raport cu normala și tangenta la conturul L să fie nule. Dacă marginea plăcii este simplu rezemată, atunci pe curba L săgeata, momentele și unghiurile de rotire ale secțiunii în raport cu normala trebuie să fie nule.

Mai înainte de a purcede la determinarea ecuațiilor corespunzătoare, în cazul cercetat mai sus, care reprezintă nu altceva decât ecuațiile canonice ale metodei eforturilor, se vor examina în sistemul cartezian de coordonate soluțiile provenite atât de la acțiunea unei forțe unitare concentrate, cât și de la un moment unitar concentrat.

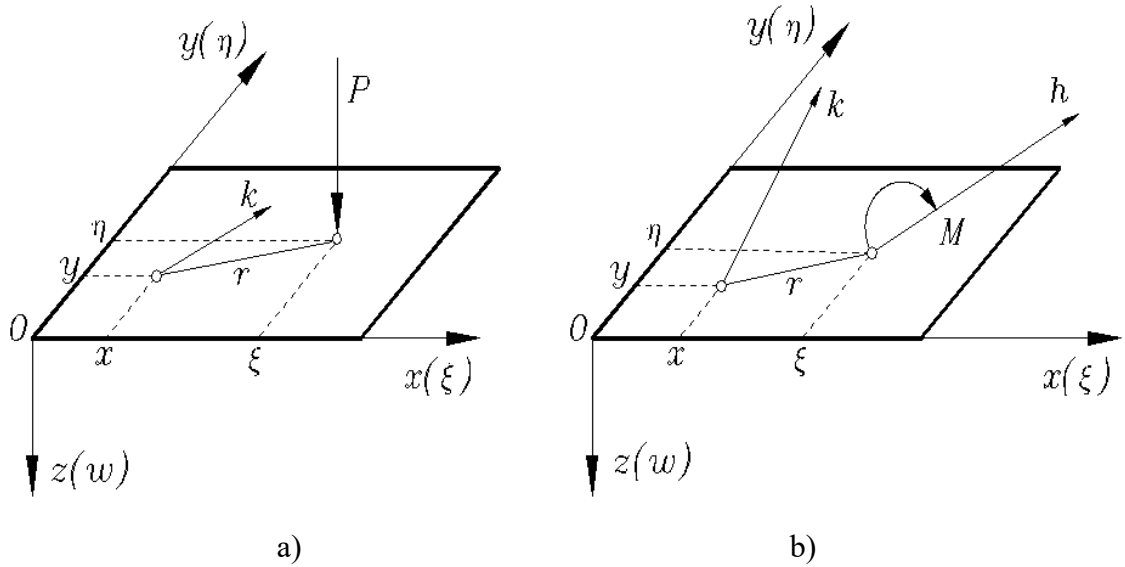


Fig. 2.7. Placă solicitată de forțe concentrate

Săgeata în orice punct cu coordonatele x, y (Fig. 2.7., a) de la o forță unitară concentrată, aplicată în punctul cu coordonatele ξ, η se determină utilizând funcția lui Green:

$$w(x, y) = G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r, \quad (2.11)$$

unde r este distanța dintre punctul de observație (x, y) și punctul de aplicare a forței unitare concentrate (ξ, η) .

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Unghiul de rotire tangențial la suprafața care se găsește într-un plan perpendicular planului xOy și care se intersectează cu acesta de-a lungul liniei k , având cosinusurile directoare $\cos(\widehat{k, x})$, $\cos(\widehat{k, y})$, de la acțiunea unei forțe unitare concentrate, se poate de prezentat sub forma:

$$\frac{\partial w}{\partial k} = \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial k} = \frac{\partial G}{\partial k} \cos(\widehat{k, x}) + \frac{\partial G}{\partial y} \cos(\widehat{k, y}). \quad (2.12)$$

Săgeata în orice punct (x, y) de la acțiunea unui moment unitar concentrat (Fig. 2.7., b), al cărui plan de acțiune coincide cu planul perpendicular la planul xOy și se intersectează cu acesta după linia h , se determină cu expresia:

$$w = \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial h} = \frac{\partial G}{\partial \xi} \cos(\widehat{h, x}) + \frac{\partial G}{\partial \eta} \cos(\widehat{h, y}). \quad (2.13)$$

Unghiul de rotire în direcția k de la acțiunea unui moment unitar concentrat pe direcția h va fi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial k} &= \frac{\partial^2 G(x, y, \xi, \eta)}{\partial h \partial k} = \frac{\partial^2 G}{\partial \xi \partial x} \cos(\widehat{h, x}) \cos(\widehat{k, x}) + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial x} \cos(\widehat{h, y}) \cos(\widehat{k, x}) + \\ &+ \frac{\partial^2 G}{\partial \xi \partial y} \cos(\widehat{h, x}) \cos(\widehat{k, y}) + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial y} \cos(\widehat{h, y}) \cos(\widehat{k, y}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Momentul de încovoiere în direcția k , de la o forță unitară concentrată:

$$\begin{aligned} M_k &= -D \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cos^2(\widehat{k, x}) + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \cos(\widehat{k, x}) \cos(\widehat{k, y}) + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \cos^2(\widehat{k, y}) + \right. \\ &\left. + \mu \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cos^2(\widehat{k, y}) - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \cos(\widehat{k, x}) \cos(\widehat{k, y}) + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \cos^2(\widehat{k, x}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

și de la un moment unitar concentrat, care acționează în direcția h :

$$\begin{aligned} M_k &= -D \left\{ \frac{\partial^3 G}{\partial \xi \partial x^2} \cos(\widehat{h, x}) \cos^2(\widehat{k, x}) + \frac{\partial^3 G}{\partial \eta \partial x^2} \cos(\widehat{h, y}) \cos^2(\widehat{k, x}) + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^3 G}{\partial \xi \partial x \partial y} \cos(\widehat{h, x}) \cos(\widehat{k, y}) \cos(\widehat{k, x}) + 2 \frac{\partial^3 G}{\partial \eta \partial x \partial y} \cos(\widehat{h, y}) \cos(\widehat{k, y}) \cos(\widehat{k, x}) + \\ &+ \frac{\partial^3 G}{\partial \xi \partial y^2} \cos(\widehat{h, x}) \cos^2(\widehat{k, y}) + \frac{\partial^3 G}{\partial \eta \partial y^2} \cos(\widehat{h, y}) \cos^2(\widehat{k, y}) + \mu \left[\frac{\partial^3 G}{\partial \xi \partial x^2} \cos(\widehat{h, x}) \cos^2(\widehat{k, y}) + \right. \\ &+ \frac{\partial^3 G}{\partial \eta \partial x^2} \cos(\widehat{h, y}) \cos^2(\widehat{k, y}) - 2 \frac{\partial^3 G}{\partial \xi \partial x \partial y} \cos(\widehat{h, x}) \cos(\widehat{k, y}) \cos(\widehat{k, x}) - \\ &- 2 \frac{\partial^3 G}{\partial \eta \partial x \partial y} \cos(\widehat{h, y}) \cos(\widehat{k, y}) \cos(\widehat{k, x}) + \frac{\partial^3 G}{\partial \xi \partial y^2} \cos(\widehat{h, x}) \cos^2(\widehat{k, x}) + \\ &\left. + \frac{\partial^3 G}{\partial \eta \partial y^2} \cos(\widehat{h, y}) \cos^2(\widehat{k, x}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dacă marginea plăcii inițiale este încastrată, atunci ecuațiile canonice pot fi obținute din următoarele considerente: săgeata, în orice punct al plăcii extinse, pe conturul L , provine: de la încărcarea exterioară w_q , de la sarcina liniar distribuită w_p și de la cele două momente w_{mn} și w_{mt} , care acționează de-a lungul conturului L . În sumă săgeata pe conturul L trebuie să fie nulă, astfel ca starea de tensiune și deformații a regiunii interioare mărginită de conturul L să fie echivalentă cu starea plăcii inițiale. Prin analogie se vor determina relațiile și pentru unghiurile de rotire. În final se obține următorul sistem de ecuații:

$$\left. \begin{aligned} w_p + w_{mn} + w_{mt} + w_q &= 0; \\ \frac{\partial w_p}{\partial n} + \frac{\partial w_{mn}}{\partial n} + \frac{\partial w_{mt}}{\partial n} + \frac{\partial w_q}{\partial n} &= 0; \\ \frac{\partial w_p}{\partial t} + \frac{\partial w_{mn}}{\partial t} + \frac{\partial w_{mt}}{\partial t} + \frac{\partial w_q}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Sistemul de ecuații (2.17) este valabil pentru orice punct de pe conturul L . Expresia pentru săgeata w_p se determină din acțiunea tuturor încărcărilor distribuite pe conturul L , și are forma:

$$w_p = \int_L p(s)G(x, y, s)ds. \quad (2.18)$$

Prin analogie se determină săgeata w_{mn} și w_{mt} :

$$w_{mn} = \int_L m_n(s) \frac{\partial w(x, y, s)}{\partial n} \partial s; \quad (2.19)$$

$$w_{mt} = \int_L m_t(s) \frac{\partial w(x, y, s)}{\partial t} \partial s. \quad (2.20)$$

Săgeata de la încărcarea exterioară, dacă se consideră că ea acționează doar pe regiunea A , mărginită de conturul L , va fi egal:

$$w_q = \iint_A q(\xi, \eta)G(x, y, \xi, \eta)d\xi d\eta. \quad (2.21)$$

De asemenea, prin derivarea expresiilor (2.18) – (2.20) se determină expresiile pentru termenii ecuației doi și trei din sistemul (2.17), după care ultima capătă forma:

$$\left. \begin{aligned} \int_L p(s)G(x, y, s)ds + \int_L m_n(s) \frac{\partial w(x, y, s)}{\partial n} \partial s + \int_L m_t(s) \frac{\partial w(x, y, s)}{\partial t} \partial s + \iint_A q(\xi, \eta)W(x, y, \xi, \eta)d\xi d\eta &= 0; \\ \int_L p(s) \frac{\partial w(x, y, s)}{\partial h} \partial s + \int_L m_n(s) \frac{\partial^2 w(x, y, s)}{\partial h \partial n} \partial s + \int_L m_t(s) \frac{\partial^2 w(x, y, s)}{\partial h \partial t} \partial s + \iint_A q(\xi, \eta) \frac{\partial w(x, y, \xi, \eta)}{\partial h} d\xi d\eta &= 0; \\ \int_L p(s) \frac{\partial w(x, y, s)}{\partial g} \partial s + \int_L m_n(s) \frac{\partial^2 w(x, y, s)}{\partial y \partial n} \partial s + \int_L m_t(s) \frac{\partial^2 w(x, y, s)}{\partial g \partial t} \partial s + \iint_A q(\xi, \eta) \frac{\partial w(x, y, \xi, \eta)}{\partial g} d\xi d\eta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

în relațiile de mai sus (2.22), prin h se înțelege direcția de-a lungul normalei la conturul L , iar prin g – direcția de-a lungul tangentei la contur.

Dacă se va înlocui sistemul de ecuații integrale primit cu un sistem de ecuații algebrice, și pe conturul L se va lua un număr i de puncte, și în fiecare punct se va aplica o forță concentrată

$P_i = p\Delta s$ și momente concentrate $M_{ni} = m_n\Delta s$ și $M_{ti} = m_t\Delta s$, atunci:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^i (P_j w_{kj} + M_{nj} w_{nkj} + M_{tj} w_{tkj}) + w_{qk} &= 0; \\ \sum_{j=1}^i (P_j \vartheta_{kj} + M_{nj} \vartheta_{nkj} + M_{tj} \vartheta_{tkj}) + \vartheta_{qk} &= 0; \\ \sum_{j=1}^i (P_j \psi_{kj} + M_{nj} \psi_{nkj} + M_{tj} \psi_{tkj}) + \psi_{qk} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

$$(k = 1, 2, \dots, i)$$

În ecuațiile (2.23) sunt utilizate următoarele notații:

w_{kj} – săgeata în punctul k de la o forță unitară, aplicată în punctul j ;

w_{nkj} – săgeata în punctul k de la un moment unitar, aplicat în punctul j în direcția normalei la conturul L ;

w_{tkj} – săgeata în punctul k de la un moment unitar, aplicat în punctul j în direcția tangentei la conturul L ;

w_{qk} – săgeata în punctul k de la încărcare exterioară.

Acelaș sens îl au coeficienții, care intră în ecuația a doua și a treia, numai că prin ϑ au fost notate unghiurile de rotire a normalei la contur în raport cu tangenta, iar prin ψ – unghiurile de rotire a tangentei în raport cu normala.

După rezolvarea sistemului de ecuații (2.23) poate fi găsită săgeata în orice punct cu coordonatele x, y de pe regiunea A :

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{j=1}^i P_j w_{kj}(x, y, a_j, b_j) + \sum_{j=1}^i M_{nj} w_{nkj}(x, y, a_j, b_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^i M_{tj} w_{tkj}(x, y, a_j, b_j) + w_q(x, y) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Momentul de încovoiere în orice punct se determină cu expresia:

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^i P_j \bar{M}_p + \sum_{j=1}^i M_{nj} \bar{M}_{nj} + \sum_{j=1}^i M_{tj} \bar{M}_{tj} + M_q. \quad (2.25)$$

Diferențiind expresia (2.24), pot fi determinate toate deplasările și eforturile căutate. În formula (2.25): \bar{M}_p – momentul în punctul dat de la forța unitară $P_i = 1$, iar \bar{M}_{nj} și \bar{M}_{tj} – momentele în punctul dat de la momentele unitare, aplicate în punctul j de pe contur în direcția normalei la contur și respectiv în direcția tangentei.

2.3. Concluzii la capitolul 2

În ultimele decenii, cea mai utilizată metodă numerică de calcul în diferite ramuri ale ingineriei este MEF. Cu ajutorul acestei metode pot fi rezolvate cu succes un spectru larg de probleme întâlnite în practică, așa cum sunt: calculul structurilor cu o geometrie arbitrară aflate sub acțiunea diferitor tipuri de încărcări, probleme bidimensionale și tridimensionale, calculul neliniar și dinamic. În ciuda răspândirii largi în tehnică, totuși, MEF se confruntă cu un șir de neajunsuri. Cele mai importante dintre ele sunt descrise mai jos:

- Discretizării este supus tot domeniul ocupat de corp. Prin urmare, apar dificultăți la crearea rețelei de elemente finite pentru corpuri cu o geometrie complicată, la prezența găurilor și colțurilor etc., deoarece regiunile critice necesită o rețea mai densă a discretizării.
- Modificarea modelului discretizat ce se referă la îmbunătățirea exactității rezultatelor sau de schimbarea geometriei corpului, necesită timp și efort considerabil.
- MEF este inefficientă pentru domenii infinite.
- Apar dificultăți la rezolvarea problemelor descrise de ecuații diferențiale de ordinul patru și mai mult (ecuația plăcilor, ecuația învelișurilor etc.)

Din contra, MEFr, atât în formularea directă cât și în cea indirectă, prezintă multe avantaje:

- Discretizării este supusă doar frontiera corpului, astfel, se simplifică modelarea geometriei și se reduce cu o unitate numărul de necunoscute. În așa mod, și modificarea modelului de calcul devine mai simplă.
- Metoda poate fi adaptată pentru domenii infinite.
- Ușor se poate de operat cu sarcini concentrate atât în interiorul plăcii, cât și la frontiera lui.
- Soluțiile pot fi obținute în orice punct al domeniului. Acest lucru este posibil deoarece MEFr folosește reprezentarea integrală a soluției, care poate fi diferențiată și poate fi utilizată ca formulă matematică. Acest lucru este imposibil în MEF deoarece soluția poate fi obținută doar în nodurile elementelor.

3. SOLUȚII DISCONTINUE PENTRU PLĂCI

3.1. Soluții discontinue în teoria clasică a plăcilor

În acest capitol este descrisă metodologia de obținere a soluțiilor discontinue în mecanica corpului solid deformabil elaborată de către prof. Gh. Moraru în lucrările [88-91, 148-151], aplicarea și implementarea numerică a acestora, de către autorul tezei pentru rezolvarea problemelor de încovoiere a plăcilor. Pentru a demonstra corectitudinea și eficacitatea soluțiilor discontinue, au fost rezolvate un șir de probleme practice ale plăcilor, rezultatele obținute fiind comparate cu alte metode analitice și numerice. Soluțiile discontinue au fost construite atât în baza ipotezelor teoriei clasice a plăcilor (teoria Kirchhoff), cât și în baza teoriei ce consideră deformațiile din forța de forfecare (teoria Reissner) și oferă o direcție nouă în metoda indirectă elementelor de frontieră.

3.1.1. Soluții provenite din salturi concentrate

Se va considera o placă infinită având pe axa y ($x = 0$) un defect (fisură, articulație plastică, gaură etc.) (Fig. 3.1.).

Soluția ecuației diferențiale a suprafeței mediane a plăcii (1.12.) este alcătuită din suma a două stări: prima provenită din sarcina exterioară și a doua – din salturile corespunzătoare defectului. Ultima se va obține de la integrarea soluțiilor obținute din salturile concentrate cu ajutorul transformării generalizate Fourier.

Traversând de la o parte a defectului la cealaltă, funcțiile pot avea salturi: săgeata w , unghiul de rotire θ_x , momentul de încovoiere M_x , forța tăietoare generalizată V_x (Fig. 3.2.).

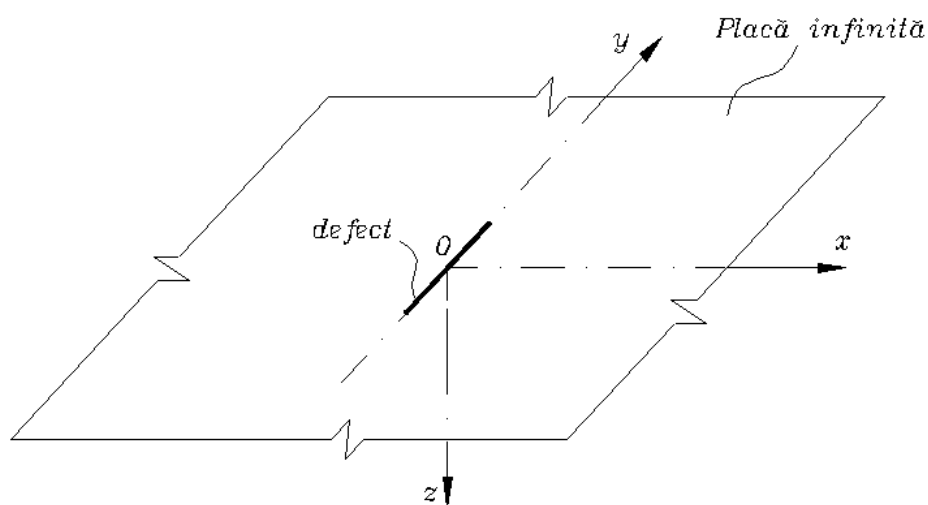


Fig. 3.1. Placă infinită cu defect

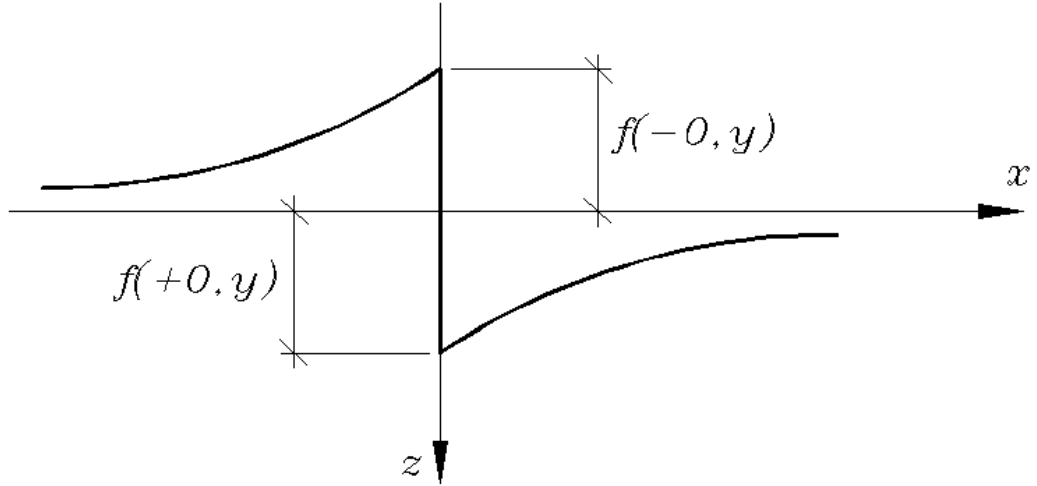


Fig. 3.2. Saltul funcției f la trecerea prin defect

Pentru toate salturile sus-menționate va fi introdusă următoarea notație:

$$\begin{aligned}
 w(-0, y) - w(+0, y) &= \langle w(y) \rangle; \\
 \theta_x(-0, y) - \theta_x(+0, y) &= \langle \theta_x(y) \rangle; \\
 M_x(-0, y) - M_x(+0, y) &= \langle M_x(y) \rangle; \\
 V_x(-0, y) - V_x(+0, y) &= \langle V_x(y) \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Pentru a construi soluțiile de la salturile concentrate se va examina o placă infinită în absența sarcinilor exterioare ($q(x, y) \equiv 0$).

Dacă se va aplica la ecuația (1.12) transformarea Fourier generalizată [17, 43, 157, 158] (Anexa 1. și Anexa 2.) după variabila x cu parametrul α și se va diviza în două intervalul de integrare: $(-\infty, 0)$, $(+0, +\infty)$, păstrând salturile tuturor funcțiilor în $x = 0$, se obține:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial y^4} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \alpha^4 \tilde{w} = -i\alpha^3 \langle w \rangle + \alpha^2 \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle + i\alpha \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right\rangle + 2i\alpha \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\rangle - 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle
 \tag{3.2}$$

Aici salturile săgeții w și derivatele ei s-au luat pentru $x = 0$ și transformata Fourier s-a notat prin tildă, de exemplu:

$$\tilde{w} \equiv \tilde{w}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{i\alpha x} dx.
 \tag{3.3}$$

Se vor cerceta soluțiile obținute de la salturile concentrate $\langle w(y) \rangle, \langle \theta_x(y) \rangle, \langle M_x(y) \rangle, \langle V_x(y) \rangle$.

De exemplu: se consideră că săgeata w are un salt de forma

$$\langle w(y) \rangle = \delta(y), \quad (3.4)$$

unde $\delta(y)$ reprezintă funcția lui Dirac.

Funcțiile rămase se consideră continue când $x = 0$:

$$\langle \theta_x(y) \rangle = 0; \quad \langle M_x(y) \rangle = 0; \quad \langle V_x(y) \rangle = 0. \quad (3.5)$$

Utilizând prima relație din (1.15) și relația (1.24) se obține:

$$\langle M_x \rangle = -D \left[\left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\rangle + \nu \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\rangle \right]; \quad \langle V_x \rangle = -D \left[\left\langle \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right\rangle + (2-\nu) \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle \right].$$

Întrucât $\langle \theta_x(y) \rangle = -\langle \partial w / \partial x \rangle = 0$ se obține:

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle = 0; \quad \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\rangle = -\nu \delta''(y); \quad \left\langle \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right\rangle = 0.$$

Ecuția diferențială (3.1.2.) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial y^4} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \alpha^4 \tilde{w} = -i\alpha^3 \delta(y) + i\alpha (2-\nu) \delta''(y). \quad (3.6)$$

Această ecuație diferențială poate fi rezolvată folosind transformarea Fourier [17, 43, 157, 158] (Anexa 1.) după variabila y cu β . Astfel, se obține

$$\tilde{w}(\alpha, \beta) = \frac{-i\alpha^3 - i(2-\nu)\alpha \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad (3.7)$$

unde

$$\tilde{w}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\alpha, y) e^{i\beta y} dy. \quad (3.8)$$

Utilizând formula de inversare Fourier (A.1.2) de 2 ori (pe α și pe β), se obține:

$$w(x, y) = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\alpha^3 + (2-\nu)\alpha \beta^2]}{(\alpha^2 + \beta^2)} e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta. \quad (3.9)$$

Integralele din expresia (3.9) pot fi calculate cu ajutorul tabelor [1, 28, 101, 144]. Astfel, la rezolvarea acestor integrale se obține:

$$w(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{x}{r^4} [(3-\nu)x^2 + (1+\nu)y^2] \quad (3.10)$$

unde $r^2 = x^2 + y^2$.

Dacă se vor utiliza formulele (1.13) și (1.15), pot fi obținute expresiile eforturilor, exprimate prin salturile săgeții w .

Prin analogie, se vor determina soluțiile și pentru cazurile când traversând de la o parte a defectului la cealaltă, unghiul de rotire θ_x , momentul M_x și forța de forfecare generalizată V_x au salturi. Trebuie de menționat faptul că dacă măcar una dintre funcțiile w , θ_x , M_x , V_x are salt, atunci celelalte trei sunt continue.

Relațiile dintre deplasări și salturi pot fi scrise în formă matricială:

$$\begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(y) \rangle \\ \langle \theta_x(y) \rangle \\ \langle M_x(y) \rangle \\ \langle V_x(y) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (3.11)$$

sau în formă compactă:

$$\{W\} = [G]\{S\},$$

unde $\{S\} = [\langle w(y) \rangle \langle \theta_x(y) \rangle \langle M_x(y) \rangle \langle V_x(y) \rangle]^T$ reprezintă vectorul salturilor.

Elementele $g_{ij} \equiv g_{ij}(x, y)$ au forma:

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{x}{r^4} [(3-\nu)x^2 + (1+\nu)y^2]; & g_{12} &= -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \frac{x^2}{r^2} \right]; \\ g_{21} &= -\frac{1}{4\pi r^6} [(3-\nu)x^4 - 6(1-\nu)x^2y^2 - (1+\nu)y^4]; & g_{22} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{x}{r^4} [(1+\nu)x^2 + (3-\nu)y^2]; \\ g_{31} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{xy}{r^6} [(1+\nu)y^2 + (5-3\nu)x^2]; & g_{32} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{y}{r^4} [-(1-3\nu)x^2 + (1+\nu)y^2]; \\ g_{13} &= \frac{1}{4\pi D} x \ln r; & g_{23} &= -\frac{1}{4\pi D} \left(\ln r + \frac{x^2}{r^2} \right); & g_{33} &= -\frac{1}{4\pi D} \frac{xy}{r^2}; \\ g_{14} &= \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r; & g_{24} &= -\frac{x}{8\pi D} (2 \ln r + 1); & g_{34} &= -\frac{y}{8\pi D} (2 \ln r + 1). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Relațiile dintre eforturi și salturi pot fi scrise în formă matricială:

$$\begin{Bmatrix} M_x(x, y) \\ M_y(x, y) \\ M_{xy}(x, y) \\ Q_x(x, y) \\ Q_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(y) \rangle \\ \langle \theta_x(y) \rangle \\ \langle M_x(y) \rangle \\ \langle V_x(y) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (3.13)$$

unde $\{N\} = [M_x \quad M_y \quad M_{xy} \quad Q_x \quad Q_y]^T$ reprezintă vectorul eforturilor.

În formă compactă relația (3.13) este:

$$\{N\} = [T]\{S\}.$$

Dacă vor fi considerate soluțiile w din (3.11) și relațiile (1.13), (1.15) se poate cu ușurință de calculat toți coeficienții $t_{ij} \equiv t_{ij}(x, y)$ ($i = \overline{1,5}$; $j = \overline{1,4}$) ai matricei T .

$$t_{11} = \frac{3(1-\nu)^2 D}{2\pi} \frac{x}{r^8} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4);$$

$$t_{21} = \frac{(1-\nu)D}{2\pi} \frac{x}{r^8} [-(5-\nu)x^4 + 2(11-7\nu)x^2y^2 + 3(1+3\nu)y^4];$$

$$t_{31} = \frac{(1-\nu)D}{2\pi} \frac{y}{r^8} [3(5-3\nu)x^4 + 2(5-7\nu)x^2y^2 - (1+\nu)y^4];$$

$$t_{41} = \frac{3(1-\nu)D}{\pi} \frac{1}{r^8} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4); \quad t_{51} = \frac{12(1-\nu)D}{\pi} \frac{xy}{r^{10}} (x^4 - y^4);$$

$$t_{12} = \frac{(1-\nu)D}{4\pi} \frac{1}{r^6} [(1+3\nu)x^4 + 6(1-\nu)x^2y^2 - (3+\nu)y^4];$$

$$t_{22} = \frac{(1-\nu)^2 D}{4\pi} \frac{1}{r^6} [x^4 - 6x^2y^2 + y^4]; \quad t_{32} = -\frac{(1-\nu)D}{2\pi} \frac{xy}{r^6} [(1-3\nu)x^2 - (3-\nu)y^2];$$

$$t_{42} = \frac{(1-\nu)D}{\pi} \frac{x}{r^6} (x^2 - 3y^2); \quad t_{52} = \frac{(1-\nu)D}{4\pi} \frac{y}{r^8} (y^4 - 2x^2y^2 - 3x^4);$$

$$t_{13} = -\frac{1}{4\pi} \frac{x}{r^4} [(1+\nu)x^2 + (3-\nu)y^2]; \quad t_{23} = -\frac{1}{4\pi} \frac{x}{r^4} [(1+\nu)x^2 + (3\nu-1)y^2];$$

$$t_{33} = \frac{(1+\nu)}{4\pi} \frac{y}{r^4} (x^2 - y^2); \quad t_{43} = \frac{1}{2\pi r^4} (x^2 - y^2); \quad t_{53} = \frac{1}{2\pi r^4} (y^2 - x^2);$$

$$t_{14} = -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \frac{x^2}{r^2} + \frac{(3\nu+1)}{2} \right]; \quad t_{24} = -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \frac{y^2}{r^2} + \frac{(3\nu+1)}{2} \right];$$

$$t_{34} = -\frac{(1-\nu)}{4\pi} \frac{xy}{r^2}; \quad t_{44} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{r^2}; \quad t_{54} = -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{r^2}.$$

(3.14)

Relațiile dintre forțele transversale generalizate și salturi au forma:

$$\begin{Bmatrix} V_x(x, y) \\ V_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & l_{25} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(y) \rangle \\ \langle \theta_x(y) \rangle \\ \langle M_x(y) \rangle \\ \langle V_x(y) \rangle \end{Bmatrix}. \quad (3.15)$$

În formă compactă relația (3.15) este:

$$V = [L]\{S\},$$

unde termenii matricei sunt:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \frac{3(1-\nu)D}{2\pi r^{10}} [(7-3\nu)x^6 - 5(11-7\nu)x^4y^2 + 5(1-5\nu)x^2y^4 + (3+\nu)y^6]; \\ l_{12} &= -\frac{3(1-\nu)^2 D}{2\pi} \frac{x}{r^8} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4); \quad l_{13} = \frac{1}{4\pi r^6} [(3-\nu)x^4 - 6(1-\nu)x^2y^2 - (1+\nu)y^4]; \\ l_{14} &= -\frac{x}{4\pi r^4} [(3-\nu)x^2 + (1+\nu)y^2]; \quad l_{21} = -\frac{6(1-\nu)^2 D}{\pi} \frac{xy}{r^{10}} (3x^4 - 10x^2y^2 + 3y^4); \\ l_{22} &= \frac{(1-\nu)D}{2\pi} \frac{y}{r^8} [(5-\nu)y^4 - 2(11-7\nu)x^2y^2 - 3(1+3\nu)x^4]; \\ l_{23} &= \frac{xy}{2\pi r^6} [(1+\nu)x^2 + (5-3\nu)y^2]; \quad l_{24} = -\frac{y}{4\pi r^4} [(1+\nu)x^2 + (3-\nu)y^2]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.1.2. Soluții discontinue pentru placa de contur arbitrar.

Soluțiile provenite din salturi concentrate pot fi utilizate ca funcții Green. Prin superpoziție pot fi scrise ecuațiile integrale pentru un defect amplasat pe un contur arbitrar L (Fig. 3.3.).

Trecând de la un sistem local de coordonate (\bar{x}, \bar{y}) la alt sistem local (n, t) amplasat în orice punct P se obține:

$$\begin{aligned} w^*(P) &= \int_L \bar{w}(P, Q) ds_Q; \quad \theta_n^*(P) = \int_L [\bar{\theta}_x(P, Q) \cos \gamma + \bar{\theta}_y(P, Q) \sin \gamma] ds_Q; \\ M_n^*(P) &= \int_L [\bar{M}_x(P, Q) \cos^2 \gamma + \bar{M}_y(P, Q) \sin^2 \gamma + 2\bar{M}_{xy}(P, Q) \cos \gamma \sin \gamma] ds_Q; \\ M_{nt}^*(P) &= \int_L \{ [\bar{M}_y(P, Q) - \bar{M}_x(P, Q)] \cos \gamma \sin \gamma + M_{xy}(P, Q) (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \} ds_Q; \\ Q_n^*(P) &= \int_L [\bar{Q}_x(P, Q) \cos \gamma + \bar{Q}_y(P, Q) \sin \gamma] ds_Q; \quad V_n^*(P) = Q_n^* + \frac{\partial M_{nt}^*}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

unde $\gamma = \beta - \alpha$,

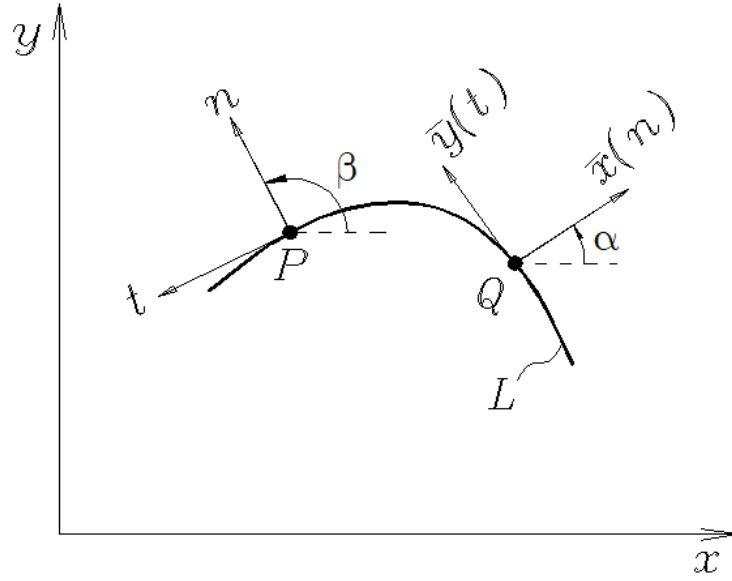


Fig. 3.3. Sisteme de coordonate locale amplasate pe defectul L

iar:

$$\begin{aligned}
 \bar{w}(P, Q) &= \bar{g}_{11}(P, Q)\langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{g}_{12}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{13}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{14}(P, Q)\langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\
 \bar{\theta}_x(P, Q) &= \bar{g}_{21}(P, Q)\langle w(Q) \rangle ds + \bar{g}_{22}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{23}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{24}(P, Q)\langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\
 \bar{\theta}_y(P, Q) &= \bar{g}_{31}(P, Q)\langle w(Q) \rangle ds + \bar{g}_{32}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{33}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle ds + \bar{g}_{34}(P, Q)\langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\
 \bar{M}_x(P, Q) &= \bar{t}_{11}(P, Q)\langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{12}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{13}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle ds + \bar{t}_{14}(P, Q)\langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\
 \bar{M}_y(P, Q) &= \bar{t}_{21}(P, Q)\langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{22}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{23}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle ds + \bar{t}_{24}(P, Q)\langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\
 \bar{M}_{xy}(P, Q) &= \bar{t}_{31}(P, Q)\langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{32}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{33}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle ds + \bar{t}_{34}(P, Q)\langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\
 \bar{Q}_x(P, Q) &= \bar{t}_{41}(P, Q)\langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{42}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{43}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{44}(P, Q)\langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\
 \bar{Q}_y(P, Q) &= \bar{t}_{51}(P, Q)\langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{52}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{53}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{54}(P, Q)\langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\
 \bar{V}_x(P, Q) &= \bar{l}_{11}(P, Q)\langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{l}_{12}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{l}_{13}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{l}_{14}(P, Q)\langle \bar{V}_x(Q) \rangle; \\
 \bar{V}_y(P, Q) &= \bar{l}_{21}(P, Q)\langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{l}_{22}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{l}_{23}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{l}_{24}(P, Q)\langle \bar{V}_x(Q) \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Bara de sus indică faptul că funcțiile respective sunt prezentate în coordonate locale (\bar{x}, \bar{y}) . Funcțiile \bar{g}_{ij} , \bar{t}_{ij} , \bar{l}_i pot fi obținute din relațiile (3.12), (3.14) și (3.16) substituind x_i cu \bar{x}_i și y_i cu \bar{y}_i .

Pentru a obține ecuațiile integrale, starea de deformare a plăcii este prezentată ca suma a două stări. Prima (notată cu cerculeț) provine de la sarcina exterioară, a doua (notată cu asterix) provine din salturile concentrate pe linia L a defectului:

$$\begin{aligned}
w(P) &= w^o(P) + w^*(P); & \theta_n(P) &= \theta_n^o(P) + \theta_n^*(P); \\
M_n(P) &= M_n^o(P) + M_n^*(P); & V_n(P) &= V_n^o(P) + V_n^*(P).
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

Funcțiile w^* , θ_n^* , M_n^* și V_n^* în conformitate cu (3.17) sunt exprimate prin salturile respective de-a lungul conturului L . O parte din aceste salturi pot fi cunoscute. De exemplu, dacă defectul are forma unei fisuri, atunci traversând de la o parte a fisurii la alta săgeata w și unghiul de rotire θ_n au salturi. Dacă defectul reprezintă o incluziune rigidă sau elastică, atunci traversând de la o parte a defectului la alta momentul M_n și forța transversală generalizată V_n au salturi. Din condițiile la limită pot fi obținute ecuațiile integrale necesare.

Soluțiile discontinue sunt destinate pentru rezolvarea diferitor probleme ale plăcilor cu defecte. De asemenea, aceste soluții pot fi folosite la rezolvarea problemelor de bază ale plăcilor [35, 39, 41, 88, 91]. În aceste cazuri frontiera va fi considerată ca defect.

3.1.3. Implementarea numerică a soluțiilor discontinue în teoria clasică a plăcilor.

Se va studia o placă de contur arbitrar cu diferite condiții la limită (Fig. 3.4.), având un defect cu lungimea L_d . Pe lungimea conturului L_1 placa va fi considerată simplu rezemată, pe L_2 – încastrată și pe L_3 – liberă [39, 41].

Drept exemplu, se va considera că defectul (L_d) prezintă o articulație plastică. În acest caz, unghiul de rotire în direcția normalei la marginea defectului va avea salt: $\langle \theta_n \rangle \neq 0$.

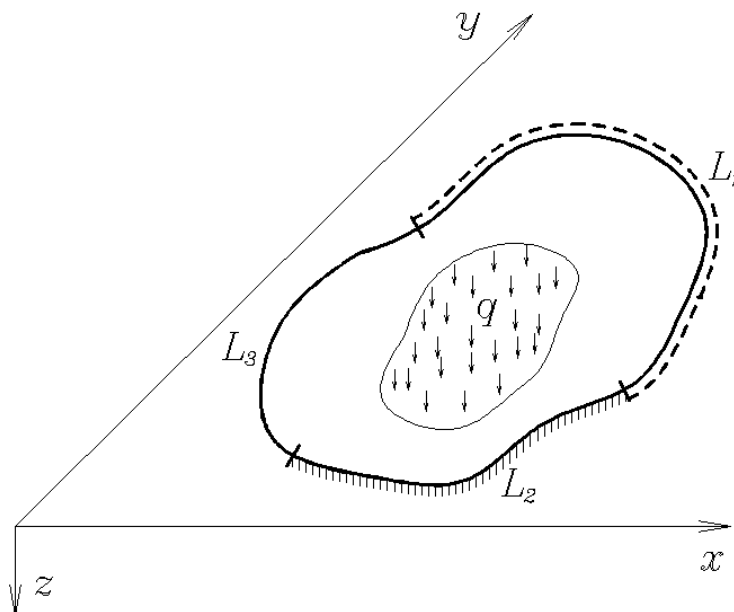


Fig. 3.4. Placă de contur arbitrar având diferite moduri de rezemare

Frontiera plăcii va fi considerată ca defect într-o placă infinită. Traversând din interiorul regiunii ocupate de placă spre frontiera defectului, funcțiile w , θ_n , M_n , V_n pot avea salturi. Traversând din exteriorul regiunii ocupate de placă spre frontiera defectului aceste salturi vor fi considerate nule.

Utilizând condițiile la limită se va obține:

- pentru conturul simplu rezemat (L_1):
 $w^* + w^o = 0$; $M_n^* + M_n^o = 0$; ($\langle \theta_n \rangle \neq 0$; $\langle V_n \rangle \neq 0$)
- pentru conturul încastrat (L_2):
 $w^* + w^o = 0$; $\theta_n^* + \theta_n^o = 0$; ($\langle M_n \rangle \neq 0$; $\langle V_n \rangle \neq 0$)
- pentru conturul liber (L_3):
 $M_n^* + M_n^o = 0$; $V_n^* + V_n^o = 0$. ($\langle w \rangle \neq 0$; $\langle \theta_n \rangle \neq 0$)
- pentru defectul (L_d) de tipul unei articulații plastice:
 $M_n^* + M_n^o = 0$; ($\langle \theta_n \rangle \neq 0$).

Soluțiile: w^* , θ_n^* , M_n^* și V_n^* provenite din salturi sunt indicate în expresiile (3.17) și (3.18).

Soluțiile: w^o , θ_n^o , M_n^o și V_n^o depind de tipul sarcinii exterioare. De exemplu: dacă placa este acționată de o forță concentrată F aplicată în punctul cu coordonatele a_0 , b_0 față de originea sistemul global (Fig. 3.5., a), atunci soluția în nodul i situat pe frontiera L va fi:

$$\begin{aligned}
 w_i^o &= F \cdot g_{14}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0); \\
 \theta_{ni}^o &= F(n_x \theta_{xi}^o + n_y \theta_{yi}^o) = F[n_x g_{24}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + n_y g_{34}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0)]; \\
 M_{ni}^o &= F(n_x^2 M_{xi}^o + n_y^2 M_{yi}^o + 2n_x n_y M_{xyi}^o) = F[n_x^2 t_{14}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + \\
 &+ n_y^2 t_{24}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + 2n_x n_y t_{34}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0)]; \\
 V_{ni}^o &= F(n_x V_{xi}^o + n_y V_{yi}^o) = F[n_x l_{14}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + n_y l_{24}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0)].
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Pentru cazul când încărcarea este distribuită liniar în direcția axe x (Fig. 3.5., b) soluțiile se vor obține prin integrarea relațiilor (3.20).

$$\begin{aligned}
 w_i^o &= p \int_{a_1}^{a_2} g_{14}(x_i^m - \xi, y_i^m - b_0) d\xi; \\
 &\vdots \\
 V_{ni}^o &= p \int_{a_1}^{a_2} [n_x l_{14}(x_i^m - \xi, y_i^m - b_0) + n_y l_{24}(x_i^m - \xi, y_i^m - b_0)] d\xi.
 \end{aligned} \tag{3.20*}$$

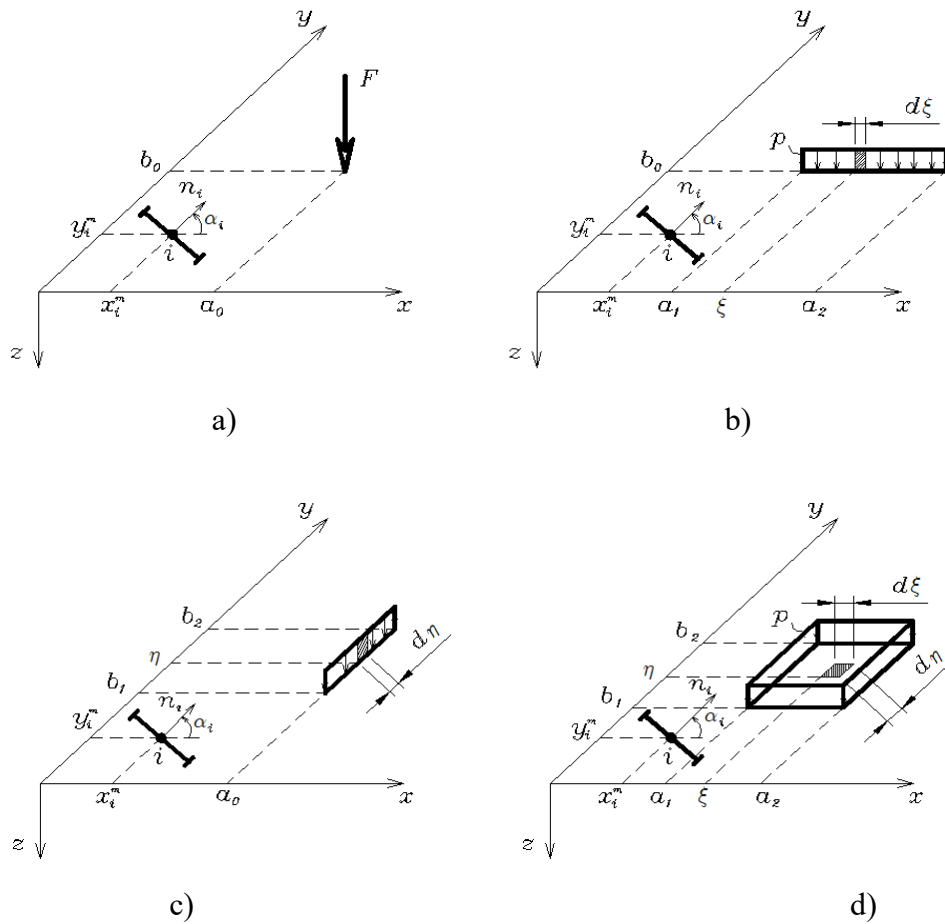


Fig. 3.5. Cazuri de încărcare a plăcilor

Prin analogie se vor obține soluțiile pentru încărcarea liniară în direcția y (Fig. 3.5., c):

$$\begin{aligned}
 w_i^o &= p \int_{b_1}^{b_2} g_{14}(x_i^m - a_0, y_i^m - \eta) d\eta; \\
 &\vdots \\
 V_{ni}^o &= p \int_{b_1}^{b_2} [n_x l_{14}(x_i^m - a_0, y_i^m - \eta) + n_y l_{24}(x_i^m - a_0, y_i^m - \eta)] d\eta.
 \end{aligned} \tag{3.20**}$$

Pentru încărcarea uniform distribuită pe o suprafață se poate scrie:

$$\begin{aligned}
 w_i^o &= p \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} g_{14}(x_i^m - \xi, y_i^m - \eta) d\xi d\eta; \\
 &\vdots \\
 V_{ni}^o &= p \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} [n_x l_{14}(x_i^m - \xi, y_i^m - \eta) + n_y l_{24}(x_i^m - \xi, y_i^m - \eta)] d\xi d\eta,
 \end{aligned} \tag{3.20***}$$

unde x_i^m, y_i^m sunt coordonatele nodului de frontieră i în sistemul global calculate cu relațiile 3.36, iar $n_x = \cos \alpha$ și $n_y = \sin \alpha$ pot fi determinate cu relațiile (3.41).

Dacă conturul L ($L=L_1+L_2+L_3$) și defectul L_d vor fi discretizate într-un set de elemente constante, se va obține următorul sistem de ecuații:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{j=n_{L3}} w_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} w_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} w_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} w_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle &= -w_i^o; \quad (i = n_{L1}, n_{L2}) \\
 \sum_{j=n_{L3}} \theta_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} \theta_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} \theta_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} \theta_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle &= -\theta_{ni}^o; \quad (i = n_{L2}) \\
 \sum_{j=n_{L3}} m_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} m_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} m_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} m_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle &= -M_{ni}^o; \quad (i = n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}) \\
 \sum_{j=n_{L3}} v_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} v_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} v_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} v_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle &= -V_{ni}^o; \quad (i = n_{L3})
 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

unde: n_{L1}, n_{L2}, n_{L3} reprezintă numărul de ordine al elementelor pe conturul L_1, L_2 și respectiv L_3 , iar n_{Ld} – numărul de ordine al elementelor pe defectul L_d .

Termenii $w_{ij}^1, w_{ij}^2, \dots, v_{ij}^4$ se vor calcula utilizând soluțiile din (3.12), (3.14) și (3.16), substituind în acestea x cu \bar{x}_i^m și y cu $\bar{y}_i^m - \bar{\eta}$, în care \bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m sunt coordonatele locale date de relațiile (3.40), $-l_j/2 \leq \bar{\eta} \leq +l_j/2$.

$$\begin{aligned}
 w_{ij}^1 &= \int_{l_j} \bar{g}_{11} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) d\bar{\eta}; & w_{ij}^2 &= \int_{l_j} \bar{g}_{12} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) d\bar{\eta}; \\
 w_{ij}^3 &= \int_{l_j} \bar{g}_{13} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) d\bar{\eta}; & w_{ij}^4 &= \int_{l_j} \bar{g}_{14} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) d\bar{\eta}; \\
 \theta_{ij}^1 &= \int_{l_j} [\mathbf{c} \bar{g}_{21} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + \mathbf{s} \bar{g}_{31} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta}; \\
 \theta_{ij}^2 &= \int_{l_j} [\mathbf{c} \bar{g}_{22} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + \mathbf{s} \bar{g}_{32} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta}; \\
 \theta_{ij}^3 &= \int_{l_j} [\mathbf{c} \bar{g}_{23} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + \mathbf{s} \bar{g}_{33} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta}; \\
 \theta_{ij}^4 &= \int_{l_j} [\mathbf{c} \bar{g}_{24} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + \mathbf{s} \bar{g}_{34} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta}; \\
 m_{ij}^1 &= \int_{l_j} [\mathbf{c}^2 \bar{t}_{11} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + \mathbf{s}^2 \bar{t}_{21} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + 2 \mathbf{c} \mathbf{s} \bar{t}_{31} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta}; \\
 m_{ij}^2 &= \int_{l_j} [\mathbf{c}^2 \bar{t}_{12} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + \mathbf{s}^2 \bar{t}_{22} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + 2 \mathbf{c} \mathbf{s} \bar{t}_{32} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta}; \\
 m_{ij}^3 &= \int_{l_j} [\mathbf{c}^2 \bar{t}_{13} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + \mathbf{s}^2 \bar{t}_{23} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + 2 \mathbf{c} \mathbf{s} \bar{t}_{33} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta}; \\
 m_{ij}^4 &= \int_{l_j} [\mathbf{c}^2 \bar{t}_{14} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + \mathbf{s}^2 \bar{t}_{24} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + 2 \mathbf{c} \mathbf{s} \bar{t}_{34} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{ij}^1 &= \int_{l_j} [c \bar{l}_{11} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + s \bar{l}_{21} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta}; & v_{ij}^2 &= \int_{l_j} [c \bar{l}_{12} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + s \bar{l}_{22} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta}; \\
v_{ij}^3 &= \int_{l_j} [c \bar{l}_{13} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + s \bar{l}_{23} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta}; & v_{ij}^4 &= \int_{l_j} [c \bar{l}_{14} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + s \bar{l}_{24} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta})] d\bar{\eta};
\end{aligned}
\tag{3.22.}$$

unde $c = \cos\gamma$, iar $s = \sin\gamma$, determinate cu ajutorul relațiilor (3.42).

În formă matricială sistemul de ecuații (3.21) va avea forma

$$\begin{bmatrix} [w_{ij}^1] & [w_{ij}^2] & [w_{ij}^3] & [w_{ij}^4] \\ [\theta_{ij}^1] & [\theta_{ij}^2] & [\theta_{ij}^3] & [\theta_{ij}^4] \\ [m_{ij}^1] & [m_{ij}^2] & [m_{ij}^3] & [m_{ij}^4] \\ [v_{ij}^1] & [v_{ij}^2] & [v_{ij}^3] & [v_{ij}^4] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \langle w_j \rangle \\ \langle \theta_{nj} \rangle \\ \langle M_{nj} \rangle \\ \langle V_{nj} \rangle \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{-w_i^o\} \\ \{-\theta_{ni}^o\} \\ \{-M_{ni}^o\} \\ \{-V_{ni}^o\} \end{Bmatrix},
\tag{3.24}$$

sau în formă compactă:

$$[A]_{(2n_e+n_d) \times (2n_e+n_d)} \cdot \{X\}_{2n_e+n_d} = \{B\}_{2n_e+n_d}.
\tag{3.25}$$

Dacă se rezolvă acest sistem de ecuații (3.25) vor fi cunoscute toate salturile de pe conturul plăcii și cele de pe defect, astfel pot fi calculate deplasările și eforturile în orice punct din interiorul plăcii, acestea fiind exprimate prin salturile obținute.

De exemplu, dacă este necesar de a calcula săgeata într-un punct arbitrar k din interiorul plăcii (Fig. 3.6.), expresia va căpăta forma:

$$w_k = \sum_{j=n_{L3}} g_{11} \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} g_{12} \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} g_{13} \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} g_{14} \langle V_{nj} \rangle + w_k^o.
\tag{3.26}$$

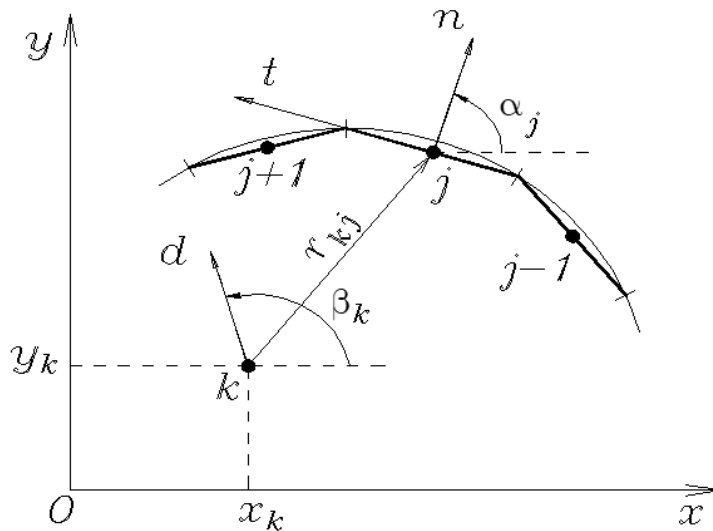


Fig. 3.6. Poziția punctului interior în raport cu elementele de frontieră constante

Unghiul de rotire a secțiunii în punctul k ce acționează pe direcția d :

$$\begin{aligned} \theta_k^d = & \sum_{j=n_{L3}} (c g_{21} + s g_{31}) \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} (c g_{22} + s g_{32}) \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} (c g_{23} + s g_{33}) \langle M_{nj} \rangle + \\ & + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} (c g_{24} + s g_{34}) \langle V_{nj} \rangle + n_x \theta_{xk}^o + n_y \theta_{yk}^o. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Momentul în punctul k ce acționează pe direcția d :

$$\begin{aligned} M_k^d = & \sum_{j=n_{L3}} (c^2 t_{11} + s^2 t_{21} + 2cs t_{31}) \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} (c^2 t_{12} + s^2 t_{22} + 2cs t_{32}) \langle \theta_{nj} \rangle + \\ & + \sum_{j=n_{L2}} (c^2 t_{13} + s^2 t_{23} + 2cs t_{33}) \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} (c^2 t_{14} + s^2 t_{24} + 2cs t_{34}) \langle V_{nj} \rangle + \\ & + n_x^2 M_{xk}^o + n_y^2 M_{yk}^o + 2n_x n_y M_{xyk}^o. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Forța transversală în punctul k ce acționează pe direcția d :

$$\begin{aligned} Q_k^d = & \sum_{j=n_{L3}} (c t_{41} + s t_{51}) \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} (c t_{42} + s t_{52}) \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} (c t_{43} + s t_{53}) \langle M_{nj} \rangle + \\ & + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} (c t_{44} + s t_{54}) \langle V_{nj} \rangle + n_x Q_{xk}^o + n_y Q_{yk}^o. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Termenii $g_{11}, g_{12}, \dots, t_{54}$ din relațiile (3.26) – (3.29) se vor calcula utilizând soluțiile din (3.12) și (3.14), substituind în acestea: x_i cu x_k și y_i cu y_k .

x_k și y_k reprezintă coordonatele punctului k în sistemul global;

$c = \cos(\beta_k - \alpha_j)$; $s = \sin(\beta_k - \alpha_j)$; $n_x = \cos\beta_k$; $n_y = \sin\beta_k$ (Fig. 3.6.);

$w_k^o, \theta_{xk}^o, \dots, Q_{yk}^o$ reprezintă soluțiile în punctul k provenite din sarcina exterioară, care pot fi determinate în funcție de tipul sarcinii folosind relațiile (3.20), (3.20*) – (3.20***), substituind în acestea x_i^m cu x_k și y_i^m cu y_k .

Pentru rezolvarea problemelor clasice ale plăcilor (fără defecte) în relațiile de mai sus (3.21) – (3.29.) se vor exclude termenii și soluțiile provenite din defect.

3.1.4. Calculul integralelor pe frontieră.

Calculul termenilor din (3.22) contribuie, de regulă, la integrarea unor funcții de tipul: $\ln r$, $1/r$, $1/r^{n+1}$ ($n \neq 0$) etc. Aceste integrale pot fi slab singulare, strict singulare, hipersingulare sau divergente. Metode de rezolvare și regularizare pot fi găsite în lucrările [45-48, 53, 65, 72, 73, 77-79, 110, 112-116].

De exemplu, fie integrala hipersingulară:

$$I = \int_{L_j} \frac{1}{r^2} ds_q, \quad (3.30)$$

unde $r^2 = x_i^2 + y_i^2$.

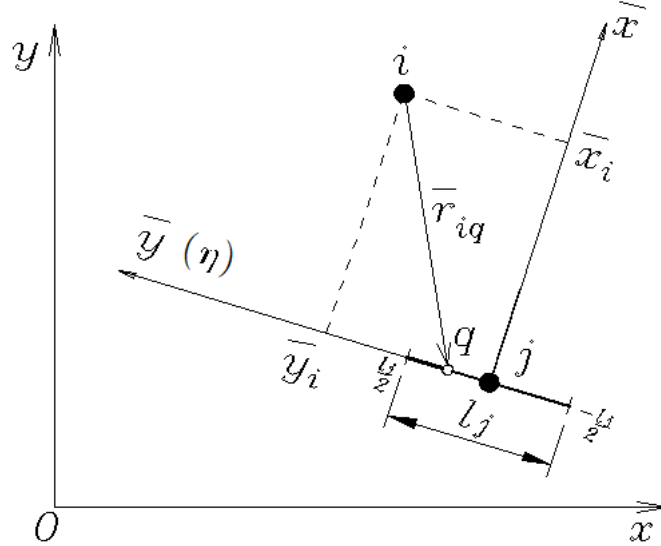


Fig. 3.7. Sistemul global și local de coordonate

Se va cerceta soluția analitică a acestei integrale pentru următoarele cazuri posibile:

I. Când nodurile i și j sunt situate pe elemente diferite ($\bar{x}_i \neq 0$; $\bar{y}_i \neq 0$). Aceste integrale nu prezintă singularități și pot fi rezolvate prin metode standarde analitice sau numerice [1, 28, 158].

Dacă se va trece la sistemul local de coordonate (Fig. 3.7.) soluția integralei (3.30) va fi:

$$I = \int_{-l_j/2}^{l_j/2} \frac{1}{\bar{x}_i^2 + (\bar{y}_i - \eta)^2} d\eta = \frac{1}{|\bar{x}_i|} \left(\arctan \frac{l_j/2 + \bar{y}_i}{|\bar{x}_i|} + \arctan \frac{l_j/2 - \bar{y}_i}{|\bar{x}_i|} \right). \quad (3.31)$$

II. Când nodul i este situat pe axa elementului j ($\bar{x}_i = 0$).

În caz general soluția integralei (3.30) va fi:

$$I = \int_{-l_j/2}^{l_j/2} \frac{1}{(\bar{y}_i - \eta)^2} d\eta = -\frac{1}{\bar{y}_i + l_j/2} + \frac{1}{\bar{y}_i - l_j/2}. \quad (3.32)$$

III. Când nodul i este situat la capătul elementului j ($\bar{x}_i = 0$; $\bar{y}_i = -l_j/2, +l_j/2$).

Dacă se substituie în soluția (3.22) $\bar{y}_i = -l_j/2$ se observă că primul termen devine infinit.

Se va păstra doar partea finită a soluției. Astfel, se va obține:

$$p.f. I = -\frac{1}{l_j}. \quad (3.33)$$

În mod analogic, substituind în soluția (3.32) $\bar{y}_i = l_j/2$ al doilea termen devine infinit. Se va păstra doar partea finită a soluției:

$$p.f. I = -\frac{1}{l_j}. \quad (3.34)$$

IV. Când nodul i este situat în centrul elementului j ($\bar{x}_i = 0$; $\bar{y}_i = 0$).

În acest caz funcția prezintă singularitate în punctul j . Se va utiliza metoda de regularizare propusă de Hadamard [48]. Soluția integralei devine:

$$p.f. I = \int_{-l_j/2}^{l_j/2} \frac{1}{\eta^2} d\eta = -\frac{4}{l_j}. \quad (3.35)$$

În mod analogic au fost calculate toate integralele necesare.

3.1.5. Transformarea sistemelor de coordonate.

În datele inițiale, de regulă, sunt date coordonatele nodurilor elementelor în coordonate globale (Fig. 3.8.). Coordonatele centrelor elementelor i și j se calculează cu relațiile

$$x_i^m = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i); \quad y_i^m = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_i). \quad (3.36)$$

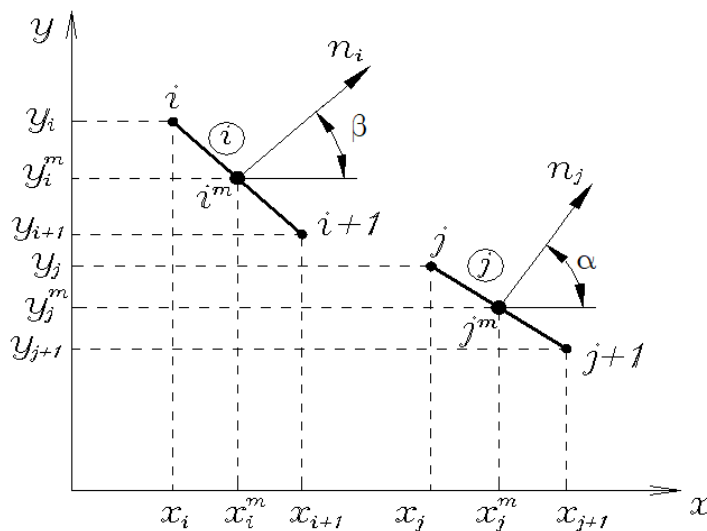


Fig. 3.8. Coordonatele nodurilor elementelor în sistemul global

Coordonatele nodului i^m în sistemul de coordonate local cu centrul în nodul j^m (Fig. 3.8.)

$$\begin{aligned} x_i^m - x_j^m &= \bar{x}_i^m \cos \alpha - \bar{y}_i^m \sin \alpha; \\ y_i^m - y_j^m &= \bar{x}_i^m \sin \alpha + \bar{y}_i^m \cos \alpha; \end{aligned} \quad (3.37)$$

În forma matricială relația (3.37). capătă forma:

$$\begin{Bmatrix} x_i^m - x_j^m \\ y_i^m - y_j^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_i^m \\ \bar{y}_i^m \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

sau

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_i^m \\ \bar{y}_i^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i^m - x_j^m \\ y_i^m - y_j^m \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

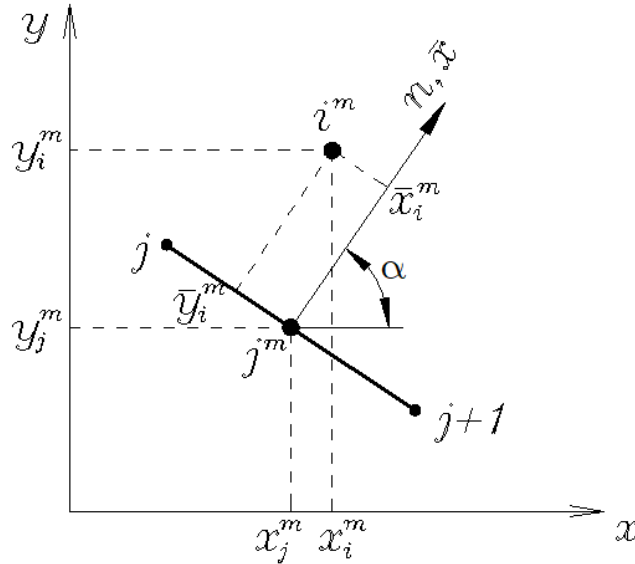


Fig. 3.9. Coordonatele nodului i^m în sistemul de coordonate local cu centrul în nodul j^m

Înlocuind în relația (3.39) $\cos \alpha$ prin n_x^j , iar $\sin \alpha$ prin n_y^j se obține:

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_i^m \\ \bar{y}_i^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^j & n_y^j \\ -n_y^j & n_x^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i^m - x_j^m \\ y_i^m - y_j^m \end{Bmatrix}, \quad (3.1.40.)$$

unde

$$n_x^j = \cos \alpha = \frac{y_{j+1} - y_j}{l_j}; \quad n_y^j = \sin \alpha = -\frac{x_{j+1} - x_j}{l_j}; \quad (3.1.41.)$$

l_j – reprezintă lungimea elementului j ;

$$l_j = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2};$$

Cosinusurile unghiurilor dintre normale la două elemente se determină cu formulele:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\beta - \alpha) &= \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha; \\ \sin(\beta - \alpha) &= \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha; \end{aligned} \right\} \text{ sau } \left. \begin{aligned} \cos \gamma &= n_x^i n_x^j + n_y^i n_y^j; \\ \sin \gamma &= n_y^i n_x^j - n_x^i n_y^j. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.42.)$$

unde γ – reprezintă unghiul dintre normale n_i și n_j ; $\gamma = \beta - \alpha$.

3.1.6. Exemple de calcul a plăcilor dreptunghiulare în teoria clasică folosind soluțiile discontinue

Pentru a verifica corectitudinea metodei propuse în această lucrare, a fost elaborat un program de calcul în limbajul de programare Matlab [102, 118, 134] (Anexa 3.). Cu ajutorul acestui program au fost calculate deplasările și eforturile plăcilor cu diferite moduri de rezemare și diferite tipuri de încărcare. Pentru toate cazurile cercetate s-a ales o placă pătrată, frontiera căreia a fost discretizată în 20 de elemente constante conform Fig. 3.10., a, având coeficientul lui Poisson $\nu = 0,2$. Rezultatele obținute au fost comparate cu soluțiile analitice și cu MEF pentru o rețea de discretizare 10x10 elemente conform Fig. 3.10., b, cu trei grade de libertate în nod.

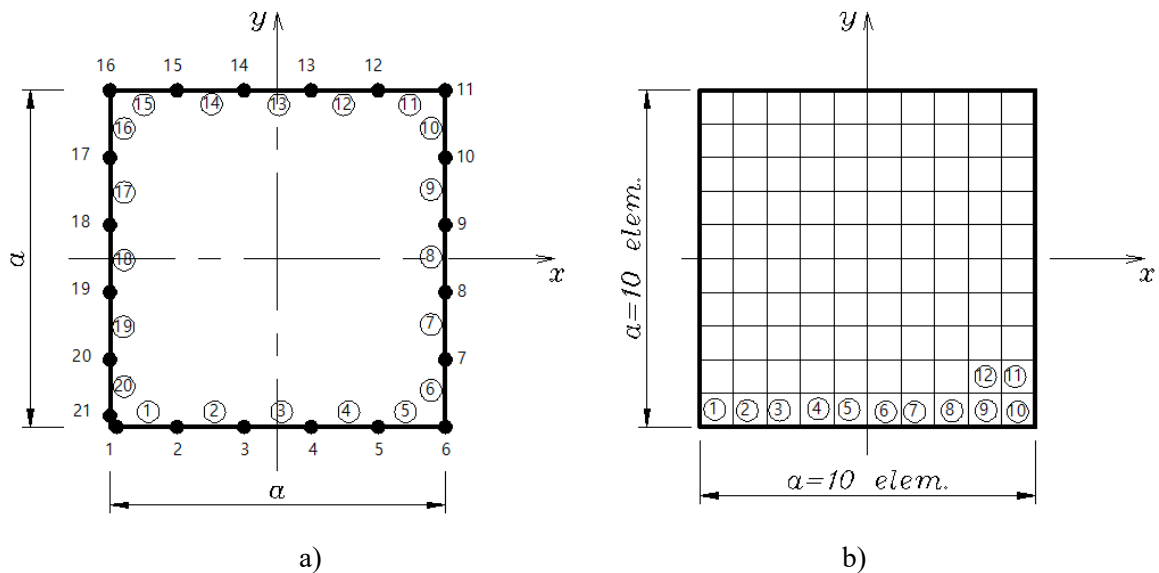


Fig. 3.10. Placă discretizată: a) MEFr; b) MEF

a) Placă dreptunghiulară simplu rezemată pe toate laturile, solicitată de o forță concentrată.

Schemele de calcul pentru placa simplu rezemată pe toate patru laturi [39], încărcată de o forță concentrată sunt prezentate în Fig. 3.11. și Fig. 3.12.

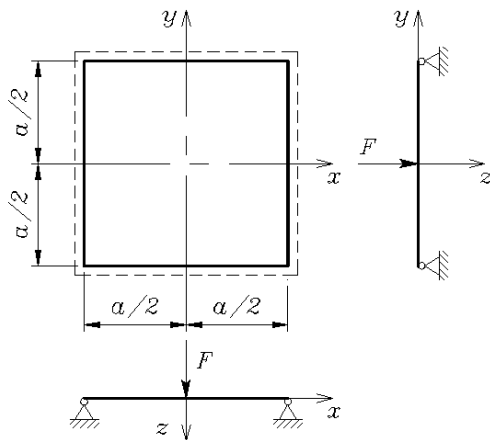


Fig. 3.11. Placă pătrată, simplu rezemată pe toate laturile

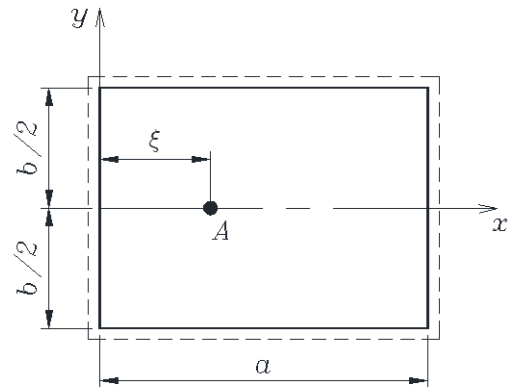


Fig. 3.12. Schema de calcul a plăcii pentru metoda analitică

În continuare sunt prezentate rezultatele obținute cu ajutorul programului de calcul prezentat în Anexa 3., pentru o placă pătrată simplu rezemată pe toate laturile, solicitată la centru de o forță concentrată F (Fig.3.11.).

Rezultatele obținute prin MEFr bazate pe soluții discontinue au fost comparate cu cele obținute prin MEF și cu cele analitice, pe secțiunea centrală $y = 0$. Acestea sunt prezentate sub formă de diagrame (Fig. 3.17., 3.18.) conform schemei de calcul din Fig. 3.11.

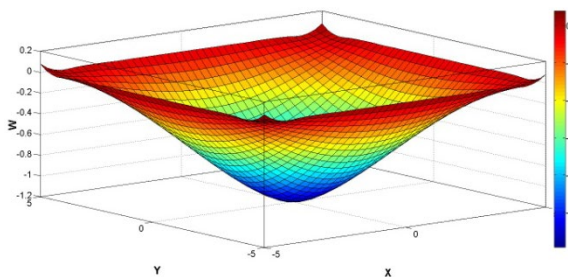


Fig. 3.13. Câmpul deplasărilor verticale w în placa simplu rezemată pe toate laturile, prezentat pe schema deformată

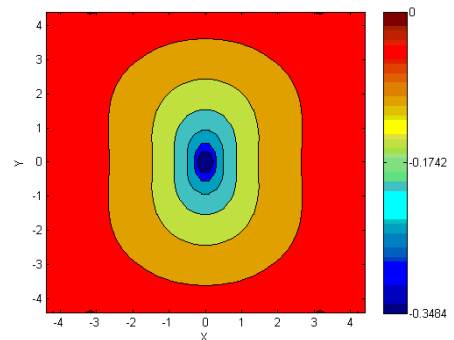


Fig. 3.14. Câmpul momentului de încovoiere M_x în placa simplu rezemată pe toate laturile

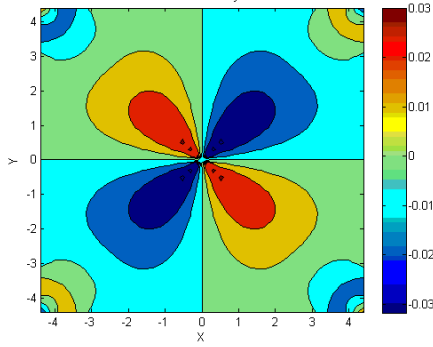


Fig. 3.15. Câmpul momentului de torsiune M_{xy} în placa simplu rezemată pe toate laturile

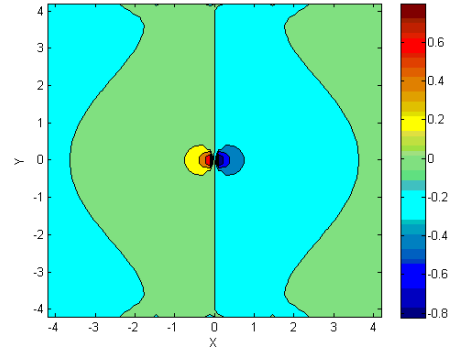


Fig. 3.16. Câmpul forței transversale Q_x în placa simplu rezemată pe toate laturile

Pentru calculul analitic s-au folosit soluții sub formă de serii simple, care pot fi găsite în [123]. Expresia generală a săgeții pentru placa sollicitată de o forță concentrată F aplicată într-un punct A situat pe axa x (Fig. 3.11.) are forma:

$$w = \frac{Fa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) \operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) - \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m}, \quad (3.43)$$

unde $\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$.

Soluția (3.43) este valabilă pentru $y \geq 0$.

Expresiile pentru eforturile interioare pot fi obținute cu ajutorul relațiilor (1.13) și (1.15) prin diferențierea soluției (3.43).

Pentru secțiunea centrală $y = 0$ momentele de încovoiere vor căpăta forma:

$$\begin{aligned} M_x|_{y=0} &= \frac{F}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left[(1 + \nu) \operatorname{th} \alpha_m - \frac{(1 + \nu) \alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}; \\ M_y|_{y=0} &= \frac{F}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left[(1 + \nu) \operatorname{th} \alpha_m + \frac{(1 + \nu) \alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

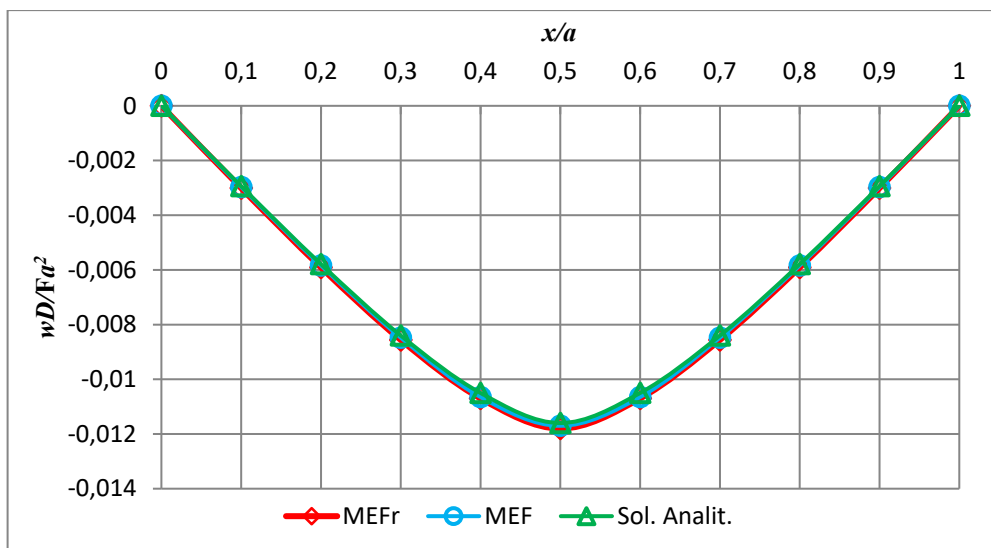


Fig. 3.17. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$

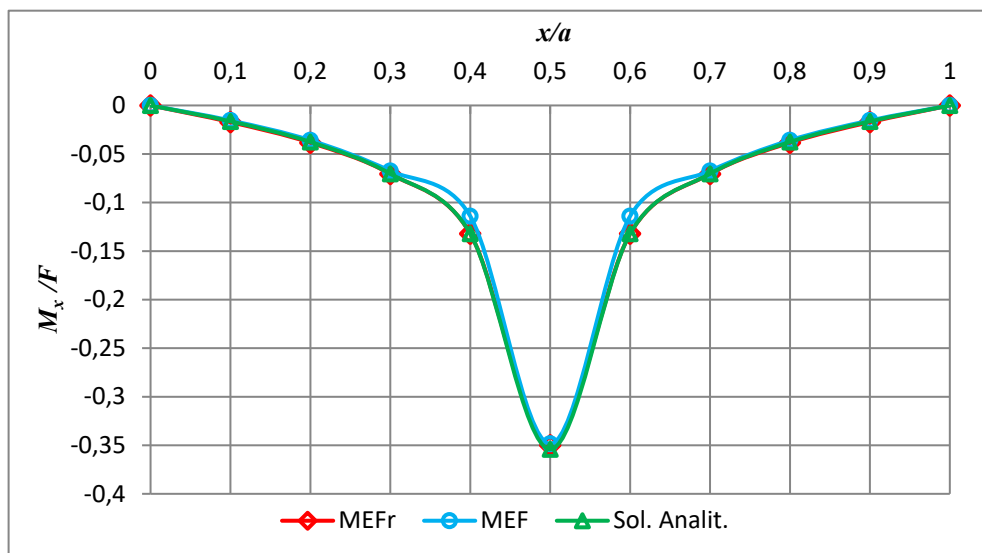


Fig. 3.18. Momentul de încovoiere M_x pe secțiunea centrală $y = 0$

Valorile săgeții și ale momentului e pentru $\nu = 0,2$ sunt prezentate în Tabelul 3.1:

Tabelul 3.1. Deplasări, eforturi și devieri pentru placa simplu rezemată

Metoda	Deplasarea $w _{x=0, y=0} \times Fa^2 / D$	Efortul $M_x _{x=0, y=0} \times F$	Devieri față de metoda analitică	
			$\Delta w, \%$	$\Delta M_x, \%$
Analic	0,0116	0,354		
MEF	0,0117	0,348	0,86	1,69
MEFr	0,0118	0,350	1,7	1,13

b) Placă dreptunghiulară simplu rezemată pe toate laturile, solicitată de o încărcare uniform distribuită pe toată suprafața.

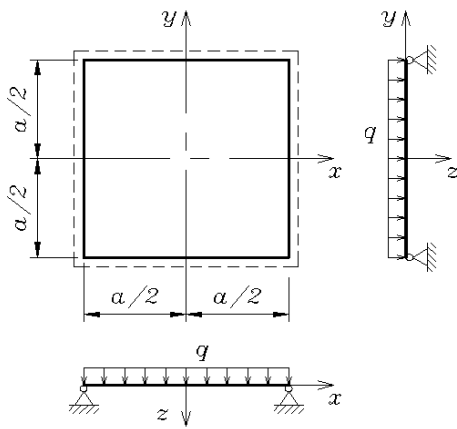


Fig. 3.19. Placă pătrată, simplu rezemată pe toate laturile

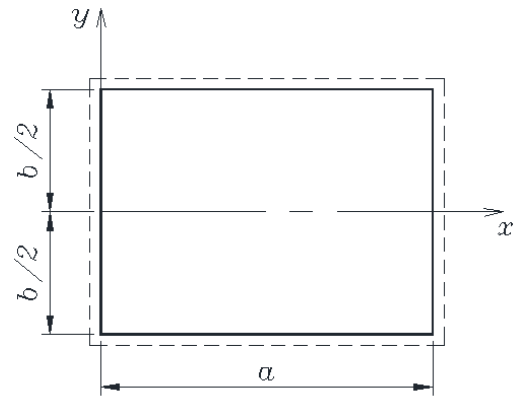


Fig. 3.20. Schema de calcul a plăcii pentru metoda analitică

În continuare sunt prezentate rezultatele obținute cu ajutorul programului de calcul mașionat anterior (Anexa 3.) pentru o placă pătrată simplu rezemată pe toate laturile, încărcată cu sarcină uniform distribuită pe toată suprafața (Fig. 3.19.).

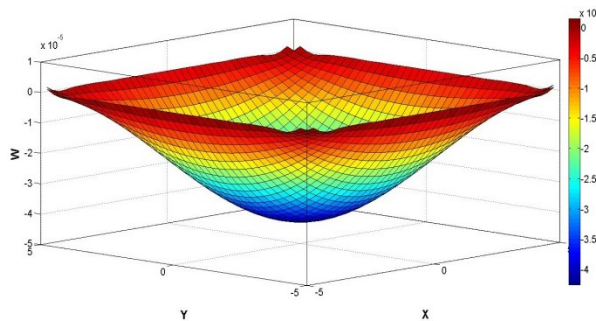


Fig. 3.21. Câmpul deplasărilor verticale w în placa simplu rezemată pe toate laturile prezentat pe schema deformată

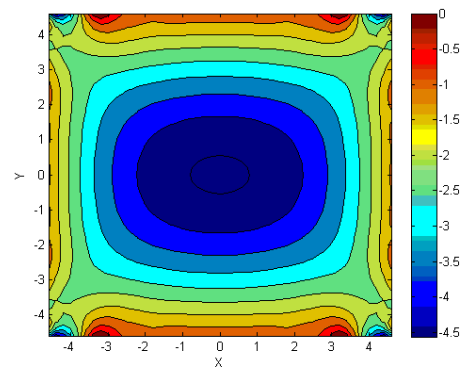


Fig. 3.22. Câmpul momentului M_x în placa simplu rezemată pe toate laturile

Rezultatele obținute prin MEFr bazate pe soluții discontinue au fost comparate cu cele obținute prin MEF și cu cele analitice, pe secțiunea centrală $y = 0$. Acestea sunt prezentate sub formă de diagrame (Fig. 3.25., 3.26.) conform schemei de calcul din Fig. 3.19.

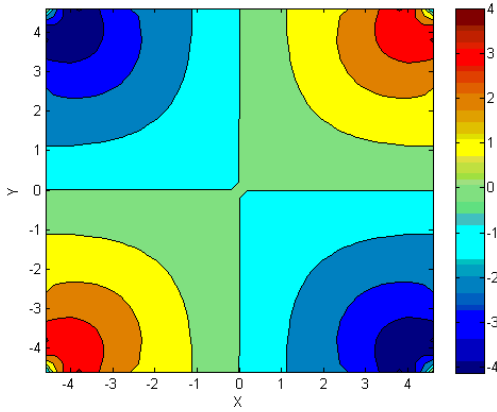


Fig. 3.23. Câmpul momentului M_{xy} în placa simplu rezemată pe toate laturile

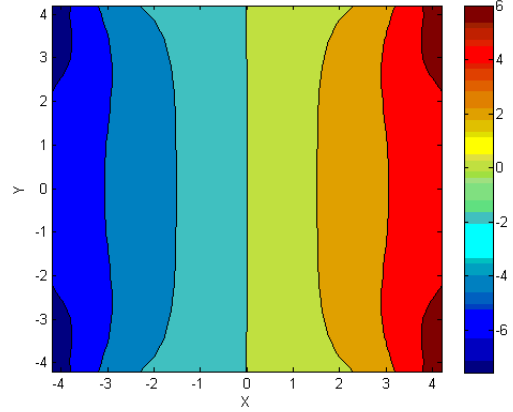


Fig. 3.24. Câmpul forței transversale Q_x în placa simplu rezemată pe toate laturile

Pentru calculul analitic s-au folosit soluții sub formă de serie simplă, care pot fi găsite în [123]. Soluția generală a săgeții pentru placa sollicitată de o încărcare uniform distribuită q pe toată suprafața (Fig. 3.20.) este dată de expresia:

$$w_0 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{2y}{b} \operatorname{sh} \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (3.45)$$

unde $\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$.

Momentele de încovoiere în orice punct al plăcii se vor calcula cu relațiile:

$$\begin{aligned} M_x|_{y=0} &= \frac{qx(a-x)}{2} + (1-\nu)qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m^2 \left[A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ &+ \left. B_m \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{2\nu}{1-\nu} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \\ M_y|_{y=0} &= \nu \frac{qx(a-x)}{2} - (1-\nu)qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m^2 \left[A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ &+ \left. B_m \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{2\nu}{1-\nu} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \quad (3.1.46.)$$

unde $A_m = -\frac{2(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}$; $B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}$.

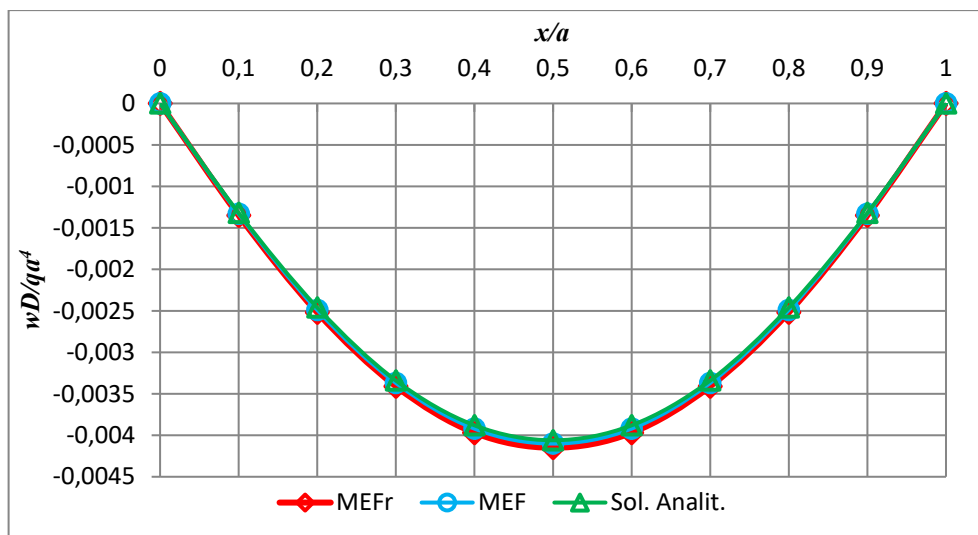


Fig. 3.25. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$

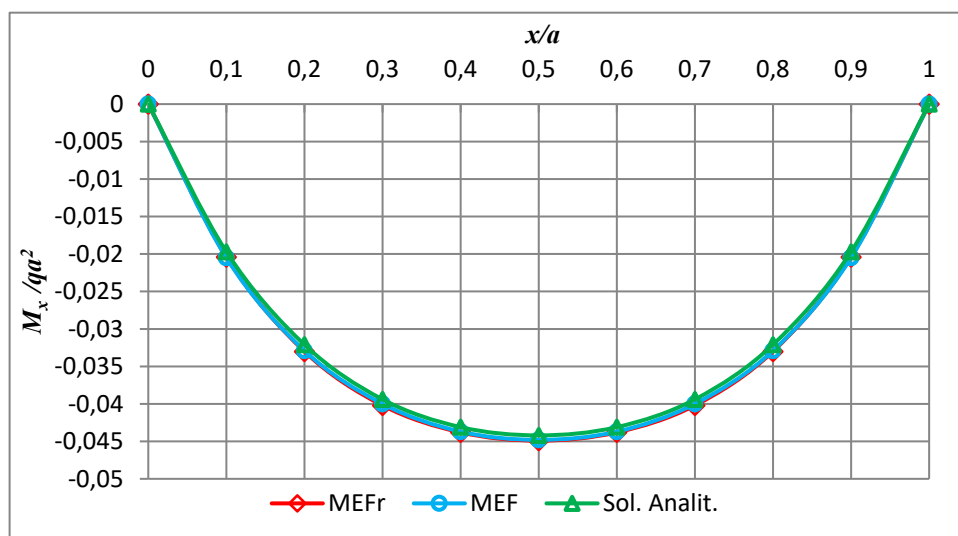


Fig. 3.26. Momentul de încovoiere M_x pe secțiunea centrală $y = 0$

Valorile săgeții și ale momentului de încovoiere pentru $\nu = 0,2$ sunt prezentate în Tabelul 3.2.

Tabelul 3.2. Deplasări, eforturi și devieri pentru placa simplu rezemată

Metoda	Deplasarea $w _{x=0, y=0} \times qa^4 / D$	Efortul $M_x _{x=0, y=0} \times qa^2$	Devieri față de metoda analitică	
			$\Delta w, \%$	$\Delta M_x, \%$
Analitic	0,00406	0,0442		
MEF	0,00410	0,0448	0,99	1,36
MEFr	0,00415	0,0449	2,2	1,58

c) Placă dreptunghiulară încadrată pe toate laturile, solicitată de o forță concentrată.

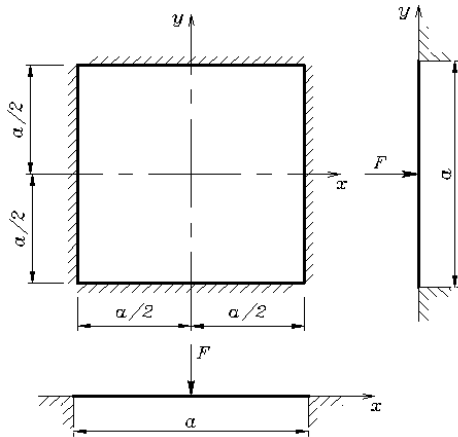


Fig. 3.27. Placă pătrată, încadrată

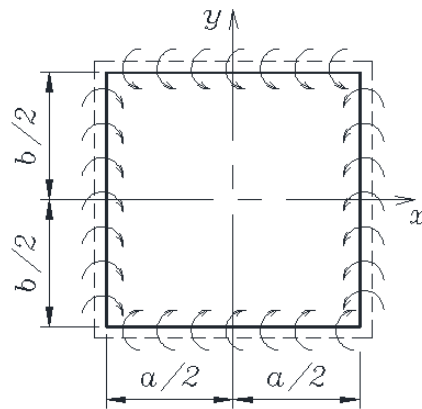


Fig. 3.28. Schema de calcul a plăcii pentru metoda analitică

Cu ajutorul programului de calcul (Anexa 3.) s-au obținut câmpurile pentru o placă pătrată încadrată pe toate laturile, solicitată la centru de o forță concentrată F (Fig. 3.27.).

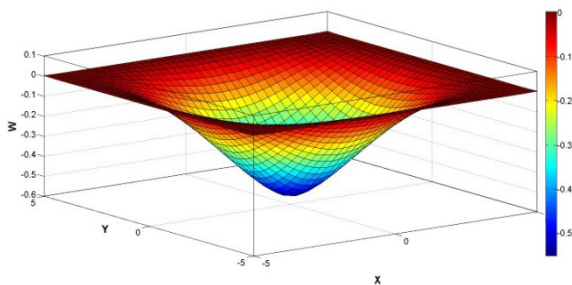


Fig. 3.29. Câmpul deplasării verticale w în placa încadrată pe toate laturile

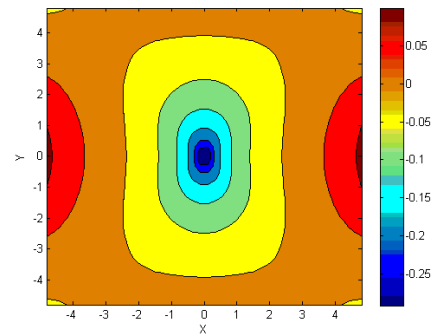


Fig. 3.30. Câmpul momentului încovoietor M_x în placa încadrată pe toate laturile

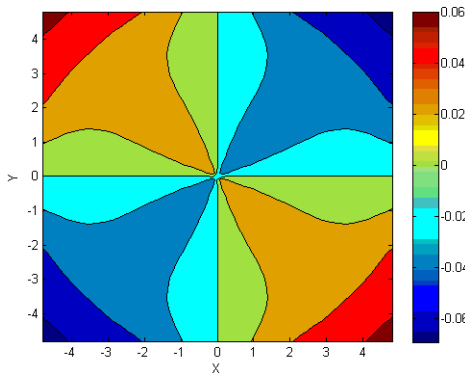


Fig. 3.31. Câmpul momentului de torsiune M_{xy} în placa încadrată pe toate laturile

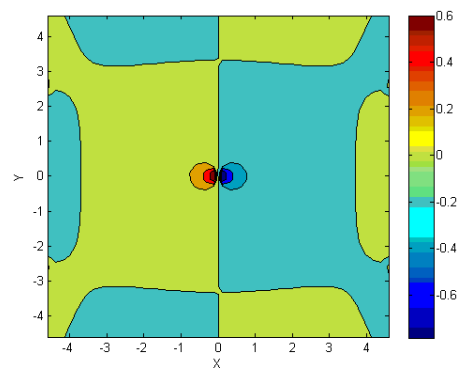


Fig. 3.32. Câmpul forței transversale Q_x în placa încadrată pe toate laturile

Rezultatele obținute prin MEFr bazate pe soluții discontinue au fost comparate cu cele obținute prin MEF și cu cele analitice, pe secțiunea centrală $y = 0$. Acestea sunt prezentate sub formă de diagrame (Fig. 3.33., 3.34.) conform schemei de calcul din Fig. 3.27.

Pentru calculul analitic s-au folosit soluții sub formă de serie simplă, care pot fi găsite în literatura de specialitate [123]. Soluția generală a săgeții pentru placa solicitată de o forță concentrată F aplicată în centrul plăcii (Fig. 3.28.) se va determina prin suprapunerea deplasărilor provenite din momentele de încovoiere distribuite de-a lungul marginilor peste cele ale unei plăci simplu rezemate.

Deplasările unei plăci dreptunghiulare simplu rezemate, încărcată la centru de o forță concentrată poate fi determinată introducând în expresia (3.45): $a/2$ în loc de ζ și $x + a/2$ în loc de x . Astfel, în noile coordonate soluția (valabilă pentru $y \geq 0$) va avea forma:

$$w_0 = \frac{Fa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \cos \frac{m\pi x}{a} \left[\left(\operatorname{th} \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \quad (3.47)$$

Deplasările provenite din momentul distribuit pe marginile $y = \pm b/2$ vor fi:

$$w_1 = -\frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right). \quad (3.48)$$

Deplasările provenite din momentul distribuit pe marginile $x = \pm a/2$ vor fi:

$$w_2 = -\frac{b^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} F_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2 \operatorname{ch} \beta_m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\frac{m\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b} - \beta_m \operatorname{th} \beta_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} \right). \quad (3.49)$$

unde $\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$; $\beta_m = \frac{m\pi a}{2b}$.

În final, deplasarea unei plăci dreptunghiulare încastrată pe contur se va calcula cu relația:

$$w = w_0 + w_1 + w_2 \quad (3.50.)$$

Dacă se va cerceta o placă pătrată, atunci coeficienții $E_m = F_m$

$$E_1 = -0,1025 F, \quad E_3 = 0,0263 F, \quad E_5 = 0,0042 F, \quad E_7 = 0,0015 F, \dots$$

Momentul de încovoiere de-a lungul marginii $y = \pm b/2$ va fi:

$$M_y = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (3.51)$$

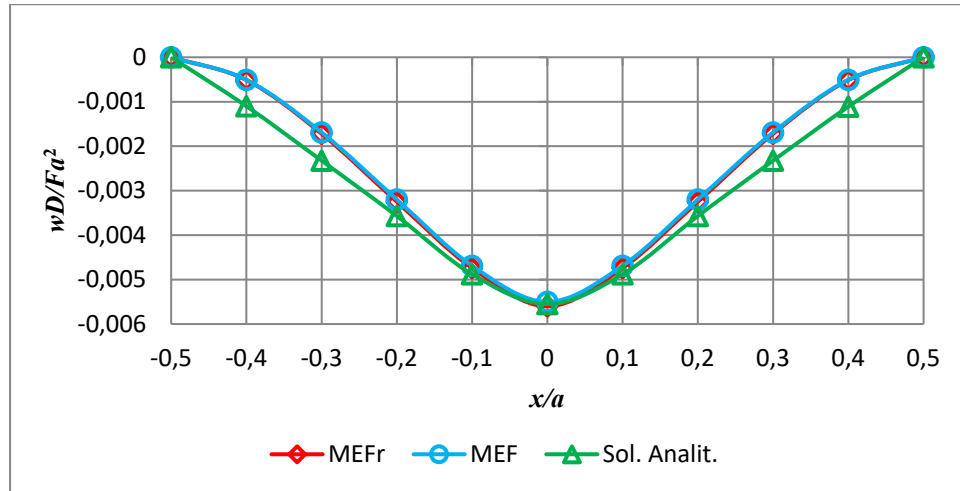


Fig. 3.33. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$

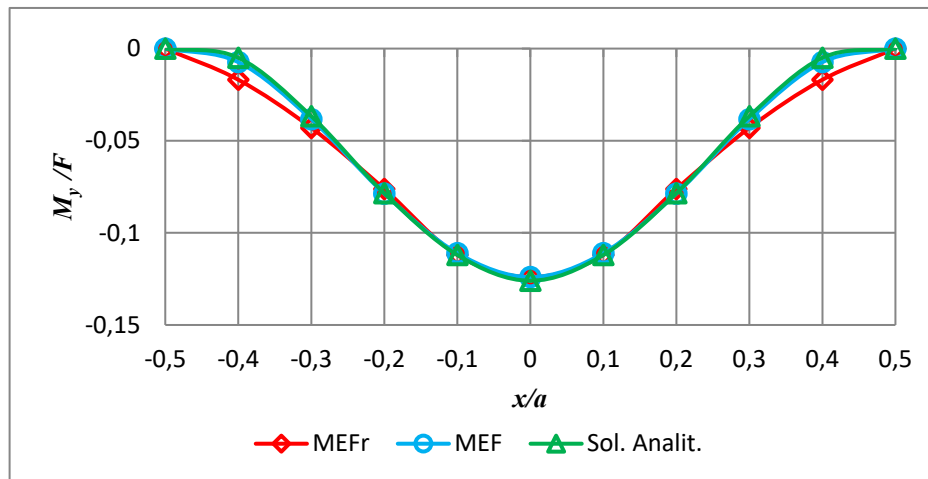


Fig. 3.34. Momentul de încovoiere M_y pe marginea $y = \pm b/2$

Valorile săgeții w și ale momentului M_x pentru $\nu = 0,2$ sunt prezentate în Tabelul 3.3.

Tabelul 3.3. Deplasări, eforturi și devieri pentru placa încastrată

Metoda	Deplasarea $w _{\substack{x=0 \\ y=0}} \times Fa^2 / D$	Efortul $M_x _{\substack{x=0 \\ y=\pm b/2}} \times F$	Devieri față de metoda analitică	
			$\Delta w, \%$	$\Delta M_x, \%$
Analitic	0,00555	0,0126		
MEF	0,00555	0,0124	0,00	1,59
MEFr	0,00556	0,0124	0,18	1,59

d) Placă dreptunghiulară încastrată pe toate laturile, solicitată de o încărcare uniform distribuită pe toată suprafața

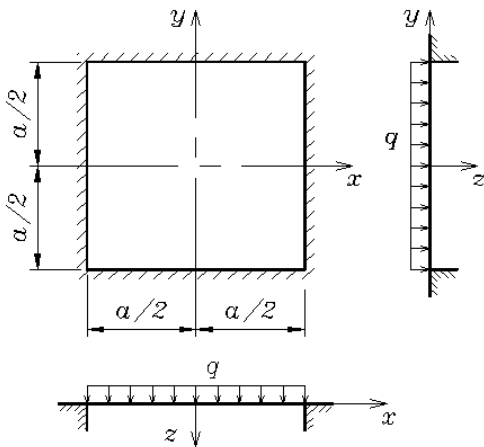


Fig. 3.35. Placă pătrată încastrată pe toate laturile

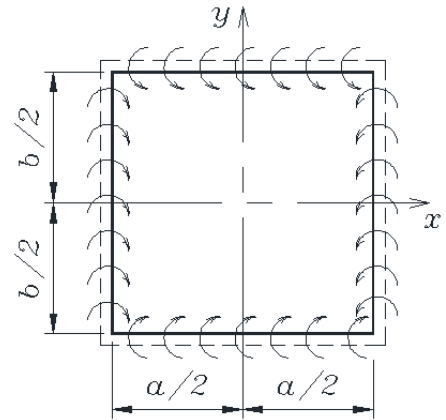


Fig. 3.36. Schema de calcul a plăcii pentru metoda analitică

Analogic cazurilor precedente s-au obținut câmpurile pentru o placă pătrată încastrată pe toate laturile, încărcată cu sarcină uniform distribuită pe toată suprafața (Fig. 3.35.).

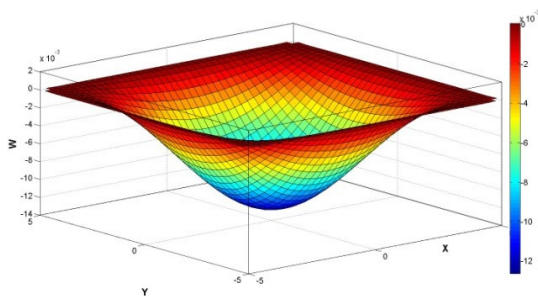


Fig. 3.37. Câmpul deplasării verticale w în placa încastrată pe toate laturile

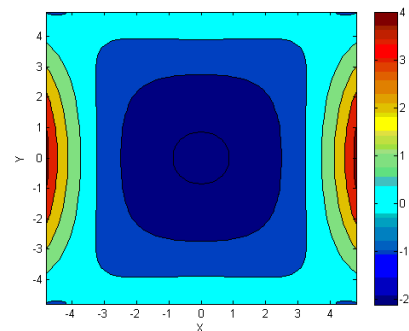


Fig. 3.38. Câmpul momentului încovoietor M_x în placa încastrată pe toate laturile

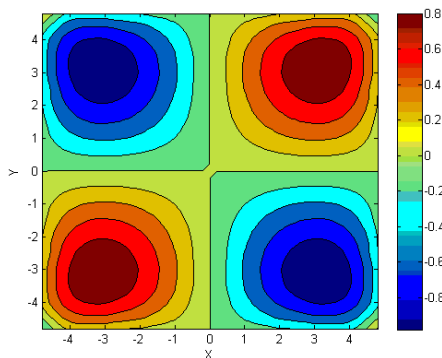


Fig. 3.39. Câmpul momentului de torsiune M_{xy} în placa încastrată pe toate laturile

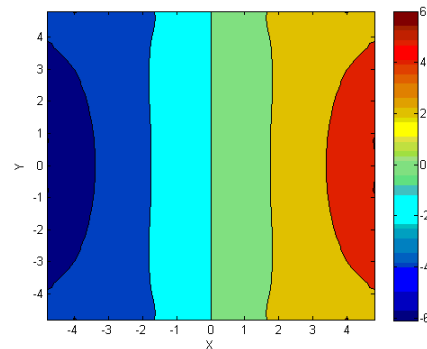


Fig. 3.40. Câmpul forței transversale Q_x în placa încastrată pe toate laturile

Pentru calculul analitic s-au folosit soluțiile din [123]. Soluția generală a săgeții pentru placa solicitată de o sarcină q uniform distribuită pe toată suprafața (Fig. 3.36.) se va determina prin suprapunerea deplasărilor provenite din momentele de încovoiere distribuite de-a lungul marginilor peste cele ale unei plăci simplu rezemate.

Expresia pentru deplasarea verticală a unei plăci dreptunghiulare simplu rezemate, solicitată de o sarcină uniform distribuită pe toată suprafața se determină cu relația (3.45), iar deplasările provenite din momentele distribuite pe marginile plăcii – cu relațiile (3.48) și (3.49).

În final, deplasarea unei plăci dreptunghiulare încastată pe contur se va calcula prin relația (3.50). Dacă se va cerceta o placă pătrată, atunci coeficienții $E_m = F_m$.

$$E_1 = -0.3721 \frac{4qa^2}{\pi^3}, \quad E_3 = 0.0380 \frac{4qa^2}{\pi^3}, \quad E_5 = -0.01774 \frac{4qa^2}{\pi^3}, \quad E_7 = 0.00852 \frac{4qa^2}{\pi^3}, \dots$$

Momentul de încovoiere de-a lungul marginii $y = \pm b/2$ se va calcula prin relația (3.51).

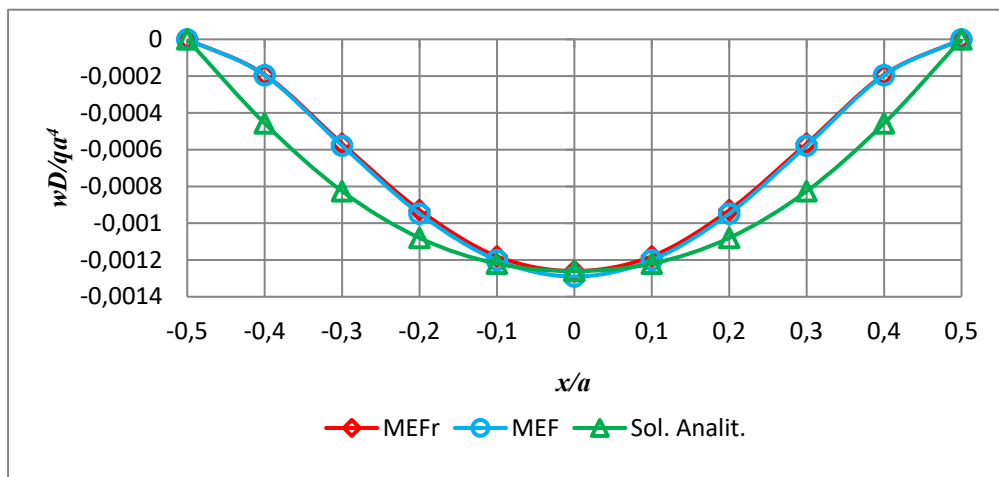


Fig. 3.41. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$

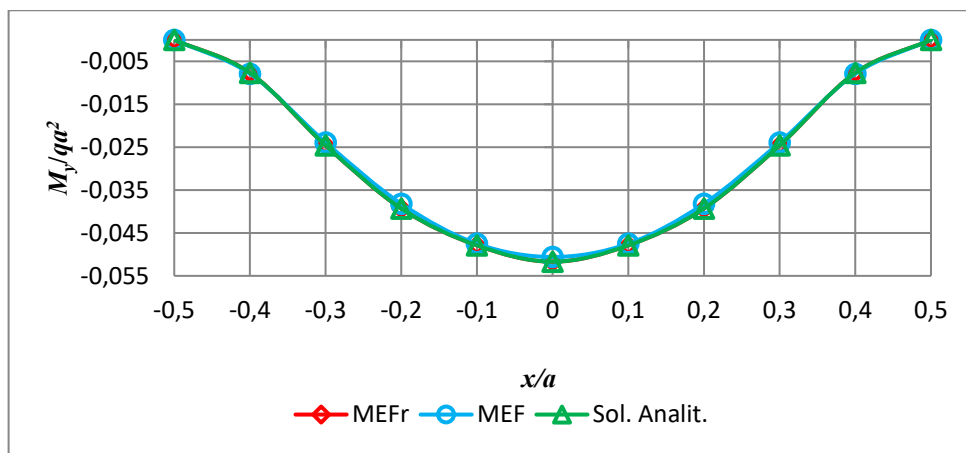


Fig. 3.42. Momentul de încovoiere M_y pe marginea $y = \pm b/2$

Valorile săgeții și ale momentului de încovoiere pentru $\nu = 0,2$ sunt prezentate în Tabelul 3.4.

Tabelul 3.4. Deplasări, eforturi și devieri pentru placa încastrată

Metoda	Deplasarea	Efortul	Devieri față de metoda analitică	
	$w _{\substack{x=0 \\ y=0}} \times qa^4 / D$	$M_x _{\substack{x=0 \\ y=\pm b/2}} \times qa^2$	$\Delta w, \%$	$\Delta M_x, \%$
Analic	0,00126	-0,0517		
MEF	0,00129	-0,0506	2,38	2,17
MEFr	0,00126	-0,0506	0,00	2,17

e) Placă dreptunghiulară având două laturi opuse simplu rezemate, o latură încastrată și cea opusă liberă, solicitată de o forță concentrată la centru.

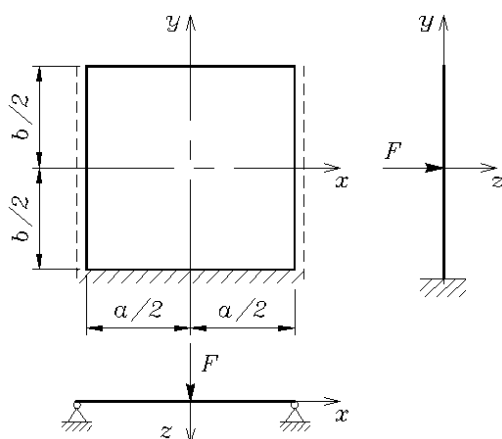


Fig. 3.43. Placă pătrată având diferite moduri de rezemare

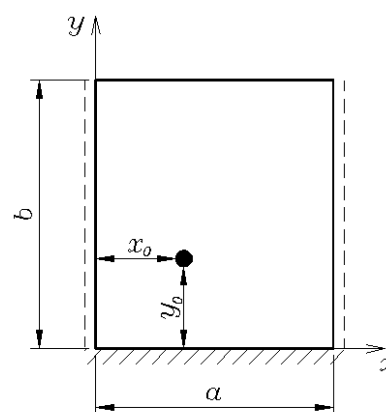


Fig. 3.44. Schema de calcul a plăcii pentru metoda analitică

În continuare sunt prezentate rezultatele obținute cu ajutorul programului de calcul prezentat în Anexa 3 pentru o placă pătrată având două laturi opuse simplu rezemate, o latură încastrată și cea opusă – liberă [41] (Fig. 3.43.).

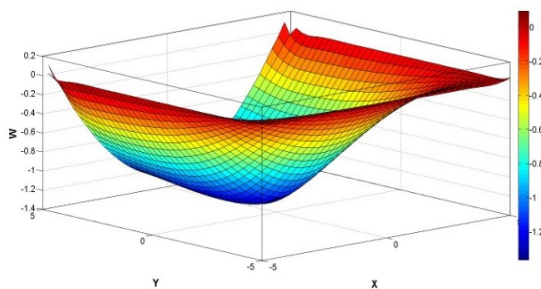


Fig. 3.44. Câmpul deplasării verticale w în placa cu diferite condiții de rezemare

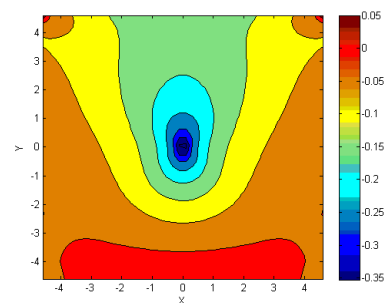


Fig. 3.45. Câmpul momentului încovoiător M_x în placa cu diferite condiții de rezemare

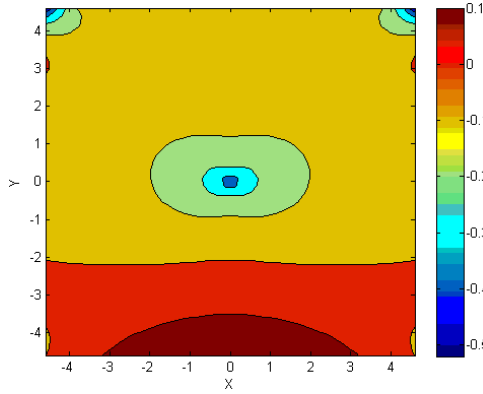


Fig. 3.46. Câmpul momentului încovoiator M_y în placa cu diferite condiții de rezemare

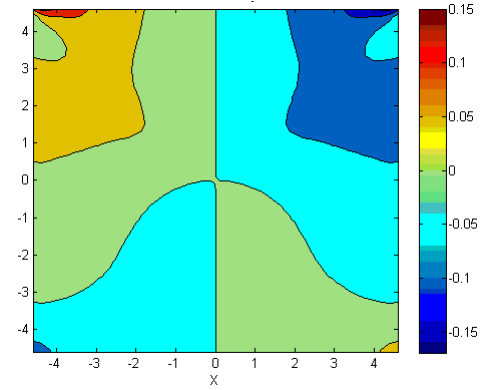


Fig. 3.47. Câmpul momentului de torsiune M_{xy} în placa cu diferite condiții de rezemare

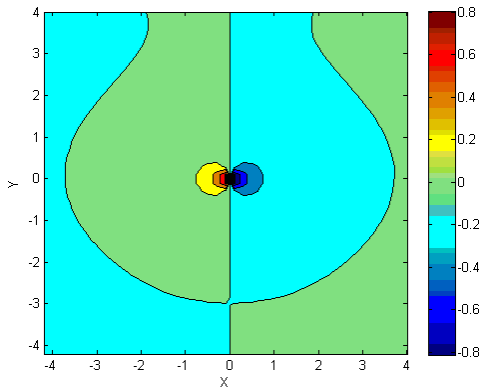


Fig. 3.48. Câmpul forței transversale Q_x în placa cu diferite condiții de rezemare

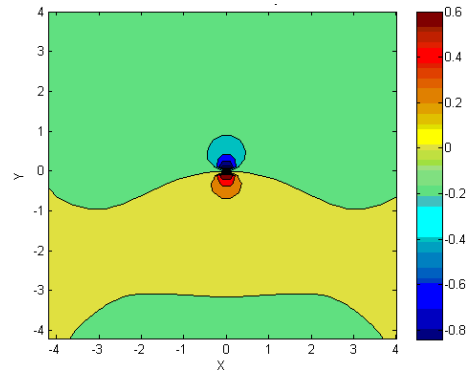


Fig. 3.49. Câmpul forței transversale Q_y în placa cu diferite condiții de rezemare

Rezultatele analitice au fost obținute pentru schema de calcul din Fig. 3.44. Pentru calculul analitic s-au folosit soluțiile din [38]. Soluția generală a săgeții pentru placa sollicitată de o forță concentrată F este necesară de a fi devizată în două părți, în care $0 < y < y_0$ și $y_0 < y < b$. Astfel expresia deplasării pentru prima parte va avea forma:

$$w_I = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (B_m \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y + C_m \operatorname{sh} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y) \sin \alpha_m x, \quad (3.52)$$

iar pentru a doua parte:

$$w_{II} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ B_m \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y + C_m \operatorname{sh} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y - \frac{P}{a D \alpha_m^3} \sin \alpha_m x_0 \left[\operatorname{sh} \alpha_m (y - y_0) - \alpha_m (y - y_0) \operatorname{ch} \alpha_m (y - y_0) \right] \right\} \sin \alpha_m x. \quad (3.53)$$

Constantele de integrare B_m , C_m și D_m au forma:

$$B_m = \frac{2(1+\nu)S_0 + (1-\nu)\kappa_0 [2C_0 + (3+\nu)SS'_0] + (1-\nu)^2 \kappa\kappa'_0 S_0}{(3+\nu)(1-\nu)S^2 + (1-\nu)^2 \kappa^2 + 4} \cdot \frac{P}{aD\alpha_m^3} \sin \alpha_m x_0,$$

$$C_m = \frac{(3+\nu)(1-\nu)S(S'_0 + \kappa_0 C'_0) + 4C_0 - 2(1-\nu)\kappa_0 S_0 + (1-\nu)^2 \kappa(S_0 + \kappa'_0 C_0)}{(3+\nu)(1-\nu)S^2 + (1-\nu)^2 \kappa^2 + 4} \cdot \frac{P}{aD\alpha_m^3} \sin \alpha_m x_0,$$

$$D_m = -C_m.$$

unde: $\kappa = \alpha_m b$; $\kappa_0 = \alpha_m y_0$; $\kappa'_0 = \alpha_m (b - y_0)$; $C = \text{ch } \kappa$; $S = \text{sh } \kappa$; $C_0 = \text{ch } \kappa_0$; $S_0 = \text{sh } \kappa_0$;

$C'_0 = \text{ch } \kappa'_0$; $S'_0 = \text{sh } \kappa'_0$.

Expresiile pentru eforturile interioare pot fi obținute utilizând relațiile (1.13) și (1.15).

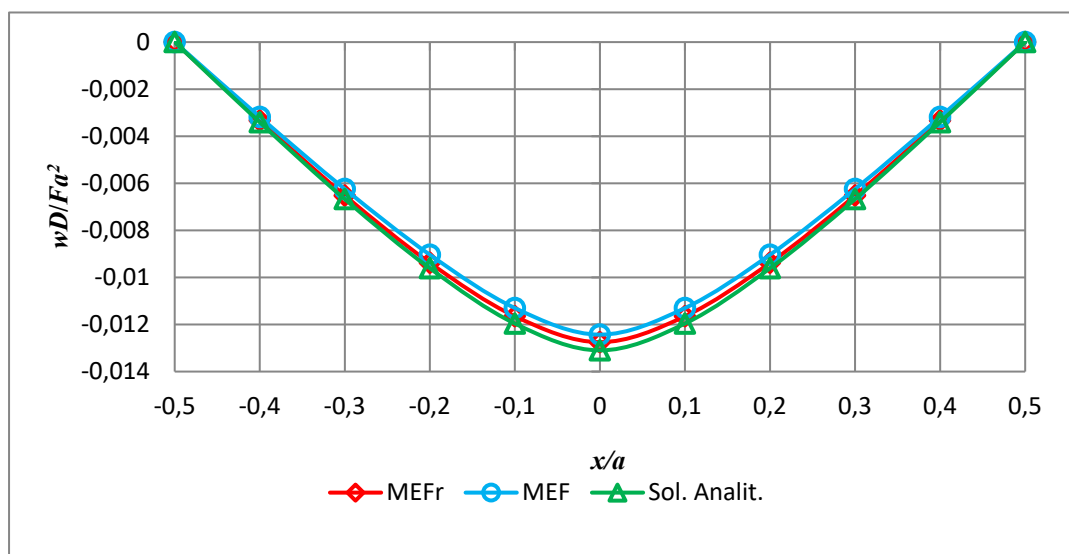


Fig. 3.50. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$

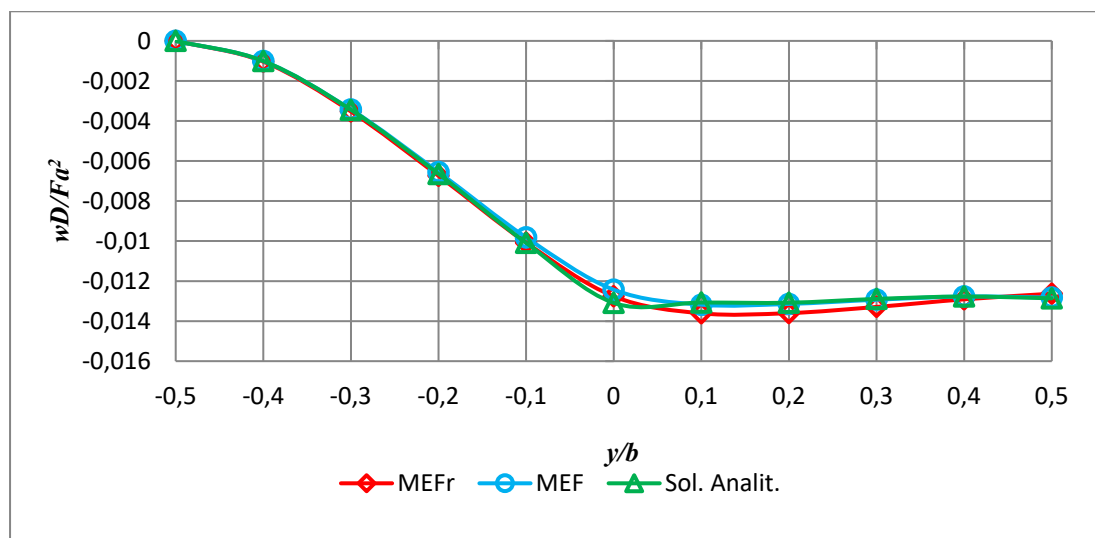


Fig. 3.51. Săgeata w pe secțiunea centrală $x = 0$

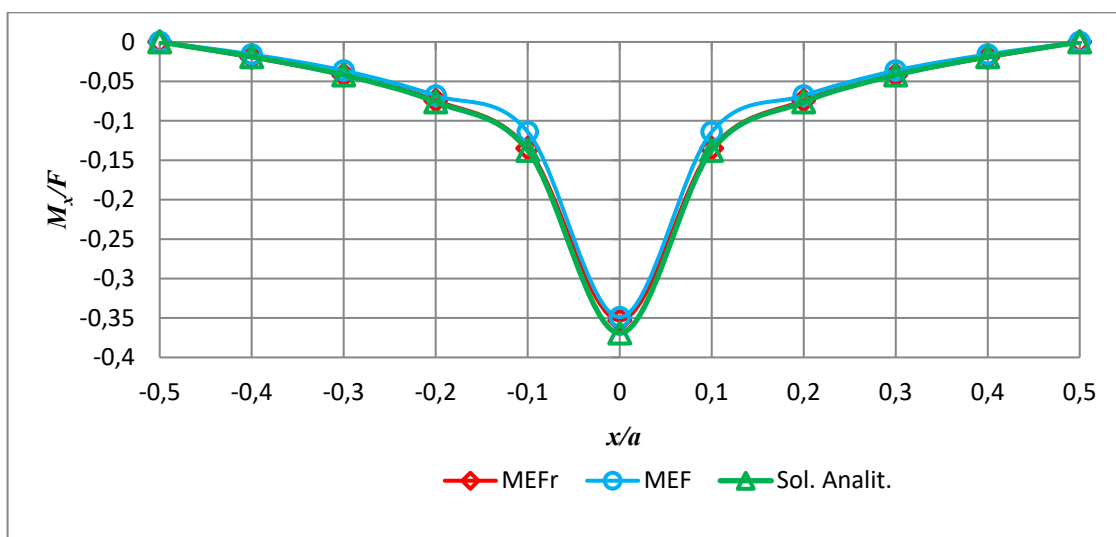


Fig. 3.52. Momentul de încovoiere M_x pe secțiunea centrală $y = 0$

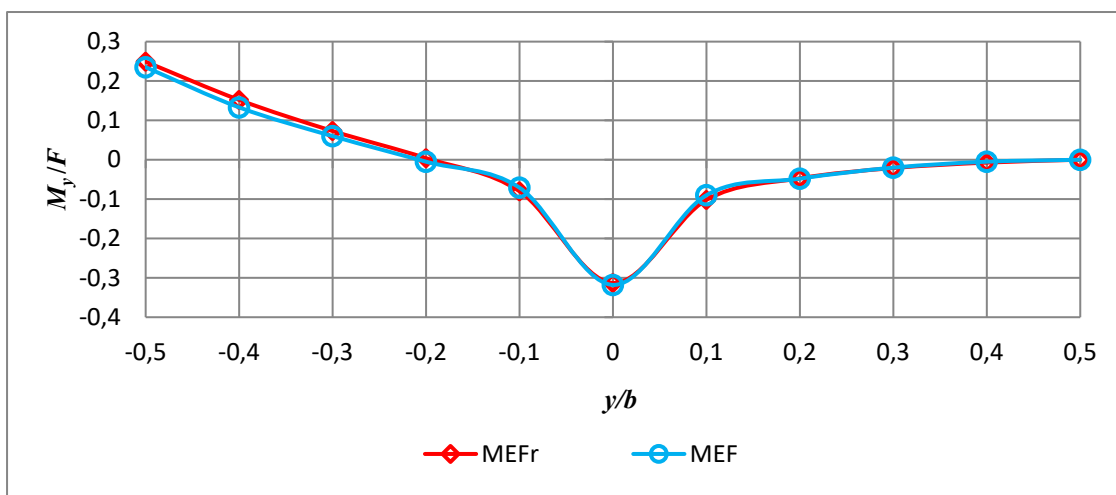


Fig. 3.53. Momentul de încovoiere M_y pe secțiunea centrală $x = 0$

Valori maxime ale săgeții, momentului încovoietor și devieri sunt prezentate în Tabelul 3.5.

Tabelul 3.5. Rezultate pentru placa cu diferite moduri de rezemare

Metoda	Deplasarea $w _{x=0, y=0} \times Fa^2 / D$	Efortul $M_x _{x=0, y=0} \times F$	Devieri față de metoda analitică	
			$\Delta w, \%$	$\Delta M_x, \%$
Analitic	0,01310	0,3692	-	-
MEF	0,01243	0,3490	5,11	5,47
MEFr	0,01276	0,3530	2,59	4,39

3.1.7. Exemplu de calcul a plăcilor cu defect.

Drept exemplu, s-a cercetat o placă pătrată de dimensiunea 10x10 m, încastrată pe toate laturile și încărcată cu o sarcină uniform distribuită $p = 10$ kPa pe toată suprafața, având pe direcția axei y un defect de lungimea $y_d = 2.0$ m, situat la distanța $x_d = 1.5$ m față de centrul plăcii (Fig. 3.54.). Grosimea plăcii $\delta = 0.4$ m; $E = 2.7 \cdot 10^7$ MPa și $\nu = 0.2$.

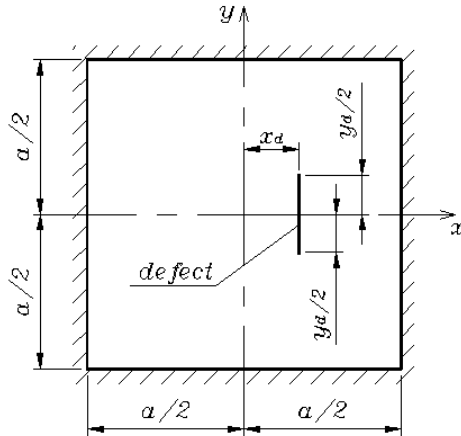


Fig. 3.54. Placă încastrată cu defect

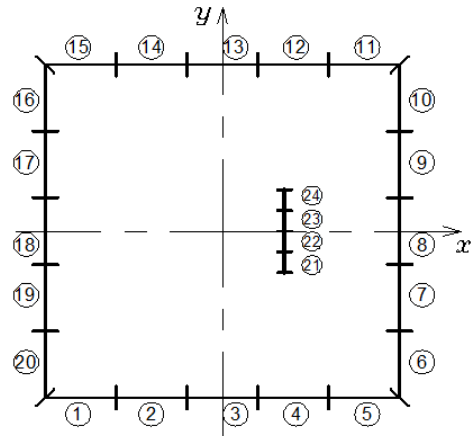


Fig. 3.55. Schema discretizării conturului plăcii cu defect

Defectul cercetat prezintă o articulație plastică. În acest caz, unghiul de rotire în direcția normalei la marginea defectului va avea salt: $\langle \theta_n \rangle \neq 0$, iar de-a lungul defectului poate fi prescrisă următoarea condiție: $M_n^* + M_n^o = 0$.

Conturul plăcii a fost discretizat în 20 de elemente de frontieră, iar defectul în 4 elemente (Fig. 3.55.). În urma calcului cu ajutorul programului prezentat în Anexa 3. s-au obținut câmpul deplasării și ale tensiunilor.

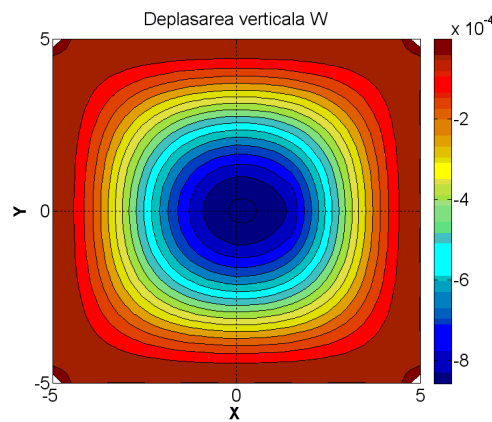


Fig. 3.56. Câmpul deplasărilor verticale w în placa cu defect [m]

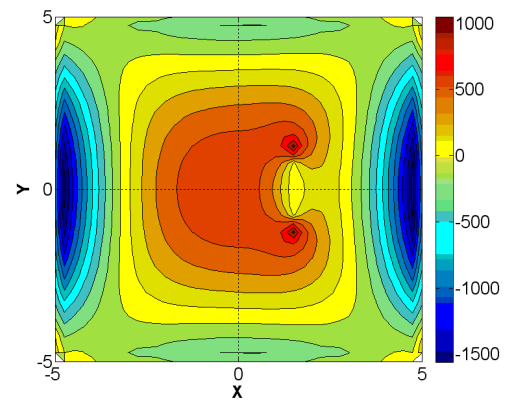


Fig. 3.57. Câmpul tensiunilor normale σ_x în placa cu defect [kPa]

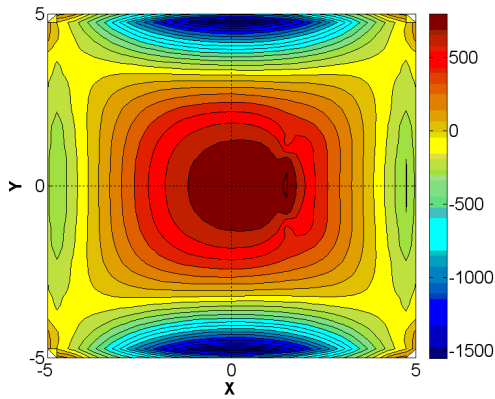


Fig. 3.58. Câmpul tensiunilor normale σ_y în placa cu defect [kPa]

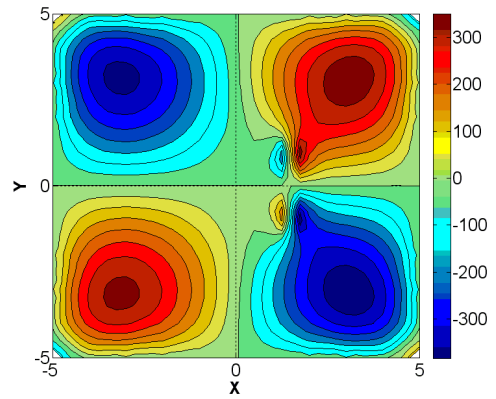


Fig. 3.59. Câmpul tensiunilor tangențiale τ_{xy} în placa cu defect [kPa]

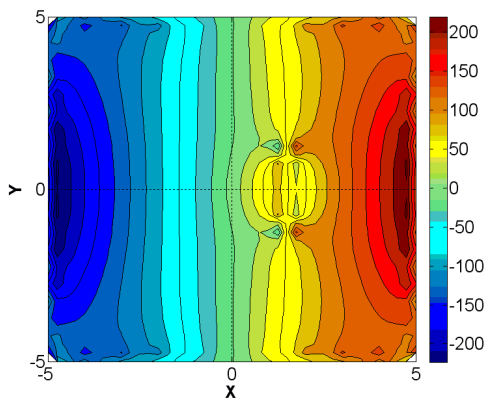


Fig. 3.60. Câmpul tensiunilor tangențiale τ_{xz} în placa cu defect [kPa]

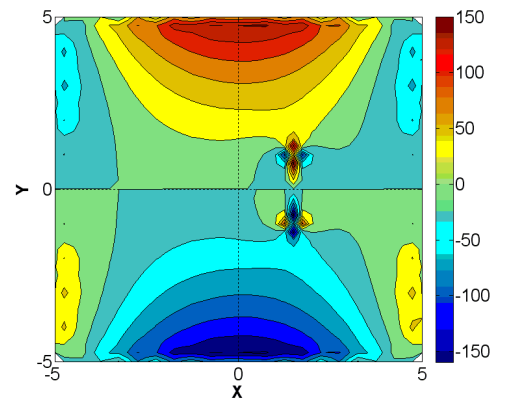


Fig. 3.61. Câmpul tensiunilor tangențiale τ_{yz} în placa cu defect [kPa]

În câmpul deplasărilor (Fig. 3.56.) se observă o excentricitate a deplasărilor maxime față de centrul plăcii, care se extind până la distanța $x_d = 1.5$ m. De asemenea, au loc concentrări ale tensiunilor la capetele defectului (Fig. 3.57. - 3.61.), așa cum și era de așteptat.

Rezolvarea problemelor cu defecte a fost abordată și în lucrările [18, 25, 30-32, 35, 54, 55, 81, 118, 130, 131, 135, 154, 156].

3.1.8. Exemplu de calcul a plăcii având condiții de rezemare mixte pe contur.

Drept exemplu, s-a cercetat o placă pătrată de dimensiunea 11x11 m, având condiții mixte pe contur (Fig. 3.62.) și încărcată cu o sarcină uniform distribuită $p = 1,0$ kPa pe toată suprafața. Grosimea plăcii $\delta = 0.226$ m; $E = 1,0 \cdot 10^6$ MPa și $\nu = 0.2$.

Fiecare latură a plăcii a fost discretizată în câte 11 elemente de frontieră constante, cu lungimea de 1m (Fig. 3.63.), astfel încât fiecare element învecinat să aibă moduri diferite de rezemare.

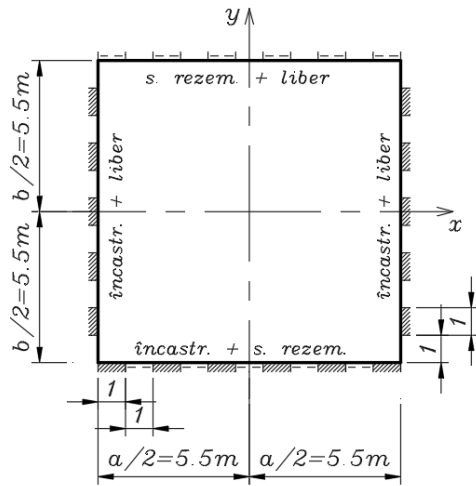


Fig. 3.62. Placă pătrată având condiții mixte pe contur.

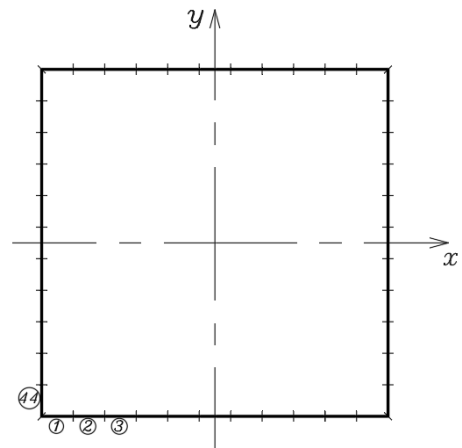


Fig. 3.63. Schema discretizării conturului plăcii având condiții mixte.

În urma calculului cu ajutorul programului descris în Anexa 3. s-au obținut câmpul deplasărilor verticale și ale tensiunilor.

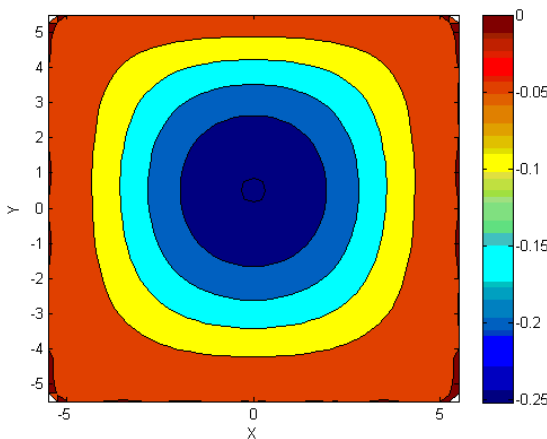


Fig. 3.64. Câmpul deplasărilor verticale w în placă având condiții mixte pe contur [m]

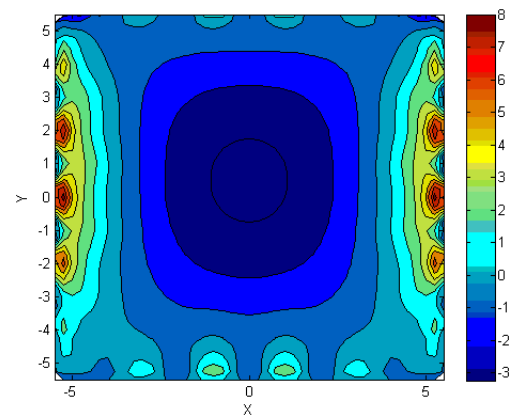


Fig. 3.65. Momentul M_x în placă având condiții mixte pe contur [kNm/m]

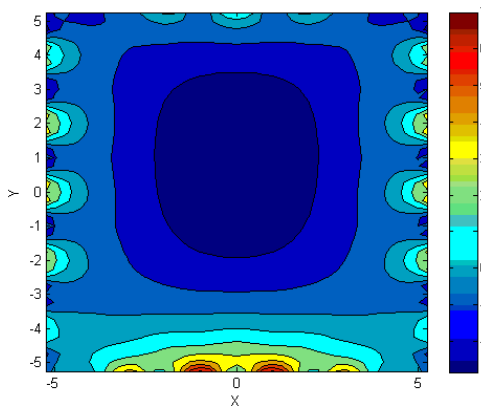


Fig. 3.66. Momentul M_y în placă având condiții mixte pe contur [kNm/m]

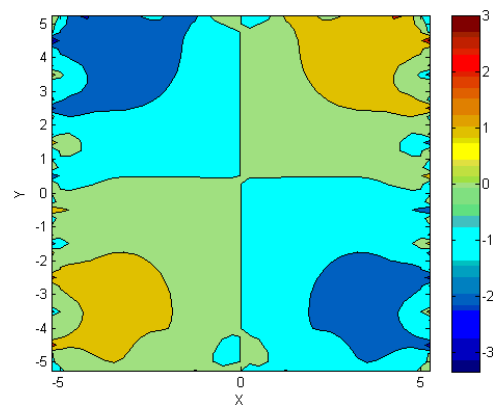


Fig. 3.67. Momentul M_{xy} în placă având condiții mixte pe contur [kNm/m]

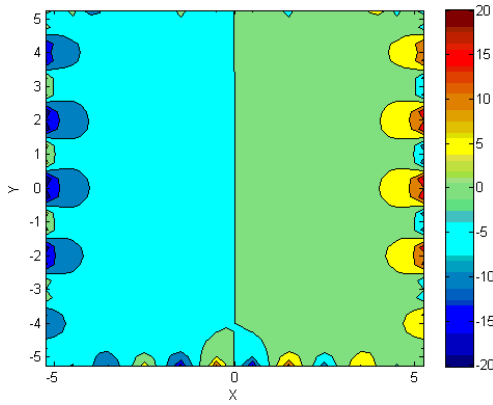


Fig. 3.68. Forța transversală Q_x în placă având condiții mixte pe contur [kN/m]

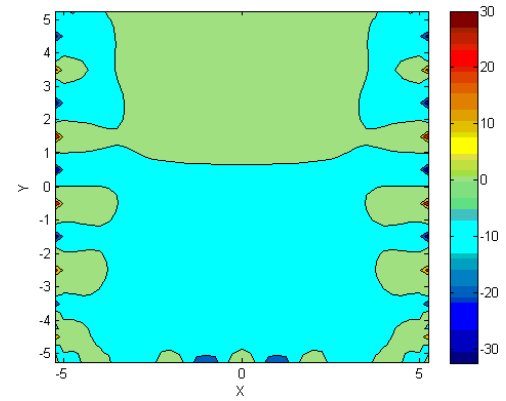


Fig. 3.68*. Forța transversală Q_y în placă având condiții mixte pe contur [kN/m]

În MEF rezolvarea acestei probleme întâmpină dificultăți, întrucât condițiile la limită sunt prescrise în nodurile elementului finit, dar nu direct pe lungimea laturii acestuia. Acest lucru generează „conflict” între elementele învecinate cu moduri diferite de rezemare, dar care au nod de conectare comun. Dacă pentru exemplul cercetat se va utiliza o rețea de discretizare de 11x11 elemente finite cu lungimea laturii de 1 m, în urma introducerii condițiilor la limită va rezulta că laturile $x = -a/2$, $x = +a/2$ și $y = -b/2$ sunt încastrate, iar latura $y = +b/2$ este simplu rezemată (Fig. 3.62.), și nu va corespunde condițiilor problemei. Pentru a obține rezultate adecvate va fi nevoie de a discretiza placa într-un număr mult mai mare de elemente finite, astfel încât influența nodurilor de „conflict” să fie minimalizată, sau de a introduce noduri duble la conexiunea dintre elementele învecinate care au diferite moduri de rezemare, pentru a putea face posibilă introducerea diferitor condiții limită. Acest lucru nu prezintă o rezolvare directă a problemei, ci mai degrabă o „improvizare”.

3.1.9. Exemple de calcul a plăcilor circulare în teoria clasică folosind soluțiile discontinue

Pentru plăci circulare având diferite moduri de rezemare și solicitare soluțiile pot fi obținute efectuând trecerea de la coordonatele carteziene la cele polare [89, 91]. Astfel, pentru a obține soluțiile provenite din defectul de pe contur este necesar de a substitui în relațiile (3.12), (3.14) și (3.16): $x = r \cdot \cos \varphi$ și $y = r \cdot \sin \varphi$.

Soluția în punctul K provenită din sarcina exterioară, dată de o forță concentrată (Fig. 3.68*) aplicată în punctul M va căpăta forma:

$$w_k^F = \frac{F}{8\pi D} \bar{r}^2 \ln \bar{r} \quad (3.54)$$

unde $\bar{r} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

Pentru o sarcină distribuită pe o fâșie inelară (Fig. 3.69) soluția poate fi obținută prin integrarea expresiei (3.54):

$$w_k^q = \int_a^b \int_0^{2\pi} (\bar{r}^2 \ln \bar{r}) \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \quad (3.55)$$

unde: $\bar{r}^2 = r^2 + \rho^2 - 2r \cos \gamma$, iar $\gamma = \varphi - \theta$

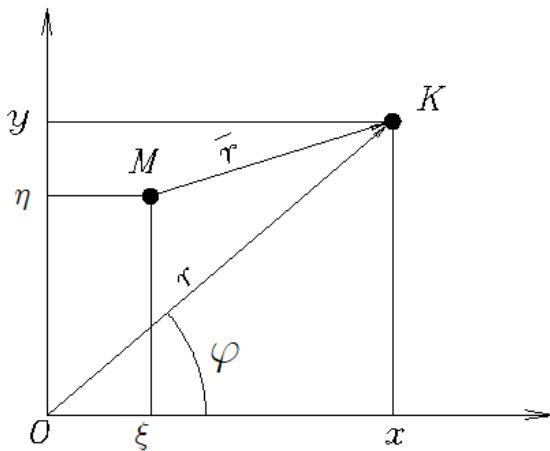


Fig. 3.69. Transformarea coordonatelor carteziene în polare

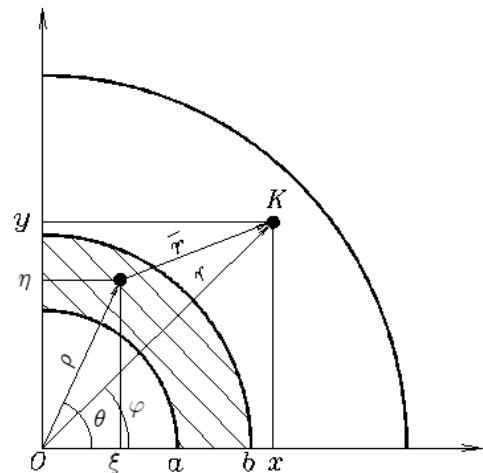


Fig. 3.70. Placă circulară încărcată cu o sarcină distribuită pe o fâșie inelară

Pentru calculul cu ajutorul programului elaborat în limbajul de programare Matlab, ca exemplu pentru plăcile circulare cercetate, a fost selectată o placă, având raza $R = 10$ m și rigiditatea cilindrică $D = 1$, coeficientul lui Poisson $\nu = 0,2$. Conturul plăcii a fost discretizat în 32 de elemente de frontieră constante (Fig. 3.71, a). Pentru comparația cu MEF, suprafața plăcii a fost discretizată în 320 de elemente finite cu câte 4 noduri (Fig. 3.71, b). Au fost analizate trei cazuri: placă simplu rezemată încărcată cu o forță concentrată în centru; placă încastrată încărcată de o sarcină uniform distribuită pe toată suprafața și placă având o jumătate din lungimea conturului încastrată, iar cealaltă simplu rezemată fiind încărcată cu sarcină uniform distribuită.

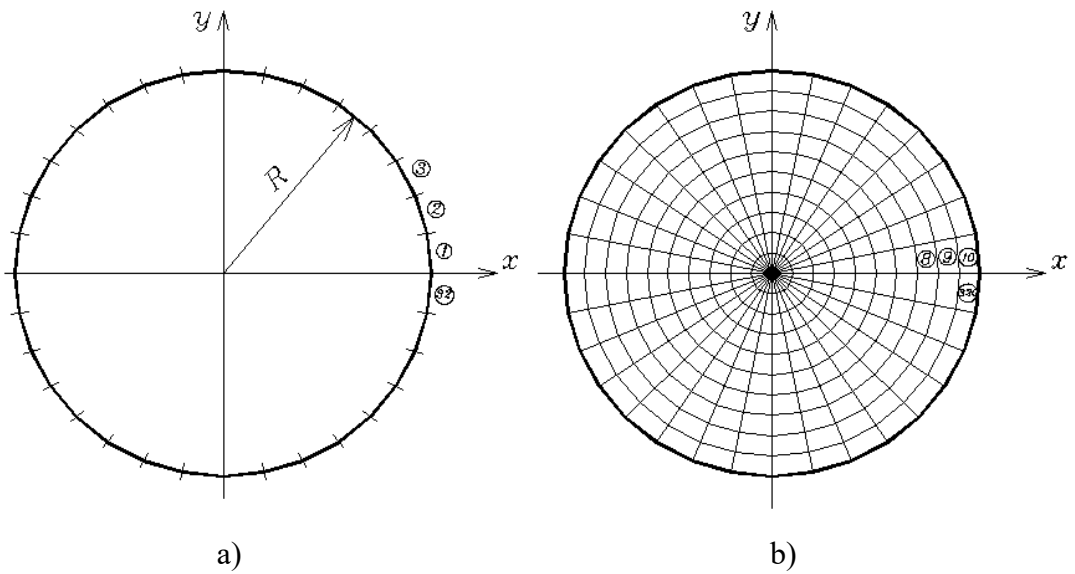


Fig. 3.71. Placă circulară discretizată: a) MEFr; b) MEF

a) Placă circulară, simplu rezemată, încărcată cu o forță concentrată în centru.

În exemplul ce urmează sunt prezentate rezultatele obținute cu ajutorul programului de calcul prezentat în Anexa 3., pentru o placă circulară simplu rezemată pe contur, solicitată la centru de o forță concentrată F (Fig. 3.72.).

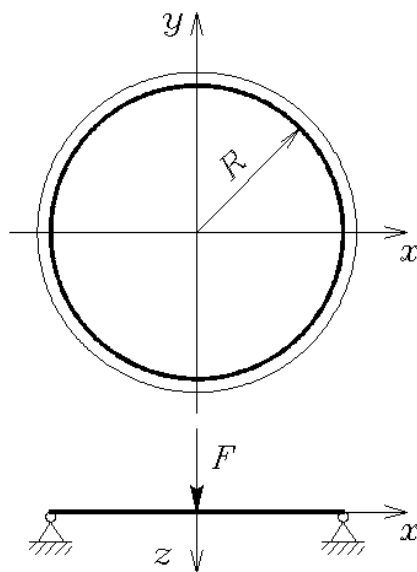


Fig. 3.72. Placă circulară simplu rezemată, încărcată cu o forță concentrată la centru

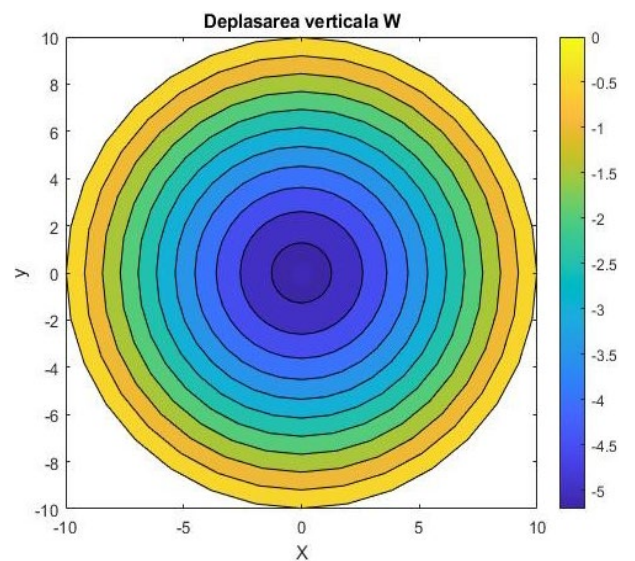


Fig. 3.73. Câmpul deplasărilor verticale w în placa circulară simplu rezemată

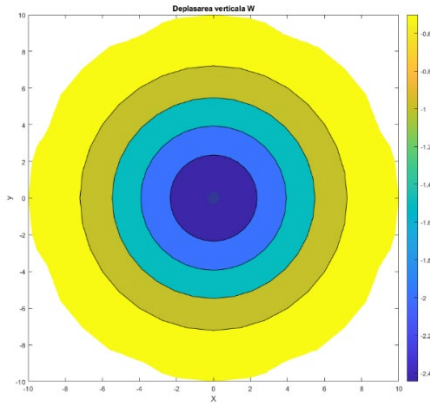


Fig. 3.74. Câmpul momentului radial M_r în placa circulară simplu rezemată

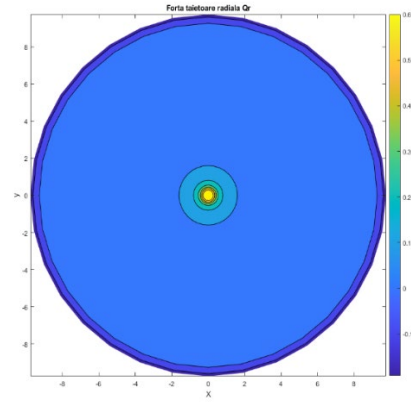


Fig. 3.75. Câmpul forței transversale radiale Q_r în placa circulară simplu rezemată

Pentru calculul analitic s-au folosit soluțiile descrise în [123]. Expresia generală a săgeții în orice punct situat la distanța r față de centrul plăcii are forma:

$$w = \frac{F}{16\pi D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (R^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{R} \right] \quad (3.56)$$

Momentul pe direcție radială:

$$M_r = \frac{F}{4\pi} (1+\nu) \ln \frac{R}{r} \quad (3.57)$$

Rezultatele obținute prin MEFr au fost comparate cu cele obținute prin MEF și cu cele analitice, pe o secțiune radială. Acestea sunt prezentate sub formă de diagrame (Fig. 3.76., 3.77.)

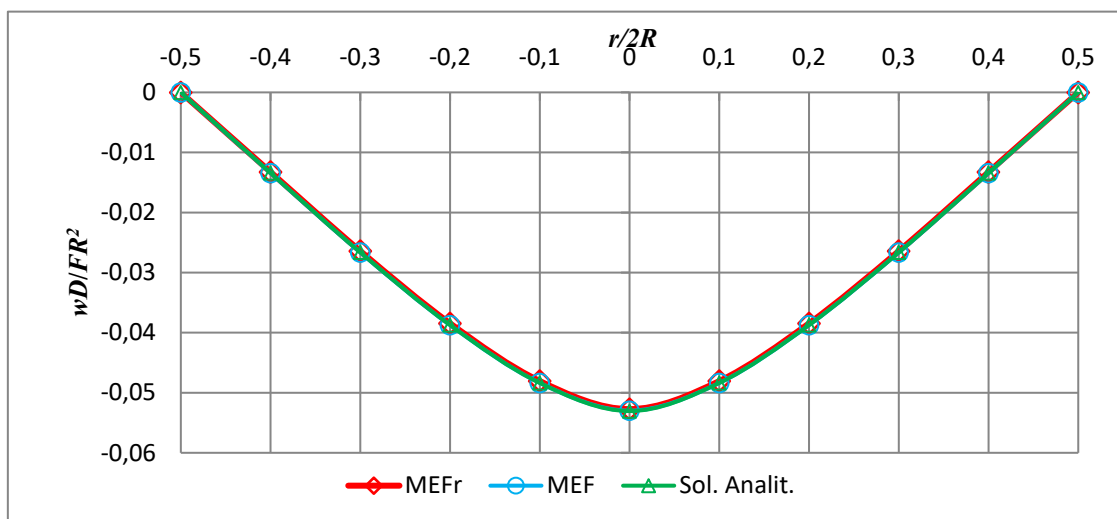


Fig. 3.76. Săgeata w pe o secțiune radială

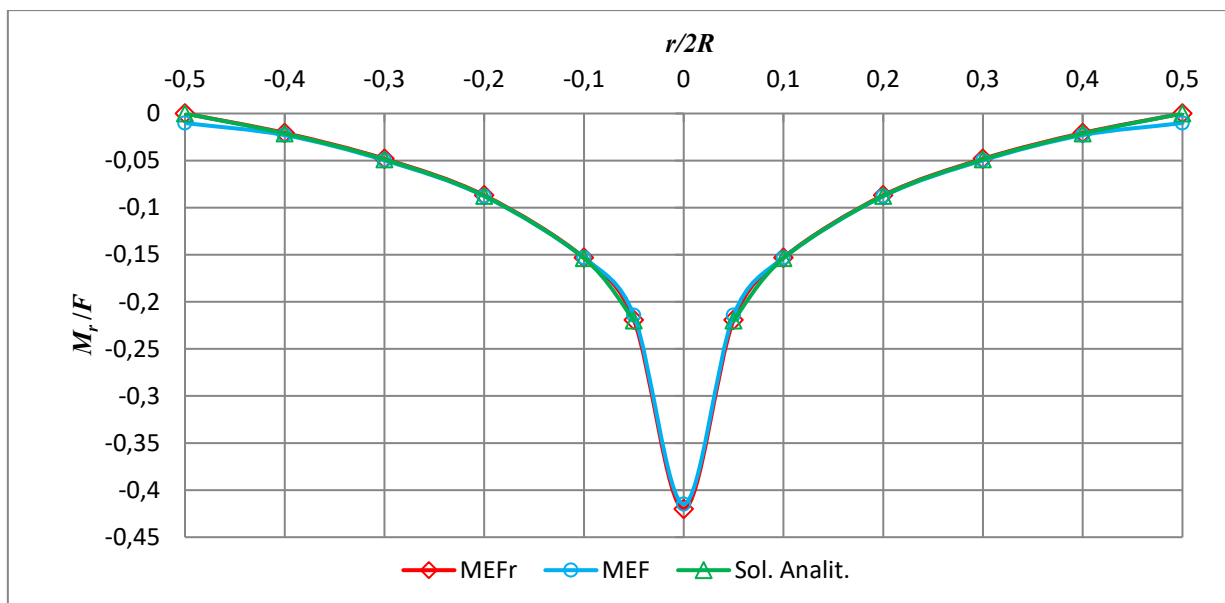


Fig. 3.77. Momentul radial M_r pe o secțiune radială

În Tabelul 3.6. sunt prezentate devierile față de soluțiile analitice.

Tabelul 3.6. Rezultate pentru placa circulară simplu rezemată

Metoda	Deplasarea $w _{r=0} \times FR^2 / D$	Efortul $M_r _{r=\pm 0,1R} \times F$	Devieri față de metoda analitică	
			$\Delta w, \%$	$\Delta M_x, \%$
Analitic	0,05305	0,2199	-	-
MEF	0,05298	0,2143	0,13	2,55
MEFr	0,05273	0,2193	0,60	0,27

b) Placă circulară, încastrată, încărcată cu sarcină uniform distribuită pe toată suprafața.

În exemplul dat sunt prezentate rezultatele obținute cu ajutorul programului de calcul prezentat în Anexa 3., pentru o placă circulară încastrată pe contur, încărcată cu sarcină uniform distribuită q pe toată suprafața (Fig.3.78.).

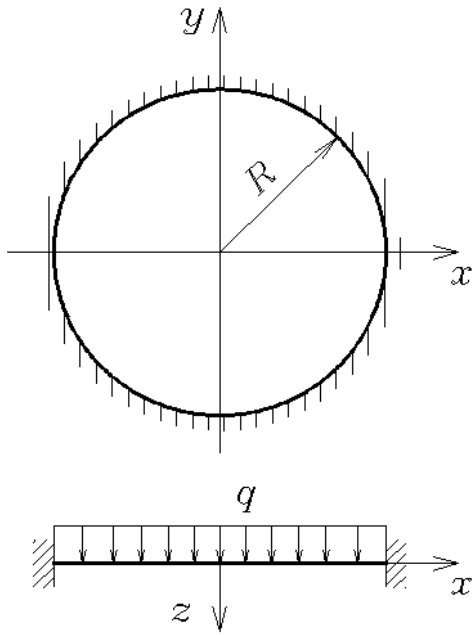


Fig. 3.78. Placă circulară încastrată, încărcată cu sarcină uniform distribuită pe toată suprafața

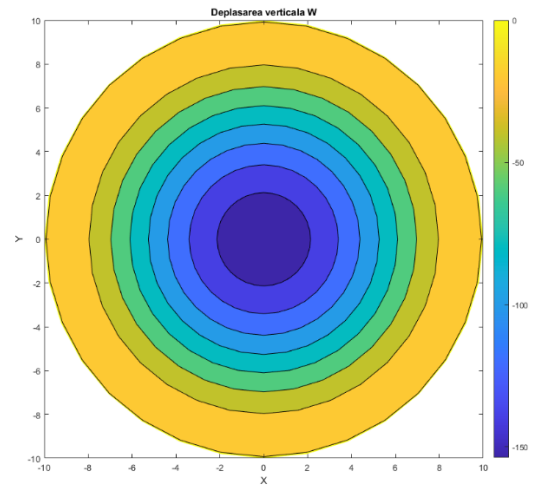


Fig. 3.79. Câmpul deplasărilor verticale w în placa circulară încastrată

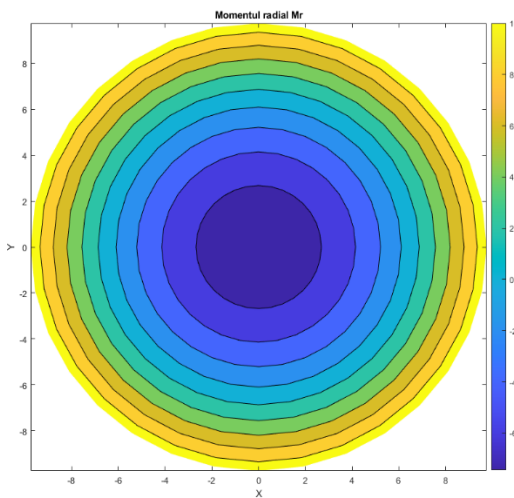


Fig. 3.80. Câmpul momentului radial M_r în placa circulară încastrată

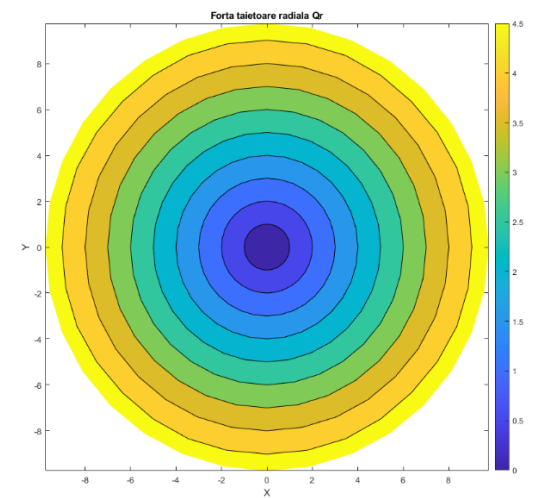


Fig. 3.81. Câmpul forței transversale radiale Q_r în placa circulară încastrată

Pentru calculul analitic s-au folosit soluțiile descrise în [123]. Expresia generală a săgeții în orice punct situat la distanța r față de centrul plăcii are forma:

$$w = \frac{q}{64D} (R^2 - r^2)^2 \quad (3.58)$$

Momentul pe direcție radială:

$$M_r = \frac{q}{16} [R^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)] \quad (3.59)$$

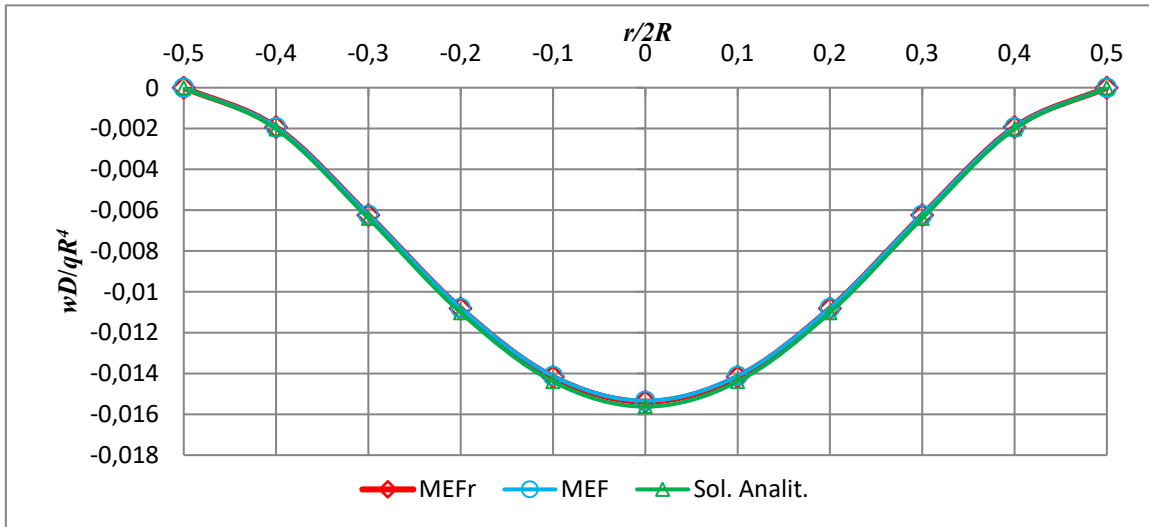


Fig. 3.82. Săgeata w pe o secțiune radială

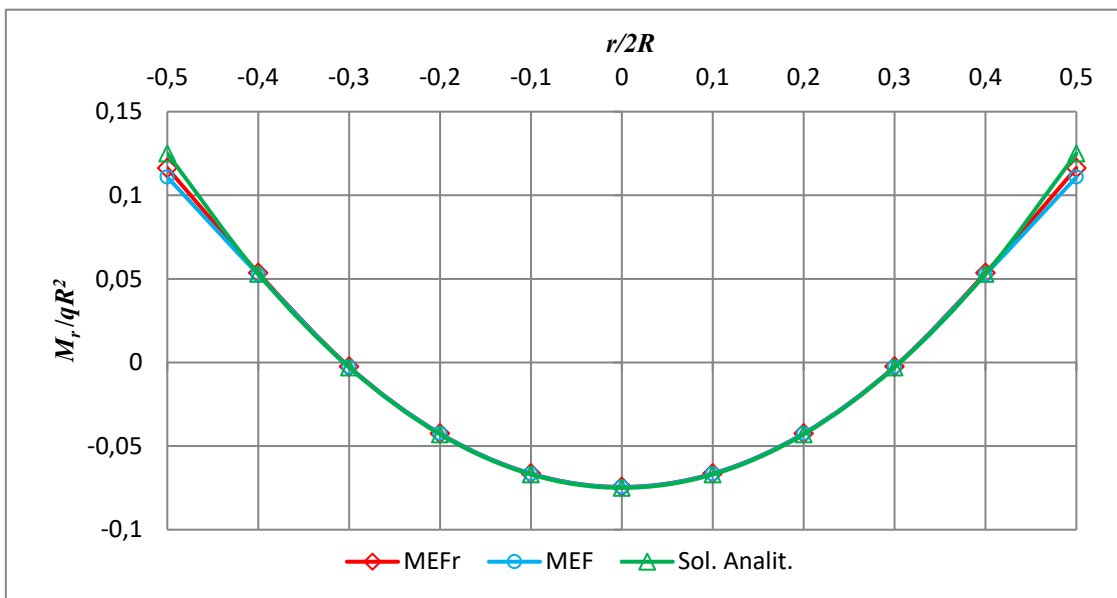


Fig. 3.83. Momentul radial M_r pe o secțiune radială

Tabelul 3.7. Rezultate pentru placa circulară încastrată

Metoda	Deplasarea $w _{r=0} \times qR^4 / D$	Efortul $M_r _{r=\pm R} \times qR^2$	Devieri față de metoda analitică	
			$\Delta w, \%$	$\Delta M_x, \%$
Analitic	-0,01563	-0,1250	-	-
MEF	0,01534	-0,1109	1,86	11,3
MEFr	0,01538	-0,1163	1,60	7,0

c) *Placă circulară încastrată pe o jumătate de contur, iar pe cealaltă – simplu rezemată, încărcată cu o forță concentrată în centru*

În exemplul ce urmează sunt prezentate rezultatele obținute cu ajutorul programului de calcul prezentat în Anexa 3., pentru o placă circulară încastrată pe o jumătate de contur, iar pe cealaltă jumătate este simplu rezemată. Placa este solicitată la centru de o forță concentrată F (Fig. 3.84.).

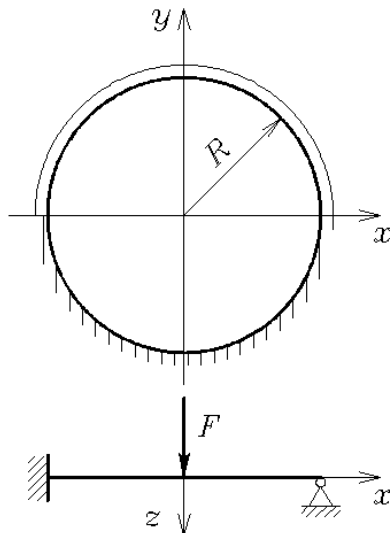


Fig. 3.84. Placă circulară simplu rezemată, încărcată cu o forță concentrată la centru

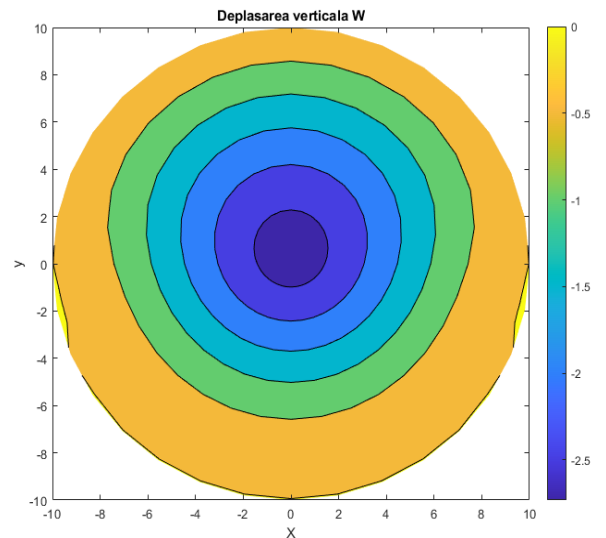


Fig. 3.85. Câmpul deplasărilor w în placa circulară având jumătate de contur încastrată, iar cealaltă simplu rezemată.

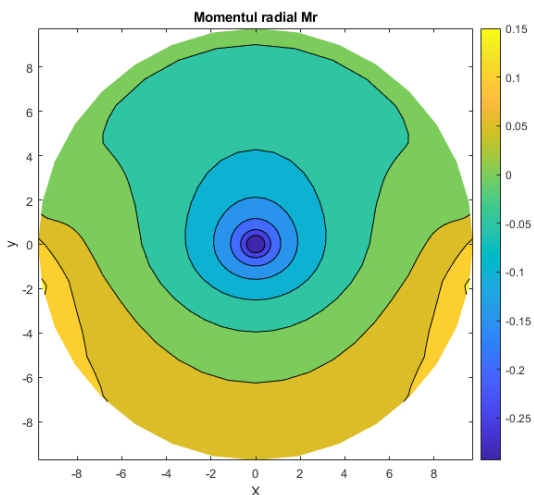


Fig. 3.86. Câmpul momentului radial M_r în placa circulară având jumătate de contur încastrată, iar cealaltă simplu rezemată.

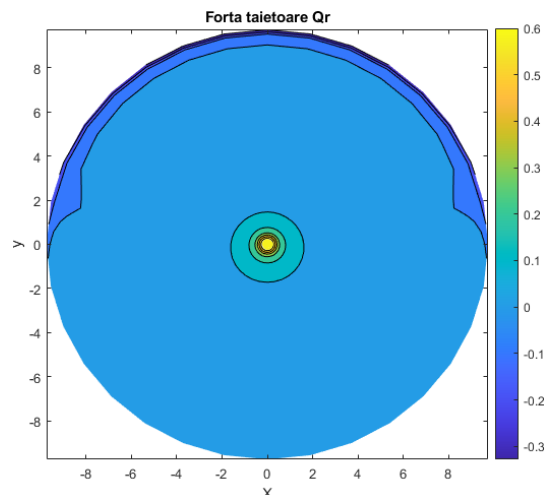


Fig. 3.87. Câmpul forței tăietoare Q_r în placa circulară având jumătate de contur încastrată, iar cealaltă simplu rezemată.

Rezultatele obținute prin MEFr au fost comparate cu cele obținute prin MEF pe o secțiune radială. Acestea sunt prezentate sub formă de diagrame (Fig. 3.88., 3.89.).

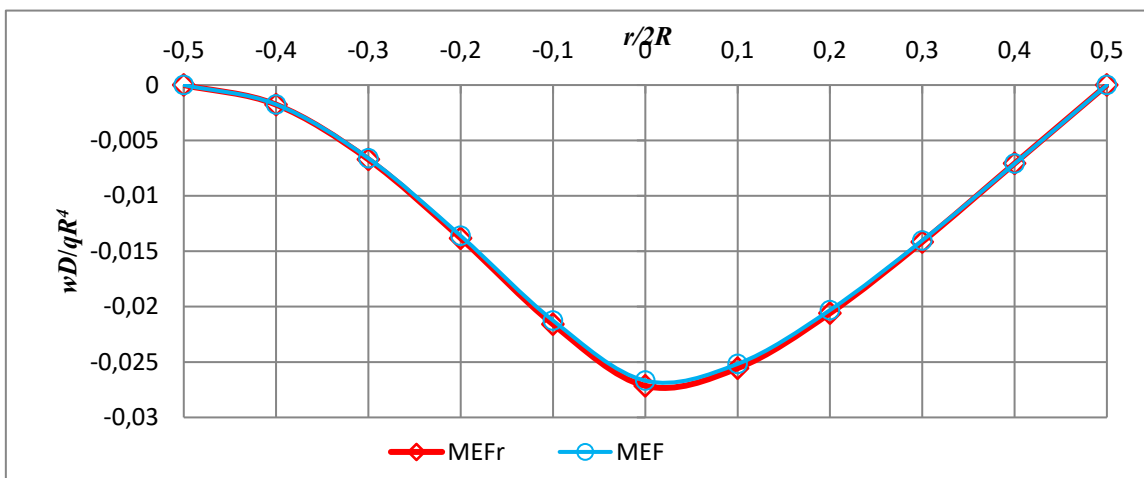


Fig. 3.88. Săgeata w pe secțiunea centrală $x = 0$

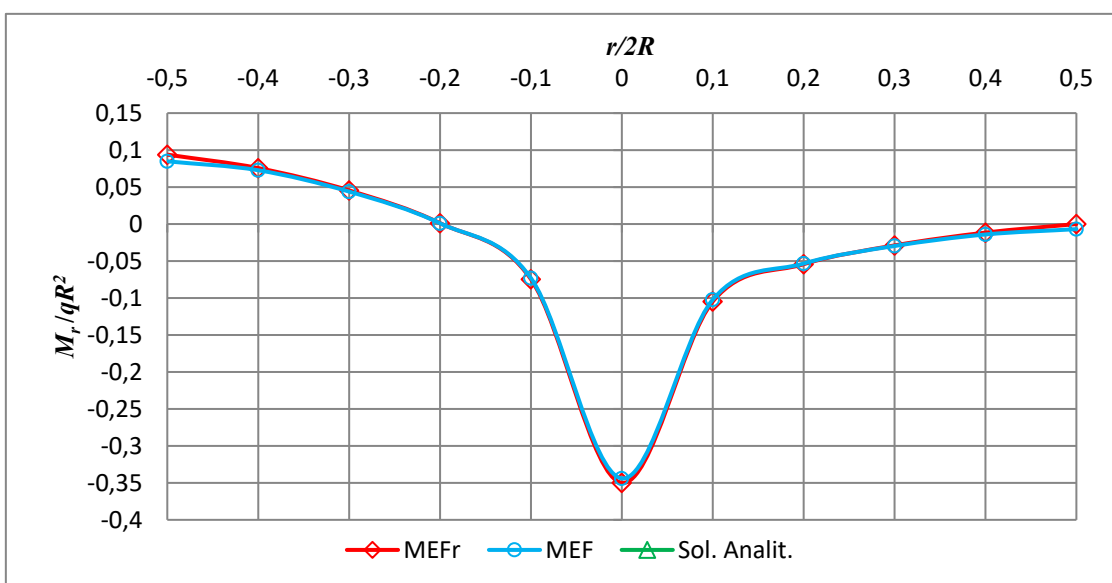


Fig. 3.89. Momentul radial M_r pe secțiunea centrală $x = 0$

Tabelul 3.8. Rezultate pentru placa circulară cu diferite moduri de rezemare

Metoda	Deplasarea $w _{r=0} \times FR^2 / D$	Efortul $M_r _{x=0, y=-R} \times F$	Devieri față de MEF	
			$\Delta w, \%$	$\Delta M_x, \%$
MEF	0,026678	-0.084801	-	-
MEFr	0,027145	-0.093834	1,75	10.65

d) Placă circulară, încastrată, încărcată cu o forță excentrică.

Pentru o placă încastrată pe contur, acționată de o forță concentrată într-un punct arbitrar A (Fig.3.90), soluția analitică unitară poate fi cercetată în [84, 85] folosind funcțiile de influență Green. Expresia acestei funcții are forma:

$$G_{cl}(z, \zeta) = \frac{1}{8\pi D} \left[\frac{1}{2a^2} (a^2 - |z|^2)(a^2 - |\zeta|^2) - |z - \zeta|^2 \ln \frac{|a^2 - z\bar{\zeta}|}{a|z - \zeta|} \right] \quad (3.60)$$

unde: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ reprezintă punctul în care se calculează săgeata;

$\zeta = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ reprezintă punctul de acțiune a forței concentrate.

Bara deasupra ζ exprimă valoarea conjugată, $\bar{\zeta} = \rho(\cos \psi - i \sin \psi)$.

Păstrând doar partea reală a funcției (3.60) soluția săgeții într-un punct arbitrar M al plăcii va căpăta forma:

$$w_{cl} = \frac{F}{8\pi D} \left[\frac{1}{2a^2} (a^2 - r^2)(a^2 - \rho^2) - R_1^2 \ln \frac{|a^2 - R_2|}{aR_1} \right] \quad (3.61)$$

unde: $R_1 = \operatorname{Re}|z - \zeta| = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho(\sin \theta \sin \psi + \cos \theta \cos \psi)}$;

$R_2 = \operatorname{Re}(z\bar{\zeta}) = r\rho(\sin \theta \sin \psi + \cos \theta \cos \psi)$.

Câmpul deplasărilor verticale obținut prin MEFr pe baza soluțiilor discontinue este prezentat în Fig. 3.91. Rezultatele obținute au fost comparate cu MEF și soluția analitică (3.61) exprimată prin funcția Green pentru o secțiune radială ce trece prin punctul de aplicare a forței concentrate (Fig. 3.92.). Pentru simplitatea calculului au fost introduși următorii parametri: rigiditatea cilindrică $D = 1 \text{ m}^4$; coeficientul lui Poisson $\nu = 0,2$; $a = 10 \text{ m}$; $\rho = 3 \text{ m}$; $F = 1 \text{ N}$; $\theta = \psi = \pi/4$.

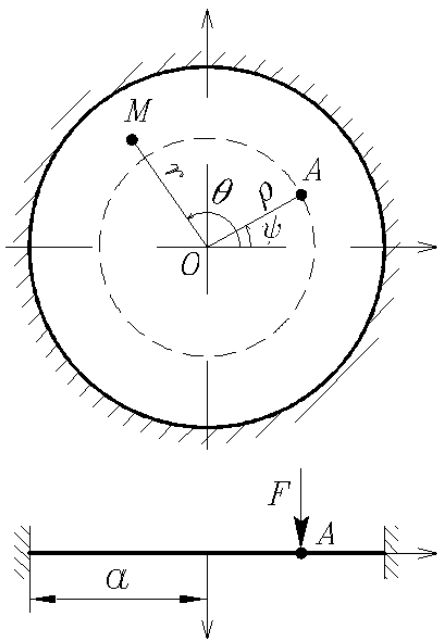


Fig. 3.90. Placă circulară încastrată, încărcată cu o forță excentrică

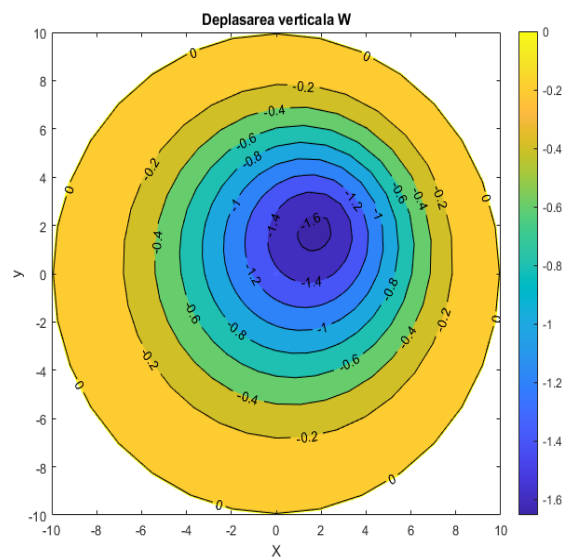


Fig. 3.91. Câmpul deplasărilor verticale w în placa circulară încastrată, încărcată cu o forță excentrică

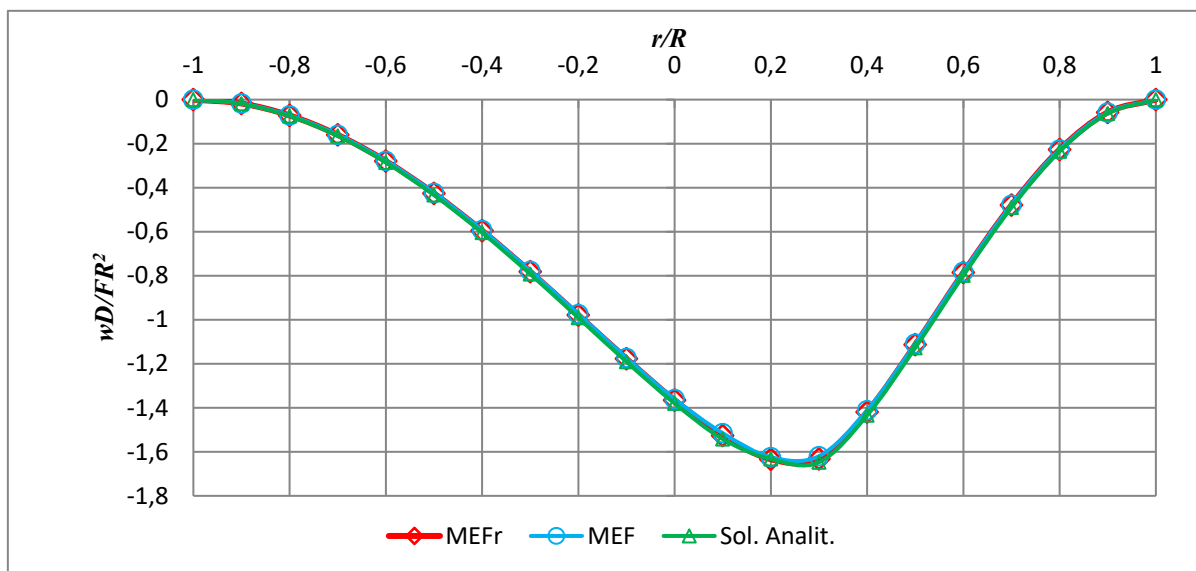


Fig. 3.92. Săgeata w pe secțiunea $\theta = \pi/4$

În Tabelul 3.9. sunt prezentate devierile față de soluțiile analitice.

Tabelul 3.9. Rezultate pentru placa încastată acționată de o forță excentrică

Metoda	Deplasarea $w _{r=b} \times FR^2 / D$ $\theta=0$	Devieri față de metoda analitică $\Delta w, \%$
Analic	0,016473	-
MEF	0,016198	1,67
MEFr	0,016322	0,92

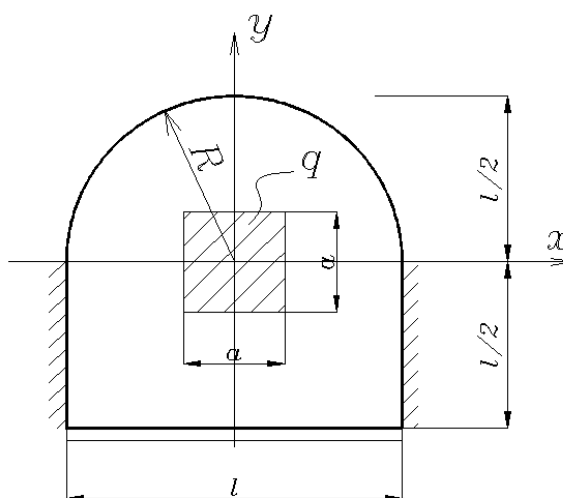
3.1.10. Exemple de calcul a plăcilor de contur arbitrar în teoria clasică folosind soluțiile discontinue

a) Placă de o formă combinată dintr-un dreptunghi și semicerc, având diferite condiții de rezemare pe contur

În acest exemplu se propune spre analiză o placă având conturul format dintr-un dreptunghi și un semicerc (Fig. 3.93, a), latura $y = -l/2$ fiind simplu rezemată, laturile $x = -l/2$ și $+l/2$ sunt încastate, iar conturul semicercului de raza R – liber. Placa este sollicitată de o sarcină uniform distribuită q pe o suprafață pătrată cu latura a .

Pentru calculul prin MEFr conturul plăcii a fost discretizat în 36 elemente (Fig. 3.93, b), iar pentru calculul prin MEF suprafața plăcii a fost discretizată în 96 elemente (Fig. 3.93, c).

Pentru simplitatea calculului au fost introduși următorii parametri: rigiditatea cilindrică $D = 1 \text{ m}^4$; coeficientul lui Poisson $\nu = 0$; $l = 10 \text{ m}$; raza $R = 5 \text{ m}$; $a = 2 \text{ m}$; $q = 1 \text{ N/m}^2$.



a)

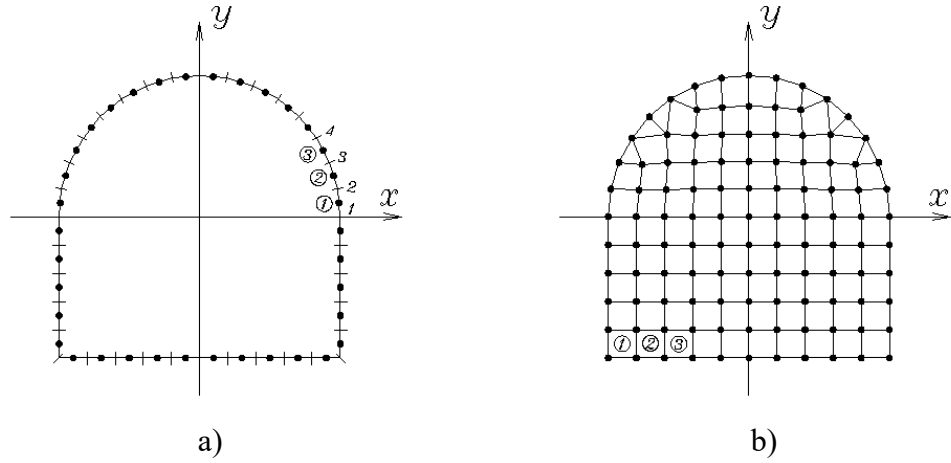


Fig. 3.93. Placă de formă combinată dintr-un dreptunghi și semicerc: a) schema de calcul; b) discretizare MEFr; c) discretizare MEF

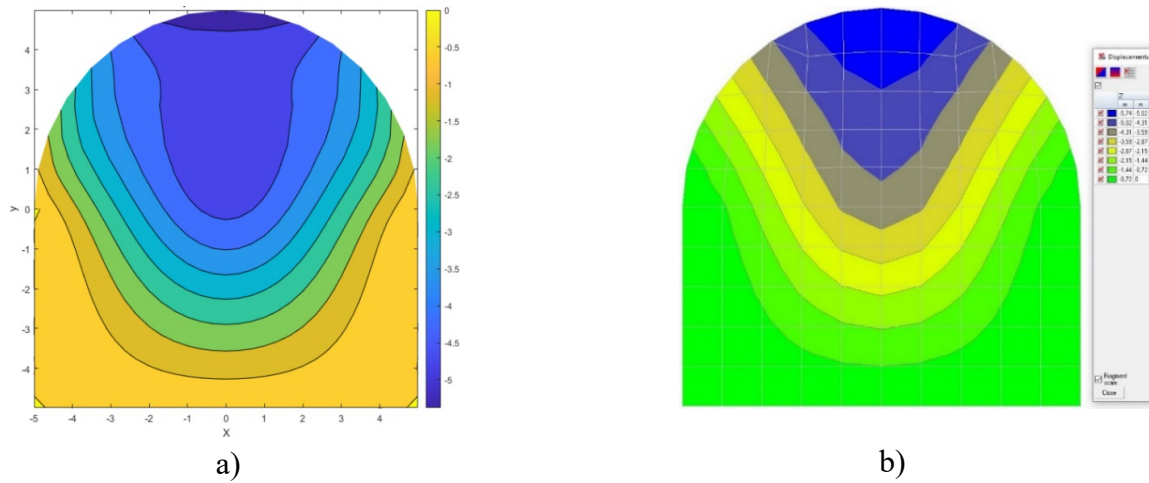


Fig. 3.94. Distribuția câmpului deplasării verticale w : a) MEFr; b) MEF

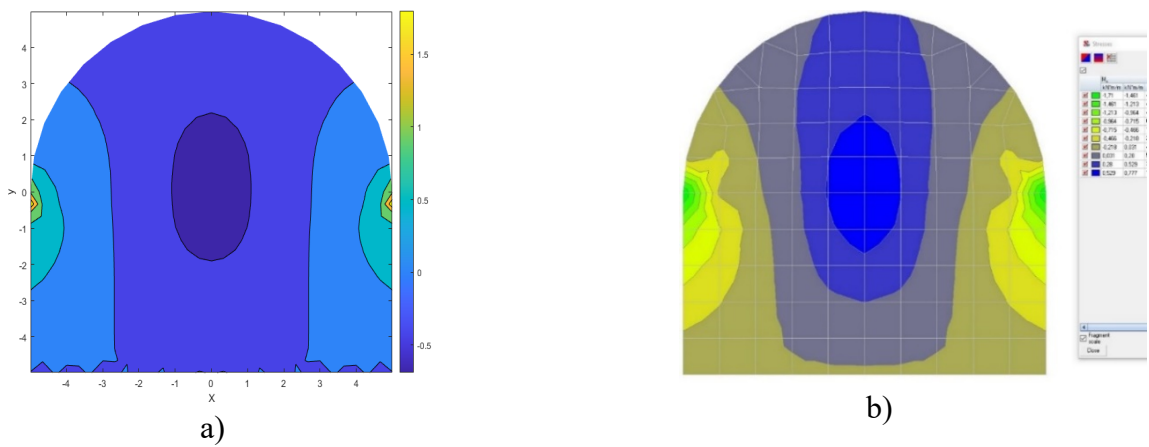


Fig. 3.95. Distribuția câmpului momentului M_x : a) MEFr; b) MEF

Rezultatele obținute cu ajutorul soluțiilor discontinue au fost comparate cu cele obținute prin MEF pe secțiunile centrale. Acestea sunt prezentate sub formă de diagrame (Fig. 3.96., 3.97.)

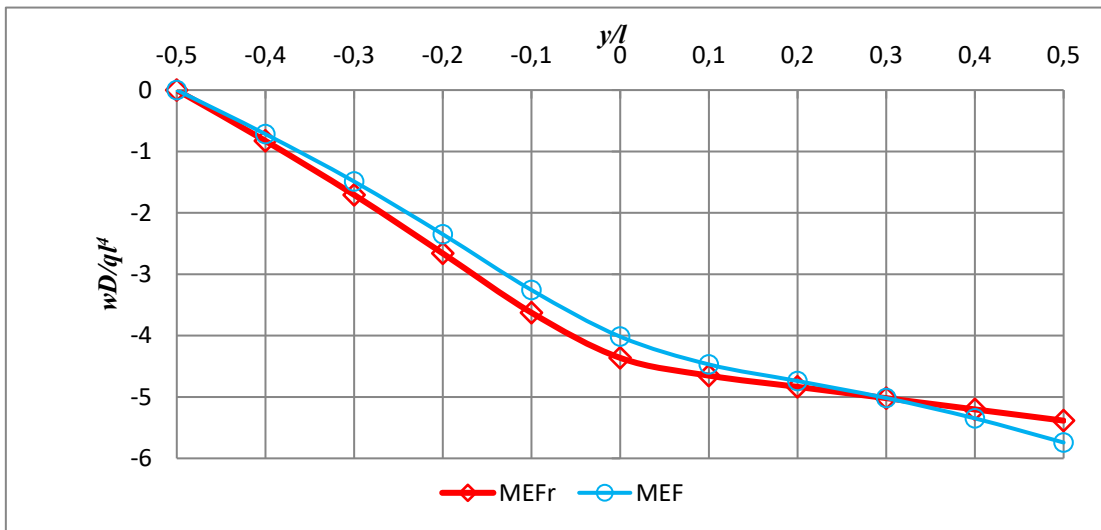


Fig. 3.96. Săgeata w pe secțiunea centrală $x = 0$

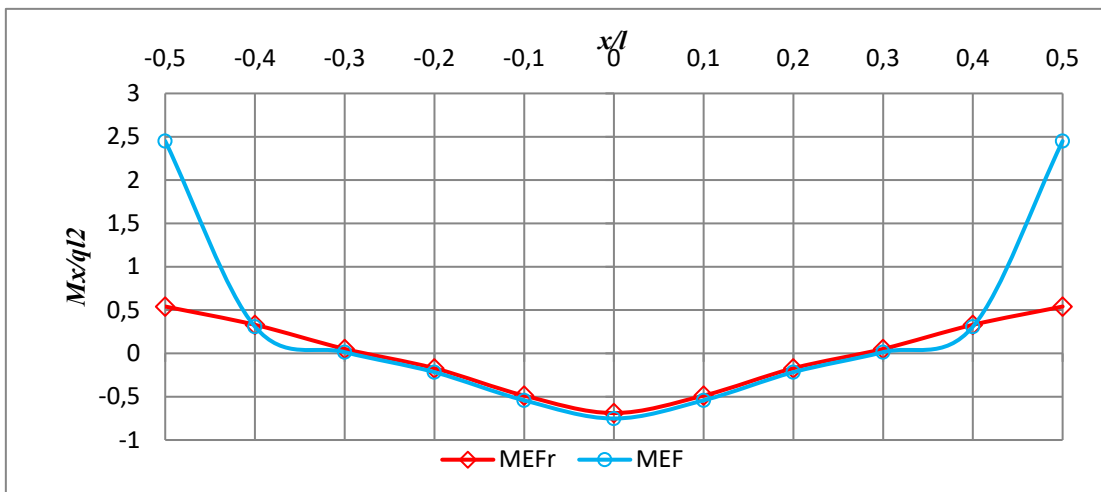


Fig. 3.97. Momentul M_x pe secțiunea centrală $y = 0$

Tabelul 3.10. Rezultate pentru placa cu contur neregulat

Metoda	Deplasarea $w _{x=0} \times ql^4 / D$ $y=5$	Efortul $M_x _{x=0} \times ql^2$ $y=0$	Devieri față de MEF	
			$\Delta w, \%$	$\Delta M_x, \%$
MEF	5.741	0.752	-	-
MEFr	5.386	0.689	6.18	8.38

Din diagrama de mai sus (Fig. 3.97.) pentru calculul cu MEF se observă un salt al efortului M_x la contur în punctele de trecere de la marginea încastată la cea liberă.

b) Placă de un contur arbitrar

Pentru plăci având un contur arbitrar complicat, este dificil de obținut soluția analitică sau chiar imposibil. Dacă problema se rezolvă prin MEF, atunci exactitatea rezultatelor depinde de densitatea rețelei de discretizare și de tipul elementelor utilizate [34], mai ales în apropierea zonelor cu: forțe concentrate, colțuri sau schimbări bruște a direcției conturului, puncte de trecere de la o condiție limită la alta etc. Pentru a ilustra mai bine această problemă a fost cercetată o placă de contur arbitrar (Fig. 3.98), având o parte a conturului încastrat, iar cealaltă – simplu rezemată.

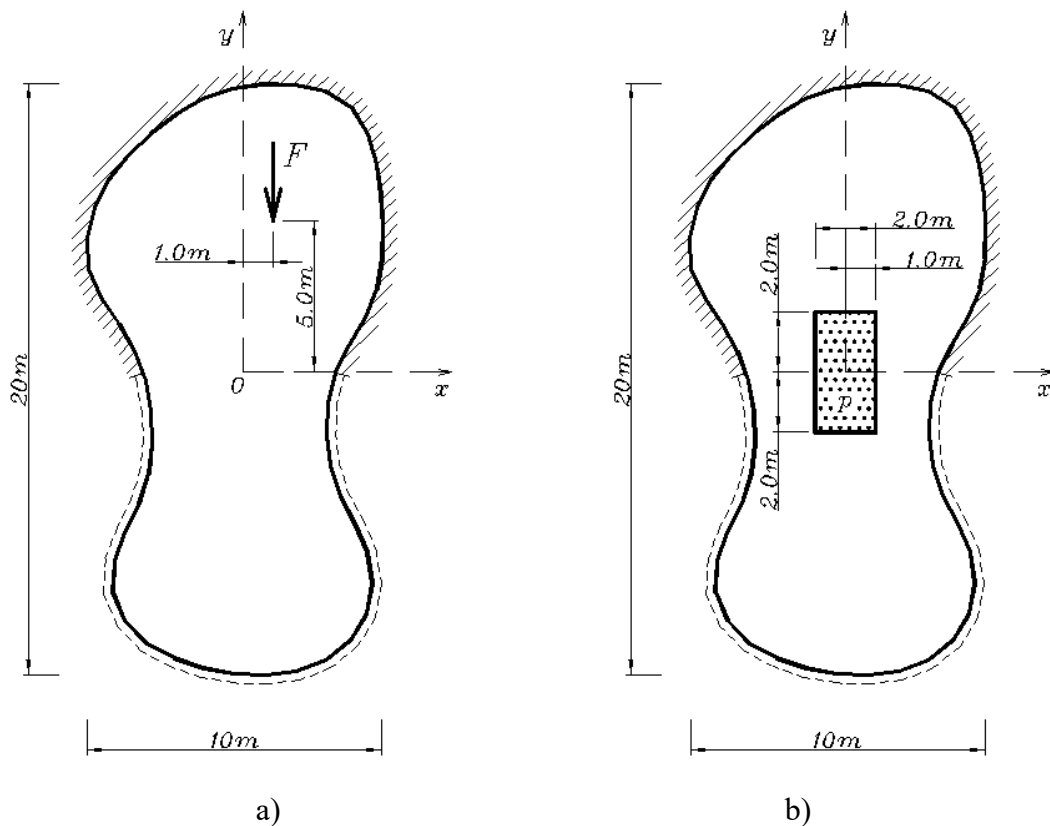


Fig. 3.98. Placă de contur arbitrar încărcată cu: a) forță concentrată; b) sarcină uniform distribuită.

Se propun două cazuri de încărcare: primul - cu forță concentrată $F = 1,0$ kN aplicată la distanța de 1,0 m și 5,0 m față de axa x și respectiv y (Fig. 3.98, a) și al doilea - cu sarcină uniform distribuită $p = 1,0$ kN/m² pe o regiune dreptunghiulară de dimensiunea 2,0 x 4,0 m (Fig. 3.98, b). Conturul plăcii, la calculul prin MEFr, a fost discretizat în 50 de elemente constante de frontieră (Fig. 3.99, a), iar pentru calculul prin MEF au fost utilizate 3 modele de discretizare (Fig. 3.99): i) 165 elemente și 182 noduri; ii) 321 elemente și 320 noduri; iii) 641 elemente și 663 noduri.

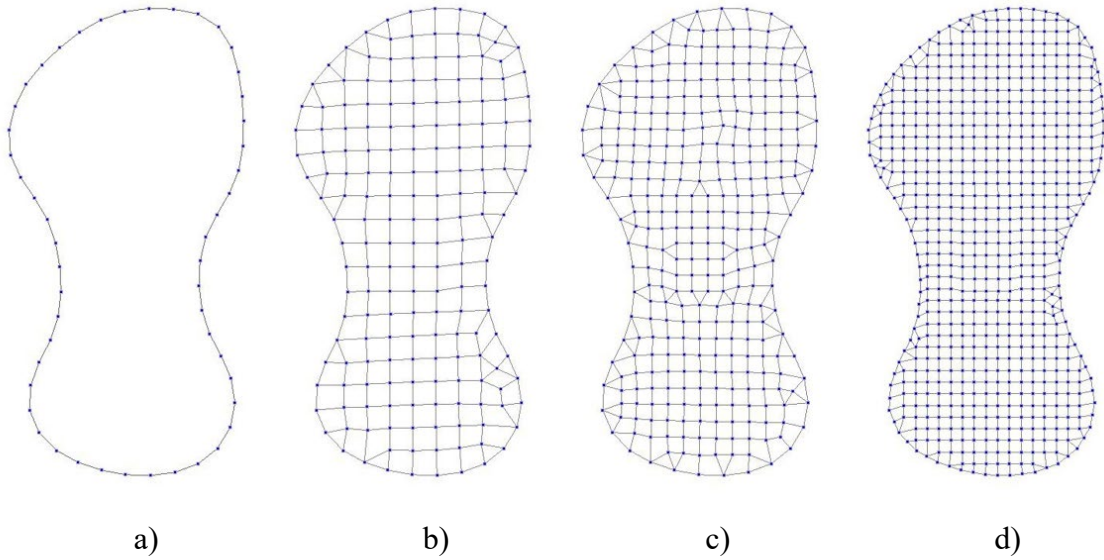
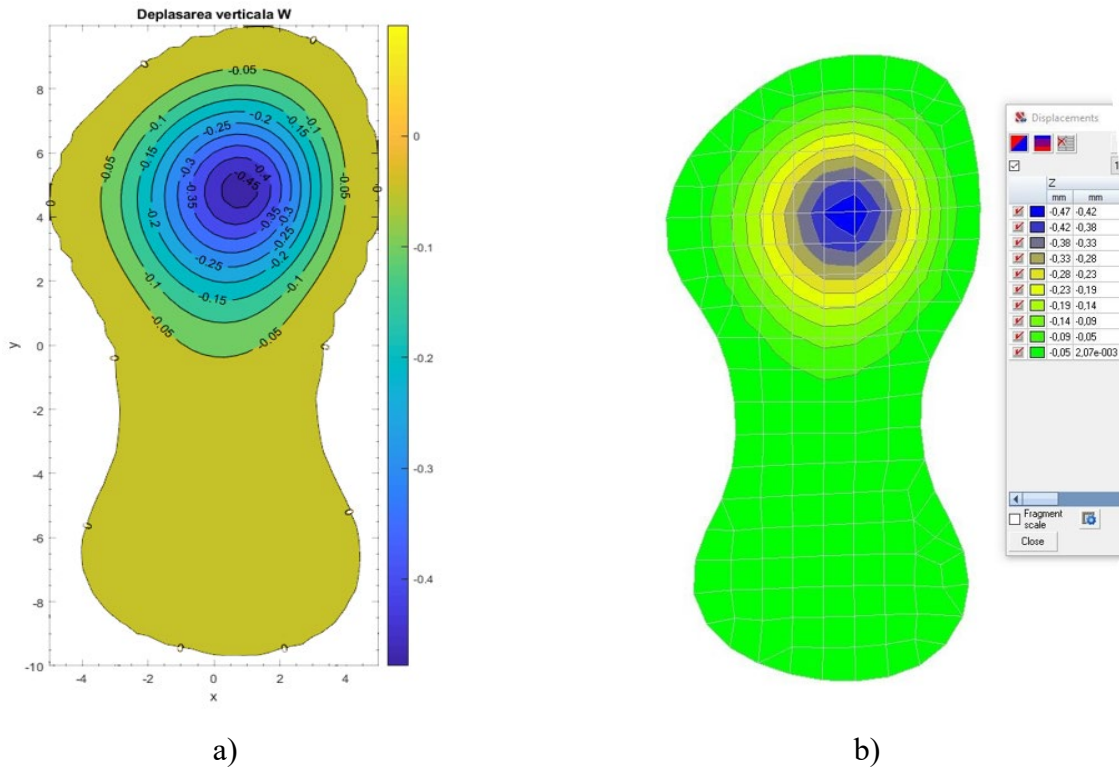


Fig. 3.99. Placă discretizată: a) MEFr – 50 elem.; b) MEF – 165 elem. (182 noduri); c) MEF – 321 elem. (320 noduri); d) MEF – 641 elem. (663 noduri)

Cazul I. Pentru modelele de mai sus au fost calculate deplasările de la acțiunea unei forțe concentrate, iar rezultatele obținute prin ambele metode sunt prezentate în Fig. 3.100.



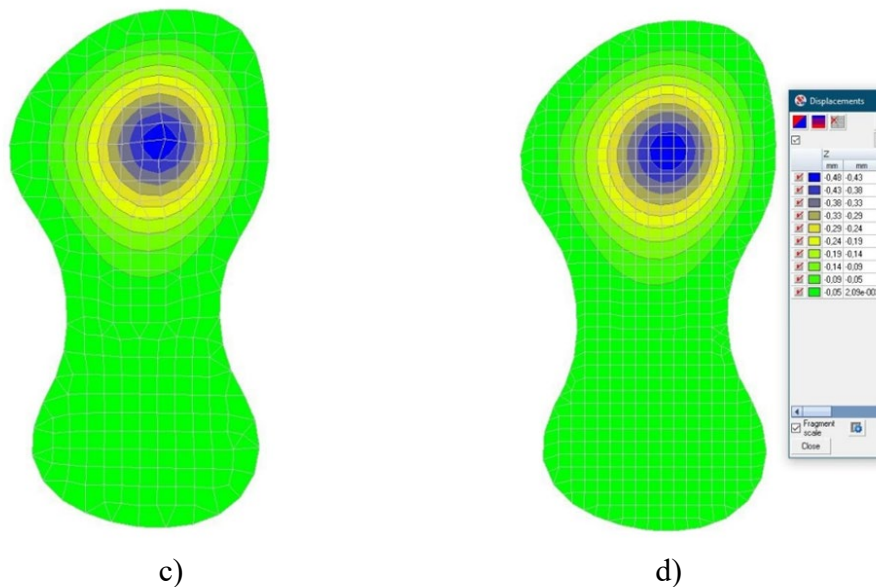
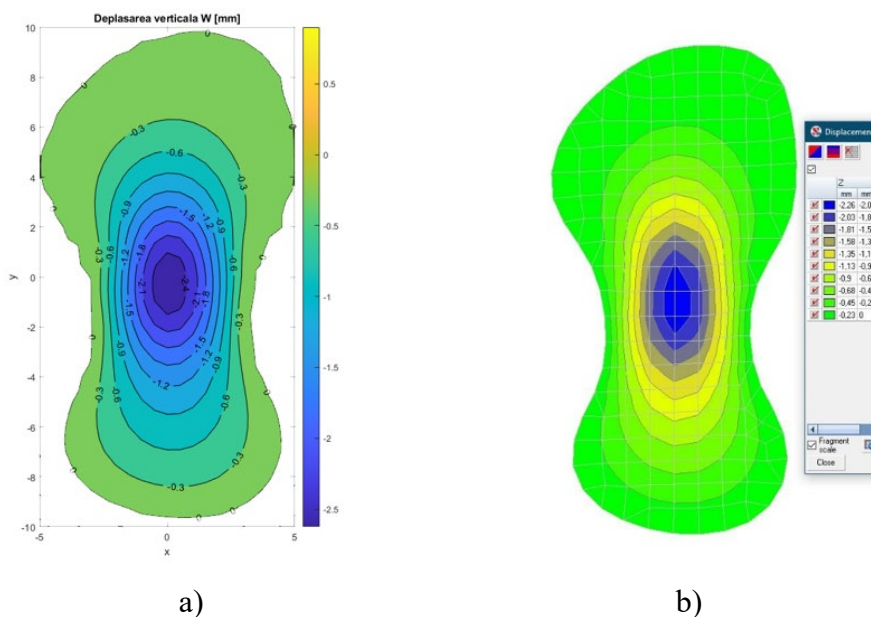


Fig. 3.100. Câmpurile deplasărilor verticale de la acțiunea unei sarcini concentrate: a) MEFr – 50 elem.; b) MEF – 165 elem.; c) MEF – 321 elem.; d) MEF – 641 elem.

Tabelul 3.11. Valorile săgeții W pentru o placă de contur arbitrar de la o forță concentrată

Metoda numerică	Nr. de elemente	Dimensiunea matricei globale	Săgeata maximă W_{max} [mm]	Devieri față de MEFr [%]
MEFr	50	100	0.4783	-
MEF (i)	165	840	0.4702	1.69
MEF (ii)	321	1668	0.4738	0.94
MEF (iii)	641	3476	0.4767	0.33

Cazul II. Câmpul deplasărilor pentru placa de contur arbitrar solicitată de sarcina uniform distribuită, obținut prin ambele metode este prezentat în Fig. 3.101.



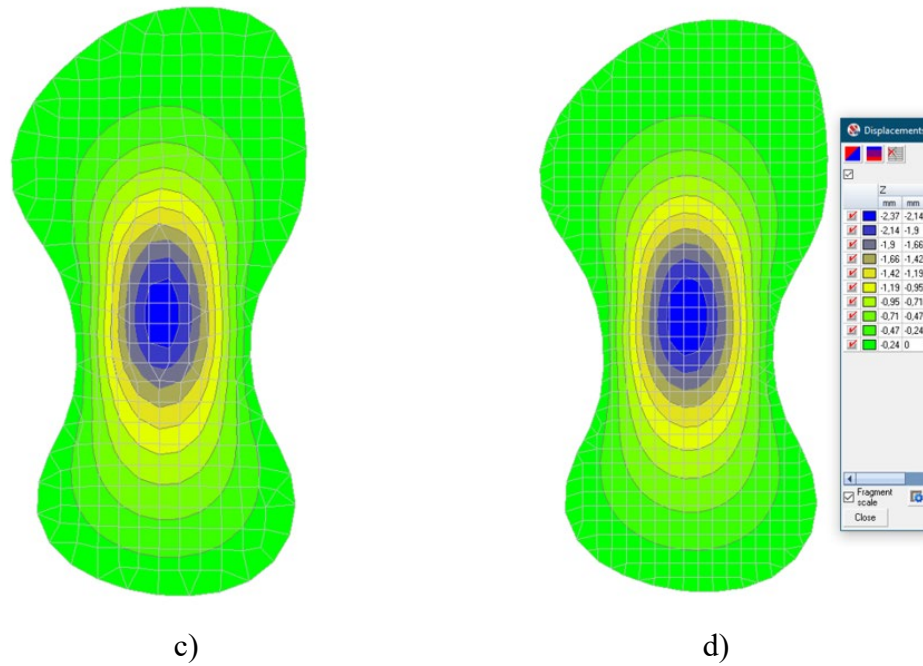


Fig. 3.101. Câmpurile deplasărilor verticale de la acțiunea unei sarcini uniform distribuite: a) MEFr – 50 elem.; b) MEF – 165 elem.; c) MEF – 321 elem.; d) MEF – 641 elem.

Tabelul 3.12. Valorile deplasărilor verticale W pentru o placa de contur arbitrar de la o sarcină uniform distribuită

Metoda numerică	Nr. de elemente	Dimensiunea matricei globale	Săgeata maximă W_{max} [mm]	Devieri față de MEFr [%]
MEFr	50	100	2.520	-
MEF (i)	165	840	2.258	10.0
MEF (ii)	321	1668	2.300	8.70
MEF (iii)	641	3476	2.375	5.75

Pentru câmpurile deplasărilor de mai sus, se observă că pentru rețele cu un număr relativ mic de elemente, în MEF, curbele deplasărilor, în special în zonele acțiunii sarcinilor, prezintă niște forme poligonale, iar odată cu mărirea densității rețelelor de discretizare, acestea devin mai regularizate și capătă forme mai curbiliare, iar rezultatele se apropie de cele obținute prin MEFr. După cum se observă în Tabelul 3.12., pentru cazul II de solicitare, pentru a obține rezultate satisfăcătoare, modelele MEF necesită de a rezolva un sistem de ecuații liniare zeci de ori mai mare decât modelele MEFr [34].

3.2. Soluții discontinue în teoria plăcilor ținând cont de deformațiile transversale de forfecare.

Ecuția diferențială de ordinul patru a teoriei clasice permite de a satisface doar două condiții de contur de-a lungul fiecărei margini în loc de trei. Imposibilitatea satisfacerii a mai mult de două condiții este cauzată de neglijarea deformațiilor transversale. Acest lucru este echivalent cu admiterea unui modul transversal $G = \infty$, ce conduce la substituția materialului real al plăcii considerat izotrop, într-un material anizotrop.

Aceste neajunsuri pot fi eliminate utilizând teoria propusă de către Reissner [104-106], care ia în considerație efectul deformațiilor din forța de forfecare. Soluțiile discontinue pentru teoria lui Reissner au fost construite de către prof. Gh. Moraru în lucrările [89, 150, 151]. De asemenea această problemă pentru MEFr este cercetată și în alte lucrări [37, 50, 103, 132].

3.2.1. Soluții provenite din salturi concentrate.

Pentru o placă infinită având pe axa y ($x = 0$) un defect (Fig. 3.1.), traversând de la o parte a defectului la cealaltă, funcțiile pot avea salturi: săgeata w , unghiul de rotire θ_x și θ_y , momentul de încovoiere M_x , momentul de torsiune M_{xy} și forța transversală Q_x (Fig. 3.2.).

Pentru toate salturile sus-menționate vom introduce următoarea notație

$$\begin{aligned}w(-0, y) - w(+0, y) &= \langle w(y) \rangle; \\ \theta_x(-0, y) - \theta_x(+0, y) &= \langle \theta_x(y) \rangle; \\ \theta_y(-0, y) - \theta_y(+0, y) &= \langle \theta_y(y) \rangle; \\ M_x(-0, y) - M_x(+0, y) &= \langle M_x(y) \rangle; \\ M_{xy}(-0, y) - M_{xy}(+0, y) &= \langle M_{xy}(y) \rangle; \\ Q_x(-0, y) - Q_x(+0, y) &= \langle Q_x(y) \rangle.\end{aligned}\tag{3.62}$$

Pentru a construi soluțiile de la salturile concentrate se va examina o placă infinită în absența sarcinilor exterioare ($q(x, y) \equiv 0$).

Aplicând la ecuațiile (1.12) și (1.17) transformarea Fourier [17, 43, 117, 124, 157, 158] (Anexa 1.) după variabila x cu parametrul α . Divizând în două intervalul de integrare: $(-\infty, -0)$, $(+0, +\infty)$ și păstrând salturile tuturor funcțiilor în $x = 0$, se obține:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial y^4} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \alpha^4 \tilde{w} = -i\alpha^3 \langle w \rangle + \alpha^2 \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle + i\alpha \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right\rangle + 2i\alpha \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\rangle - 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle. \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} - (\alpha^2 + \lambda^2) \tilde{\psi} = i\alpha \langle \psi \rangle - \left\langle \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right\rangle, \quad (3.64)$$

unde: $\lambda^2 = \frac{10}{h^2}$; $\tilde{w} \equiv \tilde{w}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{i\alpha x} dx$; $\tilde{\psi} \equiv \tilde{\psi}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) e^{i\alpha x} dx$.

Se consideră că săgeata w are un salt de forma:

$$\langle w(y) \rangle = \delta(y), \quad (3.65)$$

iar celelalte funcții rămase se consideră continue când $x = 0$:

$$\langle \theta_x(y) \rangle = 0; \langle \theta_y(y) \rangle = 0; \langle M_x(y) \rangle = 0; \langle M_{xy}(y) \rangle = 0; \langle Q_x(y) \rangle = 0. \quad (3.66)$$

Din relațiile pentru unghiurile de rotire (1.53) rezultă:

$$\begin{aligned} \langle \theta_1(y) \rangle &= -\left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle + \frac{6}{5Gh} \langle Q_x(y) \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle = 0; \\ \langle \theta_2(y) \rangle &= -\frac{\partial}{\partial y} \langle w \rangle + \frac{6}{5Gh} \langle Q_y(y) \rangle = 0 \Rightarrow \langle Q_y(y) \rangle = \frac{5Gh}{6} \delta'(y). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Din ecuația de echilibru $\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q$,

în absența sarcinii ($q \equiv 0$) trecând la salturi și utilizând (3.67) se obține:

$$\left\langle \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle Q_y \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right\rangle = \frac{5Gh}{6} \delta'(y). \quad (3.68)$$

Din expresia pentru momentul încovoietor M_x (1.54), trecând la salturi:

$$\langle M_x(y) \rangle = -D \left(\left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\rangle + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle w \rangle \right) + \frac{2}{\lambda^2} \left\langle \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right\rangle = 0,$$

utilizând (3.65) și (3.68) se obține: $\left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\rangle = -\delta''(y)$.

Din condiția $\langle M_{xy}(y) \rangle = -(1-\nu)D \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \langle Q_x \rangle + \left\langle \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right\rangle \right] = 0,$

folosind condițiile (3.66) și (3.67) rezultă: $\left\langle \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right\rangle = 0.$

Dacă expresia pentru forța transversală Q_x (1.57) va fi prezentată în salturi:

$$\langle Q_x(y) \rangle = -D \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} \langle w \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\rangle \right) - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\rangle = \frac{5Gh}{6} \delta'(y),$$

și va fi folosită relația (3.67) în absența sarcinii ($q \equiv 0$) se obține:

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\rangle = -\frac{1}{2}(1-\nu)D\lambda^2 \delta'(y).$$

Prin diferențierea expresiilor (1.57) și luând în considerație (1.61) se obține:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial y} - \frac{\partial Q_y}{\partial x} = \Delta \psi = \lambda^2 \psi,$$

trecând la salturi: $\frac{\partial}{\partial y} \langle Q_x \rangle - \left\langle \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right\rangle = \lambda^2 \langle \psi \rangle \Rightarrow \langle \psi \rangle = 0$

Se vor înlocui condițiile obținute mai sus în sistemul de ecuații (3.63) și (3.64) se obține:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial y^4} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \alpha^4 \tilde{w} = -i\alpha^3 \delta(y) + i\alpha \delta''(y). \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} - (\alpha^2 + \lambda^2) \tilde{\psi} = \frac{1}{2}(1-\nu)D\lambda^2 \delta'(y). \quad (3.70)$$

Dacă se va aplica transformarea Fourier (Anexa 1.) după variabila y cu parametrul β se obține:

$$\tilde{w}(\alpha, \beta) = \frac{-i\alpha^3 - i\alpha \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}; \quad (3.71)$$

$$\tilde{\psi}(\alpha, \beta) = \frac{i}{2}(1-\nu)D\lambda^2 \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2}, \quad (3.72)$$

unde $\tilde{w}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\alpha, y) e^{i\beta y} dy$; $\tilde{\psi}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(\alpha, y) e^{i\beta y} dy$.

Se va utiliza formula de inversare Fourier (A1.2) de două ori (pe α și pe β), astfel se obține:

$$w(x, y) = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^3 + \alpha \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)} e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta = -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{r^2}; \quad (3.73)$$

$$\psi(x, y) = -\frac{i(1-\nu)D\lambda^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2} e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta = -\frac{(1-\nu)}{4\pi} D\lambda^2 \frac{\partial}{\partial y} K_0(\lambda r), \quad (3.74)$$

unde $K_0(\lambda r)$ reprezintă funcția Bessel de ordinul doi [128, 143].

Integralele din expresia (3.73). au fost evaluate cu ajutorul tabelor [1, 28, 101, 144], iar cele din (3.74) utilizând următoarele proprietăți:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x - i\beta y}}{\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2} d\alpha d\beta = 2\pi K_0(\lambda r) \quad (3.75)$$

și

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^n f(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = i^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (3.76)$$

Aplicând formulele (1.53), (1.54) și (1.57), pot fi obținute expresiile pentru unghiurile de rotire și eforturi, exprimate prin salturile săgeții w .

Soluțiile provenite din salturile unghiurilor de rotire θ_x, θ_y , din momentul de încovoiere M_x , din momentul de torsiune M_{xy} și din forța transversală Q_x pot fi obținute prin analogie.

Relațiile dintre deplasări și salturi pot fi scrise în formă matricială:

$$\begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{g}_{11} & \mathfrak{g}_{12} & \mathfrak{g}_{13} & \mathfrak{g}_{14} & \mathfrak{g}_{15} & \mathfrak{g}_{16} \\ \mathfrak{g}_{21} & \mathfrak{g}_{22} & \mathfrak{g}_{23} & \mathfrak{g}_{24} & \mathfrak{g}_{25} & \mathfrak{g}_{26} \\ \mathfrak{g}_{31} & \mathfrak{g}_{32} & \mathfrak{g}_{33} & \mathfrak{g}_{34} & \mathfrak{g}_{35} & \mathfrak{g}_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(y) \rangle \\ \langle \theta_x(y) \rangle \\ \langle \theta_y(y) \rangle \\ \langle M_x(y) \rangle \\ \langle M_{xy}(y) \rangle \\ \langle Q_x(y) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (3.77)$$

sau în formă compactă:

$$\{W\} = [G]\{S\},$$

unde $\{S\} = [\langle w(y) \rangle \langle \theta_x(y) \rangle \langle \theta_y(y) \rangle \langle M_x(y) \rangle \langle M_{xy}(y) \rangle \langle Q_x(y) \rangle]^T$ reprezintă vectorul salturilor.

Elementele $g_{ij} \equiv g_{ij}(x, y)$ au forma:

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{r^2}; & g_{21} &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{y^2 - x^2}{r^4} \right) - \frac{\partial^2 K_0(\lambda r)}{\partial y^2} \right]; & g_{31} &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{xy}{r^4} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K_0(\lambda r)}{\partial x \partial y} \right); \\ g_{12} &= -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \frac{x^2}{r^2} \right]; \\ g_{22} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{x}{r^4} \left[(1+\nu)x^2 + (3-\nu)y^2 \right] - \frac{1}{\pi \lambda^2} \left[\frac{2(x^3 - 3xy^2)}{r^6} - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} K_0(\lambda r) \right]; \\ g_{32} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{y}{r^4} \left[(3\nu - 1)x^2 + (1+\nu)y^2 \right] - \frac{1}{\pi \lambda^2} \left[\frac{2(3x^2y - y^3)}{r^6} + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} K_0(\lambda r) \right]; \\ g_{13} &= \frac{(1-\nu)}{4\pi} \frac{xy}{r^2}; & g_{23} &= \frac{(1-\nu)}{4\pi} \frac{y}{r^4} (x^2 - y^2) + \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{2y(y^2 - 3x^2)}{r^6} + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) K_0(\lambda r) \right]; \\ g_{33} &= \frac{(1-\nu)}{4\pi} \frac{x}{r^4} (y^2 - x^2) + \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{r^6} + \left(\frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right) K_0(\lambda r) \right]; \\ g_{14} &= \frac{1}{4\pi D} x \ln r; & g_{24} &= -\frac{1}{4\pi D} \left(\ln r + \frac{x^2}{r^2} \right) + \frac{1}{\pi D (1-\nu) \lambda^2} \left[\frac{x^2 - y^2}{r^4} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\lambda r) \right]; \\ g_{34} &= -\frac{1}{4\pi D} \frac{xy}{r^2} + \frac{1}{\pi D (1-\nu) \lambda^2} \left[\frac{2xy}{r^4} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\lambda r) \right]; \\ g_{15} &= \frac{1}{4\pi D} y \ln r; & g_{25} &= -\frac{xy}{4\pi D r^2} + \frac{1}{\pi D (1-\nu) \lambda^2} \left[\frac{2xy}{r^4} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\lambda r) \right]; \\ g_{35} &= -\frac{1}{4\pi D} \left(\ln r + \frac{y^2}{r^2} \right) + \frac{1}{\pi D (1-\nu) \lambda^2} \left[\frac{y^2 - x^2}{r^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_0(\lambda r) \right]; \\ g_{16} &= \frac{1}{8\pi D \lambda^2 (1-\nu)} \left[(1-\nu) \lambda^2 r^2 - 8 \ln r \right]; \\ g_{26} &= -\frac{x}{8\pi D} (2 \ln r + 1); & g_{36} &= -\frac{y}{8\pi D} (2 \ln r + 1). \end{aligned}$$

(3.78)

Relațiile dintre eforturi și salturi pot fi scrise în formă matricială:

$$\begin{Bmatrix} M_x(x, y) \\ M_y(x, y) \\ M_{xy}(x, y) \\ Q_x(x, y) \\ Q_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} & t_{36} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & t_{55} & t_{56} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(y) \rangle \\ \langle \theta_x(y) \rangle \\ \langle \theta_y(y) \rangle \\ \langle M_x(y) \rangle \\ \langle M_{xy}(y) \rangle \\ \langle Q_x(y) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (3.79)$$

unde: $\{N\} = [M_x \ M_y \ M_{xy} \ Q_x \ Q_y]^T$ reprezintă vectorul eforturilor

În formă compactă relația (3.76) are forma:

$$\{N\} = [T]\{S\}.$$

Elementele $t_{ij} \equiv t_{ij}(x, y)$ ($i = \overline{1, 5}$; $j = \overline{1, 4}$;) matricei T au forma:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{D(1-\nu)}{\pi} \left[\frac{x^3 - 3xy^2}{r^6} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} K_0(\lambda r) \right]; & t_{21} &= \frac{D(1-\nu)}{\pi} \left[\frac{3xy^2 - x^3}{r^6} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} K_0(\lambda r) \right]; \\ t_{31} &= \frac{D(1-\nu)}{\pi} \left[\frac{3x^2y - y^3}{r^6} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) K_0(\lambda r) \right]; \\ t_{41} &= -\frac{1}{4\pi} D\lambda^2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\lambda r); & t_{51} &= \frac{1}{4\pi} D\lambda^2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\lambda r); \\ t_{12} &= \frac{(1-\nu)D}{4\pi} \frac{1}{r^6} \left[(1+3\nu)x^4 + 6(1-\nu)x^2y^2 - (3+\nu)y^4 \right] - \frac{D(\nu-1)}{\pi\lambda^2} \left[\frac{6(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)}{r^8} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} K_0(\lambda r) \right]; \\ t_{22} &= \frac{(1-\nu)^2 D}{4\pi} \frac{1}{r^6} \left[x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \right] + \frac{D(\nu-1)}{\pi\lambda^2} \left[\frac{6(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)}{r^8} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} K_0(\lambda r) \right]; \\ t_{32} &= \frac{(\nu-1)D}{2\pi} \frac{xy}{r^6} \left[(1-3\nu)x^2 - (3-\nu)y^2 \right] + \frac{D(\nu-1)}{\pi\lambda^2} \left[-\frac{24xy(x^2 - y^2)}{r^8} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} \right) K_0(\lambda r) \right]; \\ t_{42} &= -\frac{(1-\nu)D}{\pi} \left[\frac{x(x^2 - 3y^2)}{r^6} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} K_0(\lambda r) \right]; & t_{52} &= -\frac{(1-\nu)D}{\pi} \left[\frac{y(x^2 - 3y^2)}{r^6} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} K_0(\lambda r) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{13} &= \frac{(1-\nu)D}{2\pi r^6} [x^3 y(3\nu-1) + xy^3(3-\nu)] + \frac{D(1-\nu)}{\pi\lambda^2} \left[\frac{24(x^3 y - xy^3)}{r^8} + \left(\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) K_0(\lambda r) \right]; \\
t_{23} &= -\frac{(1-\nu)D}{2\pi r^6} [x^3 y(\nu-3) + xy^3(1-3\nu)] + \frac{D(1-\nu)}{\pi\lambda^2} \left[\frac{24(y^3 x - x^3 y)}{r^8} - \left(\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) K_0(\lambda r) \right]; \\
t_{33} &= \frac{(\nu-1)^2 D}{4\pi r^6} (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) + \frac{D(1-\nu)}{\pi\lambda^2} \left[-\frac{6(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)}{r^8} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) K_0(\lambda r) \right]; \\
t_{43} &= \frac{(1-\nu)D}{\pi} \left\{ \frac{y^3 - 3x^2 y}{r^6} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) K_0(\lambda r) \right] \right\}; \\
t_{53} &= \frac{(1-\nu)D}{\pi} \left\{ \frac{x^3 - 3xy^2}{r^6} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) K_0(\lambda r) \right] \right\}; \\
t_{14} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{x}{r^4} [(1+\nu)x^2 + (3-\nu)y^2] + \frac{1}{\pi\lambda^2} \left[\frac{2x(3y^2 - x^2)}{r^6} + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} K_0(\lambda r) \right]; \\
t_{24} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{x}{r^4} [(1+\nu)x^2 + (3\nu-1)y^2] + \frac{1}{\pi\lambda^2} \left[\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{r^6} + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} K_0(\lambda r) \right]; \\
t_{34} &= \frac{(1-\nu)}{4\pi} \frac{y}{r^4} (x^2 - y^2) + \frac{1}{\pi\lambda^2} \left[\frac{2y(y^2 - 3x^2)}{r^6} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \right) K_0(\lambda r) \right]; \\
t_{44} &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(x^2 - y^2)}{r^4} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\lambda r) \right]; \quad t_{54} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{xy}{r^4} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\lambda r) \right]; \\
t_{15} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{y}{r^4} [(3\nu-1)x^2 + (1+\nu)y^2] + \frac{1}{\pi\lambda^2} \left[\frac{2y(y^2 - 3x^2)}{r^6} - \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} K_0(\lambda r) \right]; \\
t_{25} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{y}{r^4} [(3-\nu)x^2 + (1+\nu)y^2] + \frac{1}{\pi\lambda^2} \left[\frac{2y(3x^2 - y^2)}{r^6} + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} K_0(\lambda r) \right]; \\
t_{35} &= \frac{(\nu-1)}{4\pi} \frac{x}{r^4} (x^2 - y^2) + \frac{1}{\pi\lambda^2} \left[\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{r^6} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right) K_0(\lambda r) \right]; \\
t_{45} &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{xy}{r^4} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\lambda r) \right]; \quad t_{55} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(y^2 - x^2)}{r^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_0(\lambda r) \right]; \\
t_{16} &= -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \frac{x^2}{r^2} + \frac{(3\nu+1)}{2} \right]; \quad t_{26} = -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \frac{y^2}{r^2} + \frac{(3\nu+1)}{2} \right]; \\
t_{36} &= -\frac{(1-\nu)}{4\pi} \frac{xy}{r^2}; \quad t_{46} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{r^2}; \quad t_{56} = -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{r^2}.
\end{aligned}$$

(3.80)

Soluțiile discontinue pentru un defect amplasat pe un contur arbitrar L (Fig. 3.3) pot fi obținute prin aceeași metodologie descrisă în subcapitolul 3.1.2.

La trecerea de la sistemul local de coordonate (\bar{x}, \bar{y}) la sistemul local (n, t) amplasat în orice punct P (Fig. 3.3.), se obține:

$$\begin{aligned}
w^*(P) &= \int_L \bar{w}(P, Q) ds_Q; \\
\theta_n^*(P) &= \int_L [\bar{\theta}_x(P, Q) \cos \gamma + \bar{\theta}_y(P, Q) \sin \gamma] ds_Q; \\
\theta_t^*(P) &= \int_L [-\bar{\theta}_x(P, Q) \sin \gamma + \bar{\theta}_y(P, Q) \cos \gamma] ds_Q; \\
M_n^*(P) &= \int_L [\bar{M}_x(P, Q) \cos^2 \gamma + \bar{M}_y(P, Q) \sin^2 \gamma + 2\bar{M}_{xy}(P, Q) \cos \gamma \sin \gamma] ds_Q; \\
M_{nt}^*(P) &= \int_L \{ [\bar{M}_y(P, Q) - \bar{M}_x(P, Q)] \cos \gamma \sin \gamma + \bar{M}_{xy}(P, Q) (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \} ds_Q; \\
Q_n(P) &= \int_L [Q_x(P, Q) \cos \gamma + Q_y(P, Q) \sin \gamma] ds_Q;
\end{aligned} \tag{3.81}$$

unde:

$$\begin{aligned}
\bar{w}(P, Q) &= \bar{g}_{11}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{g}_{12}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{13}(P, Q) \langle \bar{\theta}_y(Q) \rangle + \\
&+ \bar{g}_{14}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{15}(P, Q) \langle \bar{M}_{xy}(Q) \rangle + \bar{g}_{16}(P, Q) \langle \bar{Q}_x(Q) \rangle; \\
\bar{\theta}_x(P, Q) &= \bar{g}_{21}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{g}_{22}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{23}(P, Q) \langle \bar{\theta}_y(Q) \rangle + \\
&+ \bar{g}_{24}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{25}(P, Q) \langle \bar{M}_{xy}(Q) \rangle + \bar{g}_{26}(P, Q) \langle \bar{Q}_x(Q) \rangle; \\
\bar{\theta}_y(P, Q) &= \bar{g}_{31}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{g}_{32}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{33}(P, Q) \langle \bar{\theta}_y(Q) \rangle + \\
&+ \bar{g}_{34}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{g}_{35}(P, Q) \langle \bar{M}_{xy}(Q) \rangle + \bar{g}_{36}(P, Q) \langle \bar{Q}_x(Q) \rangle; \\
\bar{M}_x(P, Q) &= \bar{t}_{11}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{12}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{13}(P, Q) \langle \bar{\theta}_y(Q) \rangle + \\
&+ \bar{t}_{14}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{15}(P, Q) \langle \bar{M}_{xy}(Q) \rangle + \bar{t}_{16}(P, Q) \langle \bar{Q}_x(Q) \rangle; \\
\bar{M}_y(P, Q) &= \bar{t}_{21}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{22}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{23}(P, Q) \langle \bar{\theta}_y(Q) \rangle + \\
&+ \bar{t}_{24}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{25}(P, Q) \langle \bar{M}_{xy}(Q) \rangle + \bar{t}_{26}(P, Q) \langle \bar{Q}_x(Q) \rangle; \\
\bar{M}_{xy}(P, Q) &= \bar{t}_{31}(P, Q) \langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{32}(P, Q) \langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{33}(P, Q) \langle \bar{\theta}_y(Q) \rangle + \\
&+ \bar{t}_{34}(P, Q) \langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{35}(P, Q) \langle \bar{M}_{xy}(Q) \rangle + \bar{t}_{36}(P, Q) \langle \bar{Q}_x(Q) \rangle;
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_x(P, Q) &= \bar{t}_{41}(P, Q)\langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{42}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{43}(P, Q)\langle \bar{\theta}_y(Q) \rangle + \\
&+ \bar{t}_{44}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{45}(P, Q)\langle \bar{M}_{xy}(Q) \rangle + \bar{t}_{46}(P, Q)\langle \bar{Q}_x(Q) \rangle; \\
\bar{Q}_y(P, Q) &= \bar{t}_{51}(P, Q)\langle \bar{w}(Q) \rangle + \bar{t}_{52}(P, Q)\langle \bar{\theta}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{53}(P, Q)\langle \bar{\theta}_y(Q) \rangle + \\
&+ \bar{t}_{54}(P, Q)\langle \bar{M}_x(Q) \rangle + \bar{t}_{55}(P, Q)\langle \bar{M}_{xy}(Q) \rangle + \bar{t}_{56}(P, Q)\langle \bar{Q}_x(Q) \rangle;
\end{aligned}$$

Bara de sus indică că funcțiile respective sunt prezentate în coordonate locale (\bar{x}, \bar{y}) . Funcțiile \bar{g}_{ij} , \bar{t}_{ij} pot fi obținute din relațiile (3.78) și (3.80) substituind x_i cu \bar{x}_i și y_i cu \bar{y}_i .

Pentru a obține ecuațiile integrale, starea de deformație a plăcii este prezentată ca suma a două stări. Prima (notată cu cerculeț) provine de la sarcina exterioară. A doua (notată cu asterix) provine din salturile concentrate pe linia L a defectului

$$\begin{aligned}
w(P) &= w^o(P) + w^*(P); & \theta_n(P) &= \theta_n^o(P) + \theta_n^*(P); & \theta_t(P) &= \theta_t^o(P) + \theta_t^*(P); \\
M_n(P) &= M_n^o(P) + M_n^*(P); & M_{nt}(P) &= M_{nt}^o(P) + M_{nt}^*(P); & Q_n(P) &= Q_n^o(P) + Q_n^*(P).
\end{aligned} \quad (3.83)$$

Funcțiile w^* , θ_n^* , θ_t^* , M_n^* , M_{nt}^* și Q_n^* în conformitate cu relația (3.81) sunt exprimate prin salturile respective de-a lungul conturului L . O parte din aceste salturi pot fi cunoscute. De exemplu, dacă defectul are forma unei fisuri, atunci traversând de la o parte a fisurii la alta, săgeata w , unghiurile de rotire θ_n și θ_t au salturi. Dacă defectul reprezintă o incluziune rigidă sau elastică, atunci traversând de la o parte a fisurii la alta, momentele M_n , M_{nt} și forța transversală Q_n au salturi. Din condițiile de pe margine vor fi obținute ecuațiile integrale necesare. De exemplu, dacă defectul reprezintă o fisură, atunci pe marginile ei $M_n = 0$, $M_{nt} = 0$ și $Q_n = 0$. Dacă defectul reprezintă o incluziune rigidă, atunci săgeata ei trebuie să fie egală cu săgeata plăcii. De asemenea aceste soluții pot fi aplicate pentru rezolvarea problemelor de bază și ale plăcilor cu condiții la limită mixte. În aceste cazuri, frontiera va fi considerată ca defect. Traversând din interiorul regiunii ocupate de placă spre frontiera defectului, salturile funcțiilor w , θ_n , θ_t , M_n , M_{nt} , Q_n vor fi considerate egale cu valorile de pe frontieră. Traversând din exteriorul regiunii ocupate de placă spre frontiera defectului aceste salturi vor fi considerate nule.

3.2.2. Implementarea numerică a soluțiilor discontinue în teoria plăcilor ținând cont de deformațiile transversale

Implementarea numerică a soluțiilor discontinue [37] în teoria lui Reissner se efectuează analogic ca pentru încovoierea clasică, descrisă în subcapitolul 3.1.3.

Frontiera plăcii va fi considerată ca defect într-o placă infinită (Fig. 3.4.). Dacă se va trece din interiorul regiunii ocupate de placă spre frontiera defectului, funcțiile w , θ_n , θ_t , M_n , M_{nt} , Q_n vor avea salt. La traversarea din exteriorul regiunii ocupate de placă spre frontiera defectului aceste salturi vor fi considerate nule.

Dacă se vor introduce condițiile la limită se va obține:

- pentru conturul simplu rezemat (L_1):

$$w^* + w^o = 0; \quad M_n^* + M_n^o = 0; \quad M_{nt}^* + M_{nt}^o = 0; \quad (\langle \theta_n \rangle \neq 0; \quad \langle \theta_t \rangle \neq 0; \quad \langle V_n \rangle \neq 0)$$

- pentru conturul încastrat (L_2):

$$w^* + w^o = 0; \quad \theta_n^* + \theta_n^o = 0; \quad \theta_t^* + \theta_t^o = 0; \quad (\langle M_n \rangle \neq 0; \quad \langle M_{nt} \rangle \neq 0; \quad \langle V_n \rangle \neq 0)$$

- pentru conturul liber (L_3):

$$M_n^* + M_n^o = 0; \quad M_{nt}^* + M_{nt}^o = 0; \quad Q_n^* + Q_n^o = 0; \quad (\langle w \rangle \neq 0; \quad \langle \theta_n \rangle \neq 0; \quad \langle \theta_t \rangle \neq 0)$$

- pentru defectul (L_d) de tipul unei articulații plastice:

$$M_n^* + M_n^o = 0; \quad (\langle \theta_n \rangle \neq 0).$$

Soluțiile w^* , θ_n^* , θ_t^* , M_n^* , M_{nt}^* și Q_n^* provenite din salturi sunt date de expresiile (3.81) și (3.82).

Soluțiile w^o , θ_n^o , θ_t^o , M_n^o , M_{nt}^o și Q_n^o pentru cazul când placa este acționată de o forță concentrată F aplicată în punctul cu coordonatele a_0 , b_0 față de originea sistemul global, atunci soluția în nodul i situat pe frontiera L va fi:

$$w_i^o = F \cdot g_{16} (x_i^m - a_0, y_i^m - b_0);$$

$$\theta_{ni}^o = F (n_x \theta_{xi}^o + n_y \theta_{yi}^o) = F [n_x g_{26} (x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + n_y g_{36} (x_i^m - a_0, y_i^m - b_0)];$$

$$\theta_{ti}^o = F (-n_y \theta_{xi}^o + n_x \theta_{yi}^o) = F [-n_y g_{26} (x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + n_x g_{36} (x_i^m - a_0, y_i^m - b_0)];$$

$$\begin{aligned}
M_{ni}^o &= F \left(n_x^2 M_{xi}^o + n_y^2 M_{yi}^o + 2n_x n_y M_{xyi}^o \right) = F \left[n_x^2 t_{16} \left(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0 \right) + \right. \\
&+ n_y^2 t_{26} \left(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0 \right) + \left. 2n_x n_y t_{36} \left(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0 \right) \right]; \\
M_{nii}^o &= F \left[n_x n_y \left(M_{yi}^o - M_{xi}^o \right) + \left(n_x^2 - n_y^2 \right) M_{xyi}^o \right] = F \left\{ n_x n_y \left[t_{26} \left(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0 \right) - \right. \right. \\
&- t_{16} \left(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0 \right) \left. \right] + \left(n_x^2 - n_y^2 \right) t_{36} \left(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0 \right) \left. \right\}; \\
Q_{ni}^o &= F \left(n_x Q_{xi}^o + n_y Q_{yi}^o \right) = F \left[n_x t_{46} \left(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0 \right) + n_y t_{56} \left(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0 \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.84}$$

unde: x_i^m, y_i^m sunt coordonatele nodului de frontieră i în sistemul global calculate cu ajutorul relațiilor (3.36), iar $n_x = \cos\alpha$ și $n_y = \sin\alpha$, pot fi determinate cu relațiile (3.41).

Pentru alte cazuri de încărcare (Fig. 3.5.) soluțiile din sarcina exterioară se vor obține prin integrarea relațiilor (3.84) prin analogie cu (3.20* - 3.20***).

Discretizând conturul L ($L=L_1+L_2+L_3$) și defectul L_d într-un set de elemente constante, se va obține următorul sistem de ecuații liniare:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\sum_{j=n_{L3}} w_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} w_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} w_{ij}^3 \langle \theta_{ij} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} w_{ij}^4 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} w_{ij}^5 \langle M_{nij} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} w_{ij}^6 \langle Q_{nj} \rangle = -w_i^o; \quad (i = n_{L1}, n_{L2}) \\
&\sum_{j=n_{L3}} \theta_{ij}^{n1} \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} \theta_{ij}^{n2} \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} \theta_{ij}^{n3} \langle \theta_{ij} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} \theta_{ij}^{n4} \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} \theta_{ij}^{n5} \langle M_{nij} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} \theta_{ij}^{n6} \langle Q_{nj} \rangle = -\theta_{ni}^o; \quad (i = n_{L2}) \\
&\sum_{j=n_{L3}} \theta_{ij}^{l1} \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} \theta_{ij}^{l2} \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} \theta_{ij}^{l3} \langle \theta_{ij} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} \theta_{ij}^{l4} \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} \theta_{ij}^{l5} \langle M_{nij} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} \theta_{ij}^{l6} \langle Q_{nj} \rangle = -\theta_{ii}^o; \quad (i = n_{L2}) \\
&\sum_{j=n_{L3}} m_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} m_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} m_{ij}^3 \langle \theta_{ij} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} m_{ij}^4 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} m_{ij}^5 \langle M_{nij} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} m_{ij}^6 \langle Q_{nj} \rangle = -M_{ni}^o; \quad (i = n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}) \\
&\sum_{j=n_{L3}} h_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} h_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} h_{ij}^3 \langle \theta_{ij} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} h_{ij}^4 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} h_{ij}^5 \langle M_{nij} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} h_{ij}^6 \langle Q_{nj} \rangle = -M_{nii}^o; \quad (i = n_{L1}, n_{L3}) \\
&\sum_{j=n_{L3}} q_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} q_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} q_{ij}^3 \langle \theta_{ij} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} q_{ij}^4 \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} q_{ij}^5 \langle M_{nij} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} q_{ij}^6 \langle Q_{nj} \rangle = -Q_{ni}^o. \quad (i = n_{L3})
\end{aligned} \right. \tag{3.85}$$

Termenii $w_{ij}^1, w_{ij}^2, \dots, q_{ij}^6$ se vor calcula utilizând soluțiile din (3.78) și (3.80), substituind $x_i = \bar{x}_i^m$ și $y_i = \bar{y}_i^m - \bar{\eta}$, în care \bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m sunt date de relațiile (3.40), iar $-l_j/2 \leq \bar{\eta} \leq +l_j/2$.

$$\begin{aligned}
w_{ij}^1 &= \int_{l_j} \bar{g}_{11} \left(\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta} \right) d\bar{\eta}; & \theta_{ij}^{n1} &= \int_{l_j} \left[c \bar{g}_{21} \left(\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta} \right) + s \bar{g}_{31} \left(\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta} \right) \right] d\bar{\eta}; \\
&\vdots & & \vdots \\
w_{ij}^6 &= \int_{l_j} \bar{g}_{16} \left(\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta} \right) d\bar{\eta}; & \theta_{ij}^{n6} &= \int_{l_j} \left[c \bar{g}_{26} \left(\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta} \right) + s \bar{g}_{36} \left(\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta} \right) \right] d\bar{\eta};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{ij}^1 &= \int_{l_j} \left[-s \bar{g}_{21} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + c \bar{g}_{31} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) \right] d\bar{\eta}; \\
&\vdots \\
\theta_{ij}^6 &= \int_{l_j} \left[-s \bar{g}_{26} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + c \bar{g}_{36} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) \right] d\bar{\eta}; \\
m_{ij}^1 &= \int_{l_j} \left[c^2 \bar{t}_{11} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + s^2 \bar{t}_{21} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + 2cs \bar{t}_{31} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) \right] d\bar{\eta}; \\
&\vdots \\
m_{ij}^6 &= \int_{l_j} \left[c^2 \bar{t}_{16} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + s^2 \bar{t}_{26} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + 2cs \bar{t}_{36} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) \right] d\bar{\eta}; \\
h_{ij}^1 &= \int_{l_j} \left[c^2 \bar{t}_{11} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + s^2 \bar{t}_{21} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + 2cs \bar{t}_{31} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) \right] d\bar{\eta}; \\
&\vdots \\
h_{ij}^6 &= \int_{l_j} \left\{ cs \left[\bar{t}_{26} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) - \bar{t}_{16} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) \right] + (c^2 - s^2) \bar{t}_{36} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) \right\} d\bar{\eta}; \\
q_{ij}^1 &= \int_{l_j} \left[c \bar{t}_{41} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + s \bar{t}_{51} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) \right] d\bar{\eta}; \\
&\vdots \\
q_{ij}^6 &= \int_{l_j} \left[c \bar{t}_{46} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) + s \bar{t}_{56} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) \right] d\bar{\eta};
\end{aligned} \tag{3.86}$$

unde $c = \cos\gamma$, iar $s = \sin\gamma$, determinate cu ajutorul relațiilor (3.42).

În formă matricială ecuațiile (3.85) pot fi scrise astfel:

$$\begin{bmatrix} [w_{ij}^1] & [w_{ij}^2] & [w_{ij}^3] & [w_{ij}^4] & [w_{ij}^5] & [w_{ij}^6] \\ [\theta_{ij}^{n1}] & [\theta_{ij}^{n2}] & [\theta_{ij}^{n3}] & [\theta_{ij}^{n4}] & [\theta_{ij}^{n5}] & [\theta_{ij}^{n6}] \\ [\theta_{ij}^{t1}] & [\theta_{ij}^{t2}] & [\theta_{ij}^{t3}] & [\theta_{ij}^{t4}] & [\theta_{ij}^{t5}] & [\theta_{ij}^{t6}] \\ [m_{ij}^1] & [m_{ij}^2] & [m_{ij}^3] & [m_{ij}^4] & [m_{ij}^5] & [m_{ij}^6] \\ [h_{ij}^1] & [h_{ij}^2] & [h_{ij}^3] & [h_{ij}^4] & [h_{ij}^5] & [h_{ij}^6] \\ [q_{ij}^1] & [q_{ij}^2] & [q_{ij}^3] & [q_{ij}^4] & [q_{ij}^5] & [q_{ij}^6] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \langle \{w_j\} \rangle \\ \langle \{\theta_{nj}\} \rangle \\ \langle \{\theta_{ij}\} \rangle \\ \langle \{M_{nj}\} \rangle \\ \langle \{M_{nij}\} \rangle \\ \langle \{Q_{nj}\} \rangle \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle \{-w_i^o\} \rangle \\ \langle \{-\theta_{ni}^o\} \rangle \\ \langle \{-\theta_{ti}^o\} \rangle \\ \langle \{-M_{ni}^o\} \rangle \\ \langle \{-M_{nti}^o\} \rangle \\ \langle \{-Q_{ni}^o\} \rangle \end{Bmatrix}, \tag{3.87}$$

sau în formă compactă:

$$[A]_{(3n_e+n_d) \times (3n_e+n_d)} \cdot \{X\}_{3n_e+n_d} = \{B\}_{3n_e+n_d}. \tag{3.88}$$

Dacă va fi rezolvat sistemul de ecuații (3.88) vor fi cunoscute toate salturile de pe frontieră, astfel pot fi calculate deplasările și eforturile în orice punct din interiorul plăcii, acestea fiind exprimate prin salturile obținute. De exemplu, dacă este necesar de calculat săgeata într-un punct k din interiorul plăcii (Fig.3.6.), expresia va căpăta forma:

$$w_k = \sum_{j=n_{L3}} g_{11} \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} g_{12} \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} g_{13} \langle \theta_{ij} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} g_{14} \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} g_{15} \langle M_{nij} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} g_{16} \langle Q_{nj} \rangle + w_k^o. \quad (3.89)$$

Unghiul de rotire a secțiunii în punctul k , ce acționează pe direcția d va fi:

$$\theta_k^d = \sum_{j=n_{L3}} (c g_{21} + s g_{31}) \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} (c g_{22} + s g_{32}) \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} (c g_{23} + s g_{33}) \langle \theta_{ij} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} (c g_{24} + s g_{34}) \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} (c g_{25} + s g_{35}) \langle M_{nij} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} (c g_{26} + s g_{36}) \langle Q_{nj} \rangle + n_x \theta_{xk}^o + n_y \theta_{yk}^o. \quad (3.90)$$

Momentul în punctul k , ce acționează pe direcția d se obține:

$$M_k^d = \sum_{j=n_{L3}} (c^2 t_{11} + s^2 t_{21} + 2 c s t_{31}) \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} (c^2 t_{12} + s^2 t_{22} + 2 c s t_{32}) \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} (c^2 t_{13} + s^2 t_{23} + 2 c s t_{33}) \langle \theta_{ij} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} (c^2 t_{14} + s^2 t_{24} + 2 c s t_{34}) \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} (c^2 t_{15} + s^2 t_{25} + 2 c s t_{35}) \langle M_{nij} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} (c^2 t_{16} + s^2 t_{26} + 2 c s t_{36}) \langle Q_{nj} \rangle + n_x^2 M_{xk}^o + n_y^2 M_{yk}^o + 2 n_x n_y M_{xyk}^o. \quad (3.91)$$

Forța transversală în punctul k , ce acționează pe direcția d va avea forma:

$$Q_k^d = \sum_{j=n_{L3}} (c t_{41} + s t_{51}) \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}, n_{Ld}} (c t_{42} + s t_{52}) \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} (c t_{43} + s t_{53}) \langle \theta_{ij} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} (c t_{44} + s t_{54}) \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} (c t_{45} + s t_{55}) \langle M_{nij} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} (c t_{46} + s t_{56}) \langle Q_{nj} \rangle + n_x Q_{xk}^o + n_y Q_{yk}^o. \quad (3.92)$$

Termenii $g_{11}, g_{12}, \dots, t_{56}$ se vor calcula utilizând soluțiile din (3.78) și (3.80), substituind în acestea x_i cu x_k și y_i cu y_k .

x_k și y_k reprezintă coordonatele punctului k în sistemul global;

$c = \cos(\beta_k - \alpha_j)$; $s = \sin(\beta_k - \alpha_j)$; $n_x = \cos\beta_k$; $n_y = \sin\beta_k$ (Fig.3.6.);

$w_k^o, \theta_{xk}^o, \dots, Q_{yk}^o$ reprezintă soluțiile în punctul k , provenite din sarcina exterioară, care pot fi determinate folosind relațiile (3.84) substituind în acestea x_i^m cu x_k și y_i^m cu y_k .

3.2.3. Exemple de calcul a plăcilor plane în teoria ce ține cont de deformațiile transversale de forfecare (Reissner) folosind soluțiile discontinue

Cu ajutorul programului descris în (Anexa 3.) au fost calculate deplasările și eforturile plăcilor ținând cont de deformațiile transversale. Pentru toate cazurile cercetate s-a ales o placă pătrată, simplu rezemată pe toate laturile, încărcată la centru cu o forță [38]. Frontiera plăcii a fost discretizată în 20 de elemente constante conform Fig. 3.10., a. Rezultatele au fost comparate cu cele obținute prin MEF, pentru o rețea de discretizare 20x20 elemente cu trei grade de libertate în nod (Fig. 3.10., b) și cu soluțiile obținute conform teoriei clasice (T.C.).

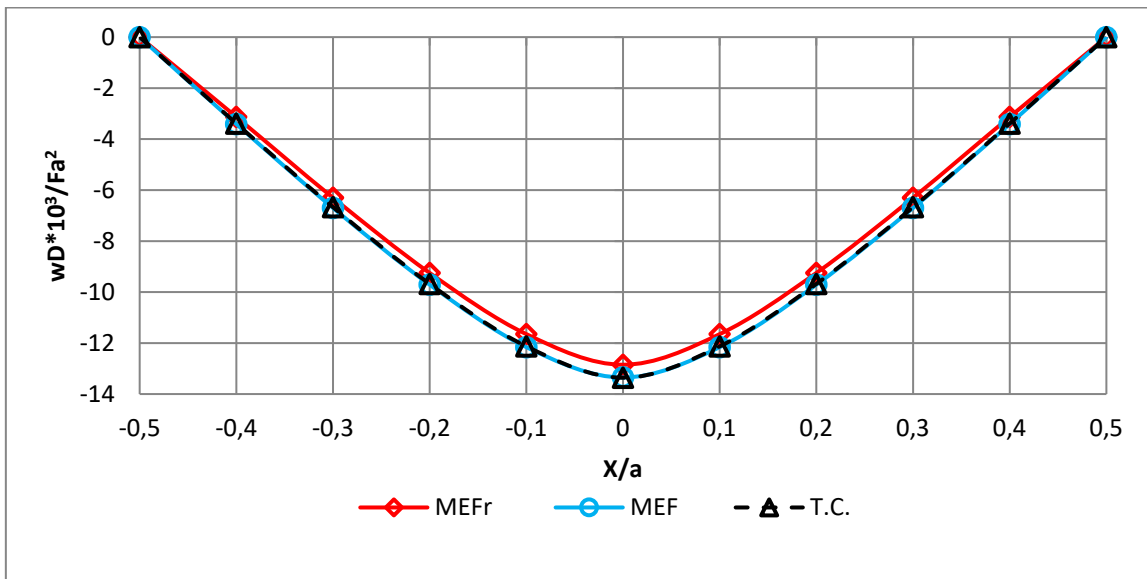


Fig. 3.102. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$, pentru raportul $h/a = 0,01$

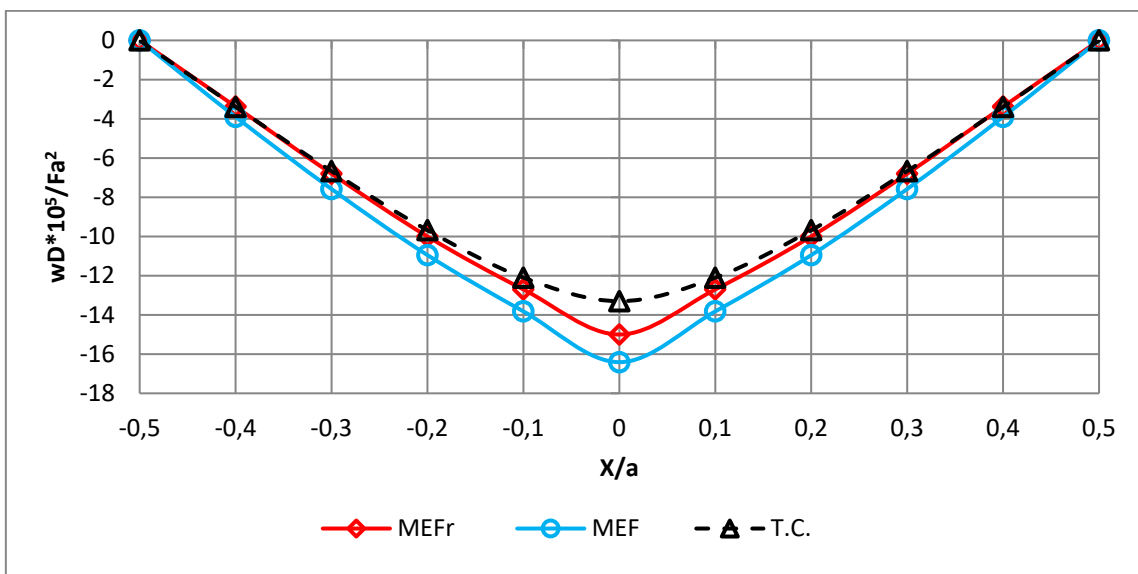


Fig. 3.103. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$, pentru raportul $h/a = 0,1$

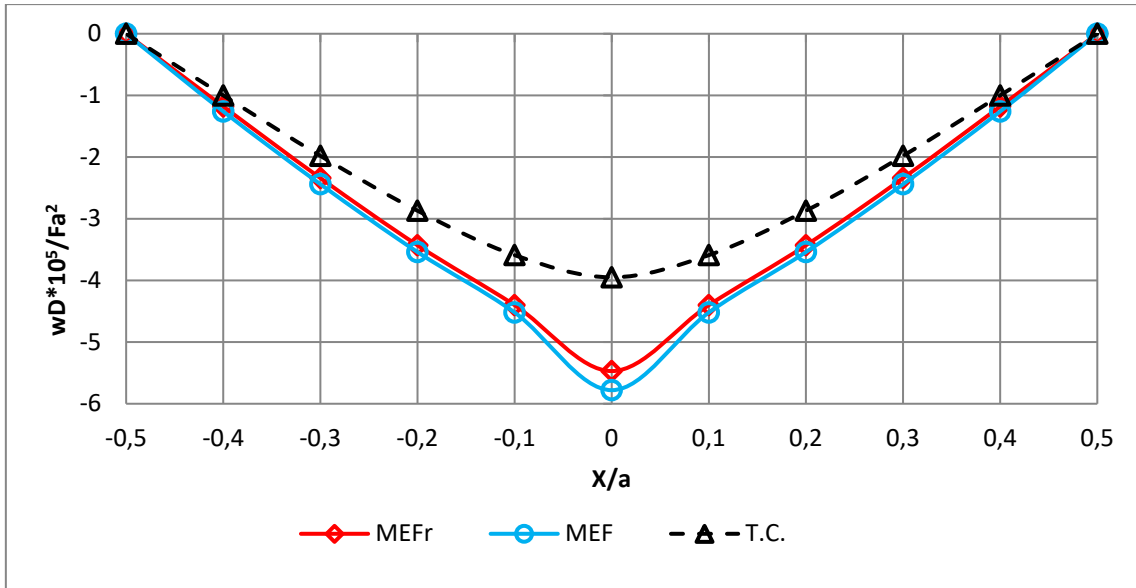


Fig. 3.104. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$, pentru raportul $h/a = 0,15$

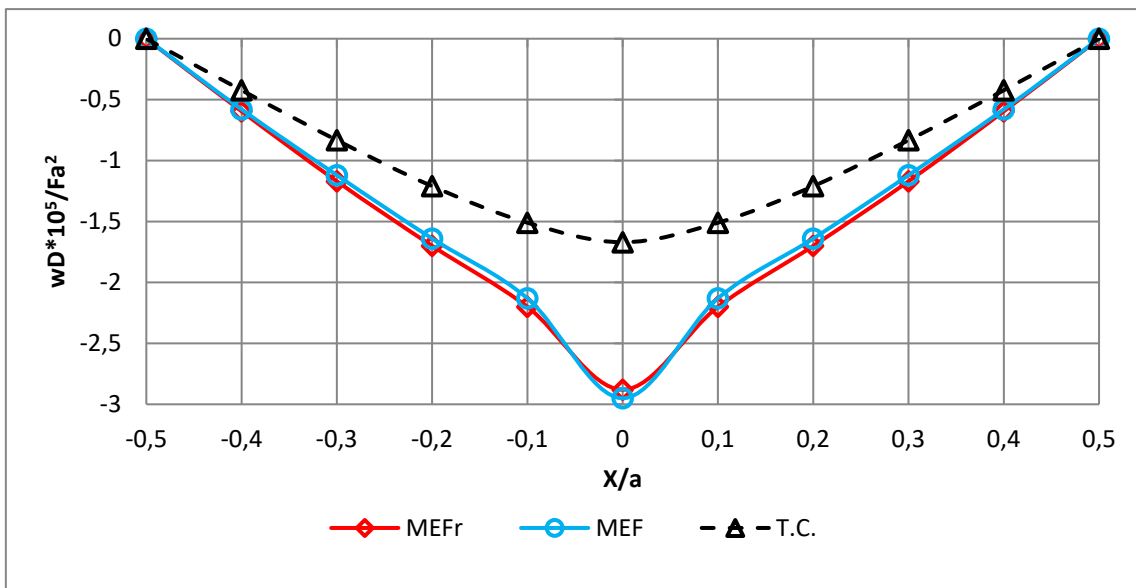


Fig. 3.105. Săgeata w pe secțiunea centrală $y = 0$, pentru raportul $h/a = 0,2$

Din diagramele de mai sus (Fig. 3.102. - 3.105.) se observă că odată cu creșterea raportului h/a influența deformațiilor, provenite din forța de forfecare, asupra săgeții devine tot mai pronunțată. Acest efect se accentuează în apropierea punctului de aplicare a forței concentrate. Așa cum recomandă și literatura de specialitate, ca pentru raporturi $h/a > 0,1$, această influență nu mai poate fi neglijată, întrucât aceste abateri depășesc valoarea de 5% față de teoria clasică. Totodată, în MEF se observă o creștere mai intensivă a săgeții decât în MEFr.

3.3. Concluzii la capitolul 3

În acest capitol este descris algoritmul de obținere a soluțiilor discontinue atât în formularea clasică a plăcilor cât și în teoria ce ține cont de deformațiile din forța de forfecare.

Aceste soluții, elaborate de către prof. Gh. Moraru, [88-91, 148-151] au fost aplicate la calculul plăcilor de contur arbitrar, cu diferite moduri de rezemare și acționate de diverse tipuri de încărcări. Rezultatele obținute prin MEFr bazată pe soluții discontinue au fost comparate cu MEF și cu metodele analitice, demonstrând o bună exactitate și aplicabilitate. Implementarea numerică a metodei propuse oferă posibilitatea de a elabora programe de calcul noi și de a rezolva probleme practice, care nu pot fi soluționate prin metodele obișnuite sau prezintă dificultăți (fisuri, incluziuni, concentrări de tensiuni, domenii infinite etc.).

CONCLUZII GENERALE

În rezultatul studiului efectuat au fost formulate următoarele concluzii:

1. Soluțiile discontinue în MEFr, obținute de către prof. Gh. Moraru cu ajutorul Transformării Fourier, au fost aplicate cu succes de către autor la calculul plăcilor plane cu diferite moduri de rezemare, încărcări, defecte etc., atât în interpretarea clasică cât și ținând seama de deformațiile rezultate din forfecare;
2. Au fost rezolvate un șir de integrale de frontieră. Majoritatea din acestea fiind singulare, hipersingulare sau divergente, și au fost tratate cu ajutorul metodelor de regularizare.
3. Pentru metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue a fost efectuată implementarea numerică;
4. În baza metodei propuse a fost elaborat de către autor un program de calcul în limbajul Matlab;
5. Cu ajutorul programului de calcul realizat au fost testate soluțiile obținute prin MEFr bazată pe soluții discontinue pentru plăci de diferite configurații, moduri de rezemare, încărcări, defecte etc. Rezultatele obținute au fost comparate cu cele analitice și MEF demonstrând o convergență bună, devierile fiind mai mici de 3%. De menționat, în calculul numeric prin MEFr s-au utilizat elemente de frontieră constante și într-un număr cu mult mai redus față de MEF.

RECOMANDĂRI

Soluțiile discontinue, descrise în această lucrare, s-au dovedit a fi eficiente în rezolvarea diferitor probleme ale plăcilor plane, prezentând o exactitate sporită și un șir de avantaje în comparație cu alte metode numerice.

Astfel, acestea pot fi recomandate inginerilor la rezolvarea problemelor practice, care includ:

1. Calculul plăcilor: cu diferite moduri de rezemare a conturului, condiții la limită mixte, diverse tipuri de încărcări;
2. Calculul plăcilor ce prezintă defecte și concentratori de tensiuni etc.;
3. Elaborarea noilor softuri pentru calculele ingineresti.

BIBLIOGRAFIE

1. ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications, 1965. 1046 p. ISBN 978-0486612720.
2. ALIABADI, M. H. *Plate bending analysis with boundary elements*, UK:WIT Press, 1998. 368 p. ISBN 978-1853125317.
3. ALIABADI, M. H. *The Boundary Element Method*. Volume 2. Chichester: Wiley, 2002. 636 p. ISBN 978-0470842980.
4. ALIABADI, M. H., ROOK, D. P. *Numerical Fracture Mechanics*. Southampton: Computational Mechanics Publications and Kluwer Academic Publishers, 1991. ISBN 1-85312-0.57-X.
5. BALÁŠ, J., SLÁDEK, V., SLÁDEK, J. *Stress analysis by boundary element method*. Amsterdam, Bratislava: Elsevier, 1989. ISBN 9781483291741.
6. BANERJEE, P. K., BUTTERFIELD, R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. US: McGraw - Hill Inc, 1981. 452 p. ISBN 978-0070841208.
7. BECKER, A. A. *The Boundary Element Method in Engineering: A complete Course*. London: McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1992. 350 p. ISBN 978-0077074395.
8. BEER, C., SMITH, I., DUENSER, C. *The Boundary Element Method with Programming for Engineers and Scientists*. Viena: Springer. 2010. 512 p. ISBN 978-3211999004.
9. BERNOULLI, J. Essai theorique sur les vibrations de plaques elastiques rectangularies etlibers. In: *Nova Acta Acad Petropolit*. 1789, vol. 5, p.p. 197-219.
10. BEZINE, G. A new boundary element method for bending of plates on elastic foundation. In: *International Journal of Solids Structures*. 1988, vol. 24, nr. 6, pp 557-565. ISSN 0020-7683.
11. BONNET, MARC. *Equations Integral et Elements de Frontiere*. Paris: Eyrolles, 1995. 328 p. ISBN 9782271053176.
12. BOUSSINESQ, J. Complements anne ertude de 1871 sur la theorie de l'equilibre et du mouvement des solides elastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres." In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1879, vol. 5, nr. 3, pp 163-194.
13. BREBBIA, C. A. *The boundary Element Method for Engineers*. London: Pentech Press, 1984. 189 p. ISBN 0727302051.

14. BREBBIA, C. A., BUTTERFIELD, R. Formal equivalence of direct and indirect boundary element methods. In: *Applied Mathematical Modelling*. 1978, vol. 2, nr.2, pp 132-134. ISSN 0307-904X.
15. BREBBIA, C. A., TELLES, J. C., WROBEL, L. C. *Boundary Element Techniques: Theory and Application in Engineering*. Berlin: Springer-Verlag, 1984. ISBN 978-3-642-48862-7.
16. BREBBIA, C. A., WALKER, S. *Boundary Element Techniques in Engineering*. London: Butterworths, 1980. ISBN 9781483102566.
17. BRYCHKOV, IU. A., PRUDNIKOV, A. P. *Integral Transforms of Generalized Functions*. New York: Taylor and Francis, 1989. 343 p. ISBN 9782881247057.
18. BUI, H. D. An integral equation method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape. In: *Journal of the Mechanics Physics of Solids*. 1977, vol. 25, nr. 1, pp 29-39. ISSN 0022-5096.
19. CAUCHY, A. L. Sur l'équilibre le mouvement d'une lame solide. In: *Exercices Math*. 1828, vol. 3, pp. 328.
20. CHLADNI, E. F. F. *Die Akustik*. Leipzig: Breitkopf and Härtel, 1802.
21. CLEBSCH, Alfred. *Theorie de l'Elasticite des Corps Solids*. Paris: Dunod Editeur, 1883.
22. CROUCH, S. L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method I. Infinite body solution. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1976. vol. 10, nr. 2, pp 301-343. ISSN 1097-0207.
23. CROUCH, S. L., STARFIELD, A. M. *Boundary Element Method in Solid Mechanics with Applications in Rock Mechanics and Geological Engineering*. London: George Allen & Unwin, 1983. ISBN 9780046200107.
24. CRUSE, T. A. *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1988. 162 p. ISBN 90-247-3614-5.
25. DIRGANTARA, T., AND ALIABADI, M. H. Stress intensity factors for cracks in thin plates. In: *Engineering Fracture Mechanics*. 2002, vol. 69, nr. 13, pp 1465-1486. ISSN: 0013-7944.
26. DUFFY, D. G. *Green's Functions with Applications*. New York: Chapman & Hall/CRC, 2001. ISBN 1-58488-110-0.
27. DUNDURS, J., MARKENSCOFF, X. Green function formulation of anticracks and their interaction with load induced singularities. In: *Journal of Applied Mechanics*. 1989, vol. 56, nr. 3, pp 550-555. ISSN 1528-9036.
28. DWIGHT, H. B. *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*. New York: The Macmillan Company, 1961. 336 p. ISBN 0023311703.

29. EULER, L. De motu vibratorio tympanorum. In: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*. 1766, vol. 10, pp 243-260.
30. EXADACTYLOS, G., XIROUDAKIS, G. The G2 constant displacement discontinuity method-Part I: Solution of plane crack problems. In: *International Journal of Solids and Structures*. 2010, vol, 47, nr. 18-19, pp 2568-2577. ISSN 0020-7683.
31. EXADAKTYLOS, G., XIROUDAKIS, G. The G2 constant displacement discontinuity method-Part II: Solution of half-plane crack problems. In: *International Journal of Solids and Structures*. 2010, vol, 47, nr. 18-19, pp 2578-2590. ISSN 0020-7683.
32. FARES, Nabil and Victor C. Li. 1987. An indirect Boundary Element Method for 2-D finite/infinite regions with multiple displacement discontinuities. In: *Engineering Fracture Mechanics*. 1987, vol. 26, nr. 1, pp 127-141. ISSN: 0013-7944.
33. FÖPPL, A. *Vorlesungen über technische Mechanik*. Leipzig, Berlin: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1912.
34. **GALBINEAN, Sergiu**. Calculation errors of the plates using finite element method. In: *Meridian Ingineresc*. 2013, nr. 2, pp 64-66. ISSN 1683-853X.
35. **GALBINEAN, Sergiu**. Calculul plăcilor consolidate pe contur cu grinzi. In: *Tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM*, vol. I, Chișinău, 2011, pp 391-394. ISBN 978-9975-45-208-3.
36. **GALBINEAN, Sergiu**. Calculul plăcilor prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue. In: *Tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM*, vol. II. Chișinău, 2013, pp 407- 411. ISBN 978-9975-45-312-7.
37. **GALBINEAN, Sergiu**. Discontinuous solutions in BEM for plate analysis in Reissner-Mindlin theory. In: *International Azerbaijan Academic Research Congress*. 2022, pp 751-758. ISBN 978-605-71461-7-5.
38. **GALBINEAN, Sergiu**. Elaborarea programului de calcul al plăcii simplu rezemate pe două laturi opuse folosind seriile Levy. In: *Tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM*, vol. I. Chișinău, 2011, pp 395-398. ISBN 978-9975-45-208-3.
39. **GALBINEAN, Sergiu**. Implementarea numerică a metodei elementelor de frontieră. In: *Tezele Conferinței jubiliare tehnico-științifice jubiliare a colaboratorilor, doctoranzilor și studenților consacrată celei de-a 50-a aniversare a UTM*, vol. II. Chișinău, 2014, pp 202-205. ISBN 978-9975-45-382-0.
40. **GALBINEAN, Sergiu**. Metode numerice de calcul a plăcilor. In: *Tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM*, vol. II, Chișinău, 2012, pp 107-110. ISBN 978-9975-45-251-9.

41. **GALBINEAN, Sergiu.** Soluții discontinue pentru calculul plăcilor în teoria clasică. In: *Akados*. 2018, vol. 1, nr. 48, pp 31-35. ISSN 1857-0461.
42. GEHRING, F. *Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik, 2nd ed.* Leipzig: B. G. Teubner, 1877. 466 p.
43. GEL'FAND, I. M., SHILOV, G. F. *Generalized Functions*. Vol. 1. New York: Academic Press, 1964. ISBN 0-12-279501-6.
44. GERMAIN, Sophie. *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces elastiques et equation general de ces surfaces*. Paris: Imprimerie de Huzard-Courcier, 1826.
45. GRADSHTEYN, I. S., RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series and Products*. New York: Academic Press, 1980. ISBN 978-0-12-373637-6.
46. GRAY, L. J. Evaluation of hypersingular integrals in the boundary element method. In: *Mathematical and Computer Modelling*. 1991, vol. 15, nr. 3-5, pp 165-174. ISSN 0895-7177.
47. GRAY, L. J., MARTHA, L. F., INGRAFFEA, A. R. Hypersingular integrals in boundary element fracture analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1990, vol. 29, pp 1135-1158. ISSN 0029-5981.
48. HADAMARD, Jacques. *Probleme de Cauchy et les Equations aux Derivees Partielles Lineaires Hyperboliques*. Paris: Hermann, 1932. 560 p. ISBN 978-2-87647-300-3.
49. HARTMANN, Friedel. *Introduction to Boundary Elements*. Berlin: Springer-Verlag, 1989. ISBN 978-3-642-48873-3.
50. HARTRANFT, R. J., SIH, G. S. Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks. In: *Journal of Mathematics Physics*. 1968, vol. 47, pp 276-291. ISSN 0022-2526.
51. HENCKY, Heinrich. *Der spanngszustand in rechteckigen platten*. München: R. Oldenbourg, 1913. 94 p.
52. HUBER, M. T. *Probleme der Static Techish Wichtiger Orthotroper Platten*. Warsawa: Nakkadem Akadenji Nauk Technicznych, 1929.
53. IOAKIMIDIS, N. I. A natural approach to the introduction of finite part integrals into crack problems of three-dimensional elasticity. In: *Engineering Fracture Mechanics*. 1982, vol. 16, nr. 5, pp 669-673. ISSN 0013-7944.
54. IOAKIMIDIS, N. I. A new integral equation for the classical crack problem in plane and antiplane elastisity. In: *International Journal of Fracture*. 1983, vol. 21, nr. 2, pp 115-122. ISSN 0376-9429.

55. IOAKIMIDIS, N. I. Application of finite-part integrals to the singular equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity. In: *Acta Mechanica*. 1982, vol. 45, nr. 1-2, pp 31-47. ISSN 0001-5970.
56. JASWON, M. A. Integral equation methods in potential theory. I. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1963, vol. 275, nr. 1360, pp 23-32. ISSN 0080-4630.
57. JASWON, M. A., MAITI, M. An integral equations formulation of plate bending problems. In: *Journal of Engineering Mathematics*. 1968, vol. 2, nr. 1, pp 83-93. ISSN 0022-0833.
58. JASWON, M. A., PONTER, A. R. An integral equation solution of the torsion problem. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. 1963. vol. 273, nr. 1353, pp 237. ISSN 0080-4630.
59. KARAMI, G., DERA KHSHAN, D. An Efficient Method To Evaluate Hypersingular and supersingular Integrals in Boundary Integral Equations Analysis. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 1999, vol. 23, nr. 4, pp 317-326. ISSN: 0955-7997.
60. KARMAN, Theodore von. Fesigkeitsprobleme in Maschinenbau. In: *Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften*. 1910, vol. 4, pp 311-385.
61. KATSIKADELIS, John T. *Boundary Elements. Theory and Applications*. London: Elsevier, 2002. ISBN 0080441076.
62. KATSIKADELIS, John T. *The Boundary Element Method for Plate Analysis*. New York: Elsevier, 2014. ISBN 978-0-12-416739-1.
63. KATSIKADELIS, JOHN T., ARMENAKAS, A. E. A new boundary equation solution to the plate problem. In: *Journal of Applied Mechanics*. 1989, vol. 56, nr. 2, pp 364-374. ISSN: 0021-8936.
64. KATSIKADELIS, JOHN T., ARMENAKAS, A. E. Plates on elastic foundation by BIE method. In: *Journal of Engineering Mechanics*. 1984, vol. 110, nr. 7, pp 1085-1105. ISSN 0733-9399.
65. KAYA, A. C., ERDOGAN, F. On the solutions of integral equations with strongly singular kernels. In: *Quarterly of Applied Mathematics*. 1987, vol. 45, nr. 3, pp 105-122. ISSN 0033-569X.
66. KEER, L. M. Mixed boundary value problems for a penny-shaped cut. In: *Journal of Elasticity*. 1975, vol. 5, nr. 2, pp 89-98. ISSN 0374-3535.
67. KEER, L. M., PARIHAR, K. S. A note of the singularity at the corner of a wedge-shaped punch or crack. In: *SIAM on Applied Mathematics*. 1978, vol. 34, nr. 2, pp 297-302. ISSN 0036-1399.

68. KELVIN, L., TAIT, P. G. *Treatise on Natural Philosophy*, vol. 1. Oxford: Clarendon Press, 1883.
69. KIRCHHOFF, Gustav. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1850, vol. 40, pp 51-88. ISSN 0075-4102.
70. KIRCHHOFF, Gustav. *Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik*. Leipzig: Teubner, 1876.
71. KRYLOV, A. N. On stresses experienced by a ship in a sea way. In: *Trans. Inst. Naval Architects*. 1898, vol. 40, pp 197 - 209.
72. KUTT, H. R. The numerical evaluation of principal values integrals by finite-part integration. In: *Numerische Mathematik*. 1975, vol. 24, nr. 3, pp 205-210. ISSN 0029-599X.
73. LAGRANGE, J. L. Note Communiquée aux Commissaires pour le Prix de la Surface Elastique. In: *Annales de Chimie*, vol. 39 (1828), pp 149 -207.
74. LAZĂR, Ioan. *Metoda elementelor de frontieră în inginerie*. Cluj-Napoca: Presa Universitară Clujeană, 1997. 263 p. ISBN 973-9354-12-2.
75. LEFEBER, D. *Solving Problems with Singularities Using Boundary Elements*. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1989. ISBN 0905451961.
76. LEVY, M. Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes. In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1899. vol 3 (1877), nr. 3, p. 219.
77. LIFANOV, I. K., POLTAVSKII, L. N., VAINIKKO, G. M. *Hypersingular Integral Equations and their application*. London, New York, Washington: CRC Press, 2003. 416 p. ISBN 978-0415309981.
78. LIFANOV, I. *Singular Integral Equations and Discrete Vortices*. Amsterdam: De Gruyter, 1996. 485 p. ISBN 906764207X.
79. LINKOV, A. M. *Boundary Integral Equations in Elasticity Theory*. Berlin: Springer, 2002. 288 p. ISBN 978-94-015-9914-6.
80. LOVE, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1892.
81. LOWENGRUB, M., SRIVASTAV, R. P. Effect of rigid inclusions in Griffith cracks. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1970, vol. 18, nr. 4, pp 887-893. ISSN 0036-1399.
82. LUKASIEWICZ, S. *Local Loads in Plates and Shells*. Dordrecht: Springer, 1979. 588 p. ISBN 978-94-009-9543-7.

83. MARTIN, P. A., Rizzo, F. J. Hypersingular integrals: how smooth must the density be? In: *International Journal for Numerical Methods Engineering*. 1996, vol. 39, nr. 4, pp 687-704. ISSN 0029-5981.
84. MELNICOV, Yu. A. *Influence Functions and Matrices*. New York, Bazel: Marcell Dekker, 1998. 488 p. ISBN 9780824719418.
85. MELNIKOV, Yu., SHEREMET, V. D. Some New results on the Sending of a Circular Plate Subject to a Transverse Point Force. In: *Journal of Mathematics and Mechanics of Solids*. 2001, vol. 6, nr. 1, pp 29-45. ISSN 1741-3028.
86. MIDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. In: *Journal of Applied Mechanics*. 1951, vol. 18, nr. 1, pp 31-38. ISSN 0021-8936.
87. MORARU, Gheorghe, MURSA, Condrat. *Teoria Elasticității*. Chișinău: Tehnica-Info, 2006. 396 p. ISBN 978-9975-63-020-7.
88. MORARU, Gheorghe. BEM based on discontinuous solutions in the theory of Kirchhoff plates on an elastic foundation. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2006, vol. 30, nr. 5, pp 382-390. ISSN 0955-7997.
89. MORARU, Gheorghe. *Discontinuous solutions in the statics of deformable bodies*. Chisinau: Tehnica-Info, 2015. 398 p. ISBN 978-9775-63-376-5.
90. MORARU, Gheorghe. *Introducere în metoda elementelor finite și de frontieră*. Chișinău: Secția de Redactare, Editare și Multiplicare a U.T.M., 2002. 176 p.
91. MORARU, Gherghe. Construcția soluțiilor discontinue în coordonate polare. In: *Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, Seria Matematica*. 1991, vol. 24, nr. 2, pp 18-25. ISSN 0236-3089.
92. MOSHAIIOV, A., VORUS, W. S. Elasto-plastic bending analysis by a Boundary Element Method with initial plastic moments. In: *International Journal of Solids and Structures*. 1986, vol. 22, nr. 11, pp 1213-1229. ISSN 0020-7683.
93. MUKHERJEE, S. CPV and HFP integrals and their applications in the boundary element method. In: *International Journal of Solids and Structures*. 2000, vol. 37, nr. 45, pp 6623-6634. ISSN 0020-7683.
94. MUKHERJEE, S. Finite parts of singular and hypersingular integrals with irregular boundary source points. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2000, vol. 24, nr. 10, pp 767-776. ISSN 0955-7997.
95. MUSKHELISHVILI, N. I. *Singular Integral Equations: Boundary Problems of Function Theory and Their Applications to Mathematical Physics*. New York: Dover Publications, 2011. 464 p. ISBN 978-0486668932.

96. MUSKHELISHVILI, N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Berlin: Springer, 1977. 763 p. ISBN 978-9001607012.
97. NADAI, A. *Die elastischen platen*. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1925. ISBN 978-3-642-98358-0.
98. NAVIER, C. L. M. H. Extrait des recherches sur la flexion des planes élastiques. In: *Bulletin des Sciences de la Societe Philomathique de Paris*. 1823, vol. 10, nr. 1, pp 92-102.
99. PARIHAR, K. S., KEER, L. M. Stress singularity at the corner of a wedged shaped crack or inclusion. In: *Journal of Applied Mechanics*. 1978, vol. 45, nr. 4, pp 791-796. ISSN 0021-8936.
100. POISSON, S. D. Memoire sur l'équilibre et le mouvement des corps elastique. In: *Mémoires de l'Académie Royal des Sciences de l'Institut de France*. 1829, vol. 8, pp 357-570.
101. POLYANIN, A. D., MANZHIROV, A. V. *Handbook of Integral Equations*. New York: CRC Press, 1998. ISBN 0-8493-2876-4.
102. POZRIKIDIS, C. *A Practical Guide to Boundary Element Methods with the Software Library BEMLIB*. Boca Raton: CRC Press, 2002. 440 p. ISBN 9780429139628.
103. RASHED, Y. F., ALIABADI, M. H., BREBBIA, C. A. Hypersingular boundary element formulation for Reissner plates. In: *International Journal of Solids and Structures*. 1998, vol. 35, nr. 18, pp 2229-2249. ISSN 0020-7683.
104. REISSNER, Eric. On bending of elastic plates. In: *Quarterly of Applied Mathematics*. 1947, vol. 5, nr. 1, pp 55-68. ISSN 0033569X.
105. REISSNER, Eric. On the theory of bending of elastic plates. In: *Journal of Mathematics and Physics*. 1944, vol. 23, nr. 1-4, pp 184-191. ISSN 1467-9590.
106. REISSNER, Eric. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. In: *Journal of Applied Mechanics*. 1945, vol. 12, nr. 2, pp A69-A77. ISSN 0021-8936.
107. RICCARDELLA, P. C. *An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elasto-plasticity*. tz. de doct. filos. Pittsburgh, 1973.
108. RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problem of classical elastostatics. In: *Quarterly of Applied Mathematics*. 1967, vol. 25, nr. 1, pp 83-95. ISSN 0033569X.
109. RIZZO, F. J., SHIPPY, D. J. A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies. In: *Journal of Composite Materials*. 1970, vol. 4, nr. 1, pp 36-61. ISSN 0021-998.
110. RUDOLPHI, T. J. The use of simple solutions in the regularization of hypersingular boundary integral equations. In: *Mathematical and Computer Modeling*. 1991, vol. 15, nr. 3-5, pp 269-278. ISSN 0895-7177.

111. SHEREMET, Victor. *Handbook of Greens Functions and Matrices*. Southampton: WIT Press. ISBN 978-1-85312-933-9.
112. SLADEK, V., SLADEK, J. Regularization of Hypersingular Integrals in BEM Formulation Using Various Kinds of Continuous Elements. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 1996, vol. 17, nr. 1, pp 5-18. ISSN 0955-7997.
113. SLADEK, V., SLADEK, J. Singular integrals and boundary elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1998, vol. 157, nr. 3-4, pp 251-266. ISSN 0045-7825.
114. SLADEK, V., SLADEK, J. *Singulars Integrals in Boundary Element Method. Advances in Boundary Elements Methods, vol. 3*, Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998. 448 p. ISBN 978-18533125331.
115. SLADEK, V., SLADEK, J., TANAKA, M. Numerical integration of logarithmic and nearly logarithmic singularity in BEMs. In: *Applied Mathematical Modelling*. 2001, vol. 25, nr. 11, pp 901-922. ISSN: 0307-904X.
116. SLADEK, V., SLADEK, J., TANAKA, M. Regularization of hypersingular and nearly singular integrals in the potential theory and elasticity. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993, vol. 36, nr. 10, pp 1609-1628. ISSN 1097-0207.
117. SNEDDON, I. N. *Fourier Transforms*. New, York: Dover Publications, 2010. 560 p. ISBN 978-0486685229.
118. SNEDDON, I. N., LOWENGRUB, M. *Cracks problems in the classical theory of elasticity*. New York: John Wiley & Sons, 1969. ISBN 0471808458.
119. STAKGOLD, I. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley & Sons. 720 p. ISBN 978-0471610229.
120. STERN, M. A. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. In: *International Journal of Solids and Structures*. 1979, vol. 15, nr. 10, pp 769-782. ISSN 0020-7683.
121. SYMM, G. T. Integral equation methods in potential theory II." In: *Proceedings of the Royal Society Series A*. 1963, vol. 275, nr. 1360, pp 33-46. ISSN 2053-9169.
122. TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw Hill Book Company, 1970. 608 p. ISBN 978-0070642706.
123. TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells, 2nd ed.* New York: McGraw Hill Book Company, 1959. 580 p. ISBN 0-07-064779-8.
124. TRANTER, C. J. *Integral Transforms in Mathematical Physics*. London: Chapman and Hall, 1966. 139 p. ISBN 0412208601.

125. VASILIEV, V. V. Modern conceptions of plate theory. In: *Composite Structures*. 2000, vol. 48, nr. 1-3, pp 39-48. ISSN 0263-8223.
126. VENTSEL, Eduard, KRAUTHAMMER, Theodor. *Thin Plates and Shells. Theory, Analysis and Applications*. New York: Marcel Dekker Inc., 2001. 688 p. ISBN 0-8247-0575-0.
127. VENTSEL, Eduard. An indirect boundary element method for plate bending analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997, vol. 40, nr. 9, pp 1597-1610. ISSN 1097-0207.
128. WATSON, G. N. *A treatise on the theory of Bessel Functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1966. 804 p. ISBN 0521093821.
129. WATSON, J. O. Boundary Elements from 1960 to the Present Day. In: *Electronic Journal of Boundary Elements*. 2003, vol. 1, nr. 1, pp 34-46. ISSN 1542-3891.
130. WEN, P. H. *Dynamic Fracture Mechanics: Displacement Discontinuity Method*. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1996. 224 p. ISBN 978-1853124464.
131. WEN, P. H., ALIABADI, M. H., SLADEK, J, SLADEK, V. Displacement discontinuity method for cracked orthotropic strip: Dynamic. In: *Wave Motion*. 2008, vol. 45, nr. 3, pp 293-308. ISSN 0165-2125.
132. WEN, P. H., ALIABADI, M. H., ZHANG, J. Z. Displacement discontinuity method for fracture mechanics analysis of Reissner plates: static and dynamic. In: *International Journal of Fracture*. 2005, vol. 135, nr. 1-4, pp 95-116. ISSN 0376-9429.
133. WILLIAMS, M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. In: *Journal of Applied Mechanics*. 1952, vol. 19, nr. 4, pp 526-528. ISSN 0021-8936.
134. WILSON, H. B., TURCOTTE, L. H., HALPERN, D. *Advanced Mathematics and Mechanics Applications Using Matlab. 3rd ed.* New York: Chapman & Hall/CRC, 2003. 696 p. ISBN 1-58488-262-X.
135. ZEHNDER, A. T., VIZ, M. J. Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending and twisting loads. In: *Applied Mechanics Reviews*. 2005, vol. 58, nr. 1, pp 37-48. ISSN 0003-6900.
136. ZIENKIEWICZ, O. C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. London: McGraw-Hill, 1971. 521 p. ISBN 978-0070941380.
137. БУБНОВ, Иван. Г. *Строительная механика корабля. Часть 1*. С. Петербург: Тип. Морского министерства, 1914.
138. БУБНОВ, Иван. Г. *Строительная механика корабля. Часть 2*. С. Петербург: Тип. Морского министерства, 1914.

139. ВОЛЬМИР, А. С. *Гибкие пластинки и оболочки*. Москва: Гос. Изд. Техн.-Теорет. Лит., 1956. 419 с.
140. ГАЛЕРКИН, Б. Г. *Упругие тонкие плиты*. Ленинград: Госстройиздат, 1933. 364 с.
141. ГАХОВ, Ф. Д. *Краевые задачи*. Москва: Наука, 1977. 640 с.
142. КОНЧКОВСКИЙ, З. *Плиты: Статические расчеты*. Москва: Стройиздат, 1984. 480 с.
143. КОРЕНЕВ, Б. Г. *Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях*. Москва: Физматгиз, 1960. 459 с.
144. КРЫЛОВ В. И., ШУЛЬГИНА Л. Т. *Справочная книга по численному интегрированию*. Москва: Наука, 1966. 372 с.
145. КУПРАДЗЕ, В. Д. *Методы Потенциала в Теории Упругости*. Москва: Физматгиз, 1963. 472 с.
146. ЛЕХНИЦКИЙ, С. Г. *Теория упругости анизотропного тела*. Москва: Наука, 1977. 416 с.
147. ЛУЖИН, О. В. Статический и динамический расчет балок, плит и оболочек приемом „расширения” заданной системы. В: *Исследования по теории сооружений*. 1964, вып. XIII. 1964. с. 63-76.
148. МОРАРЬ, Георге. А. *Метод разрывных решений в механике деформируемых тел*. Кишинев: Штиинца, 1990. 130 с. ISBN: 5376006387.
149. МОРАРЬ, Георге. А. Метод разрывных решений в плоской теории упругости для периодического случая. Случай параллельных дефектов. В: *Серия Математика*. 1999, том 31, с. 75-79.
150. МОРАРЬ, Георге. А. Метод разрывных решений в теории пластин Тимошенко. В: *Сер. Механика Твердого Тела*. 1989, том 2, с. 171-178.
151. МОРАРЬ, Георге. А. Метод разрывных решений в теории пластин. В: *Математические Исследования*. 1989, том 108, с. 56-62.
152. НОВАЦКИЙ, В. *Теория упругости*. Москва: Мир, 1975.
153. НОВОЖИЛОВ, В. В. *Теория упругости*. Ленинград: Судпромгиз, 1958.
154. ОНИЩУК, О. В., ПОПОВ, Г. Я. О некоторых проблемах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями. В: *Сер. Механика Твердого Тела*. 1980, том 4, с. 141-150.
155. ПАНОВ, Д. Ю., О больших прогибах круглых пластин. В: *Прикл. Матем. Мех.* 1941, том 5, № 2, с. 45-56.
156. ПОПОВ, Г. Я. *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений*. Москва: Наука, 1982. 342 с.

157. ПРУДНИКОВ, А. П., БРЫЧКОВ, Ю. А., МАРИЧЕВ, О. И. *Интегралы и ряды: Элементарные функции, том 1*. Москва: Наука, 1983. 632 с. ISBN 5-9221-0323-7.
158. УФЛЯНД, Я. С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. Ленинград: Наука, 1968. 402 с.

ANEXE

Anexa 1. Transformarea Fourier generalizată

Transformarea Fourier pentru funcția $f(x)$ definită pe intervalul $(-\infty, \infty)$ reprezintă integrala:

$$\bar{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (\text{A.1.1.})$$

unde α este un număr real arbitrar.

Integrala (A.1.1.) există dacă funcția $f(x)$ este continuă pe intervale arbitrare finite și satisface condițiile Dirichlet. În puncte continue formula de inversare capătă forma:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (\text{A.1.2.})$$

În punctele în care funcția $f(x)$ are salt, partea din stângă a relației (A.1.2.) capătă forma:

$$\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$$

Corelația dintre transformarea Fourier și derivatele funcției $f(x)$ are forma:

$$\left\langle \frac{\partial^k f(0)}{\partial x^k} \right\rangle = \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \Big|_{x=-0} - \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \Big|_{x=+0}. \quad (\text{A.1.3.})$$

Integrând pe părți obținem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(x)}{dx^n} e^{-i\alpha x} d\alpha = \sum_{k=1}^n (-i\alpha)^k \left\langle \frac{d^{n-k} f(x)}{dx^{n-k}} \right\rangle + (-i\alpha)^n \bar{f}(\alpha). \quad (\text{A.1.4.})$$

În particular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} e^{-i\alpha x} d\alpha = \left\langle \frac{df(0)}{dx} \right\rangle - i\alpha \bar{f}(\alpha). \quad (\text{A.1.5.})$$

Formula (A.1.5) reprezintă soluția pentru un caz particular cu o singură variabilă. De

exemplu, în caz bidimensional funcția $f(x, y)$ care are discontinuitate pe linia L poate fi calculată cu formulele:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right\}_C + n_x \delta_L[f]; \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\}_C + n_y \delta_L[f],\end{aligned}\tag{A.1.6.}$$

unde n_x și n_y reprezintă cosinusurile directorii ale normalei n la linia L , δ_L reprezintă funcția bidimensională Dirac (v. Anexa 3.) definită pe linia L .

Transformarea Fourier pentru cazul bidimensional:

$$\tilde{f}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy,\tag{A.1.7.}$$

unde α și β reprezintă parametrii transformării Fourier.

Transformarea Fourier a derivatelor conform relației (A.1.6.) capătă forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}(x, y)}{\partial x} &= (-i\alpha) \tilde{f} + \int_L n_x (f)^{i(\alpha x + \beta y)} dL; \\ \frac{\partial \tilde{f}(x, y)}{\partial y} &= (-i\beta) \tilde{f} + \int_L n_y (f)^{i(\alpha x + \beta y)} dL.\end{aligned}\tag{A.1.8.}$$

Anexa 2. Soluții discontinue pentru ecuația Laplace

Se studiază ecuația Laplace în două dimensiuni. Salturile funcției și derivatei vor fi notate în felul următor:

$$\begin{aligned}\langle w(y) \rangle &= w(-0, y) - w(+0, y); \\ \left\langle \frac{\partial w(y)}{\partial x} \right\rangle &= \left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right|_{x=-0} - \left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right|_{x=+0}\end{aligned}\quad (\text{A.2.1.})$$

Pentru a obține soluția ecuației Laplace cu salturile $\langle w(y) \rangle$ și $\langle \partial w(y)/\partial x \rangle$ pe linia $x=0$ se va folosi schema generalizată a transformării Fourier (v. Anexa 1.).

Întrucât ecuația lui Laplace:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{A.2.2.})$$

cu $e^{i\alpha x}$, unde α este parametrul transformării, integrând pe părți în raport cu x și păstrând salturile $\langle w(y) \rangle$ și $\langle \partial w(y)/\partial x \rangle$ obținem:

$$(-i\alpha)^2 \bar{w}(\alpha, y) + \frac{d^2 \bar{w}(\alpha, y)}{dy^2} = i\alpha \langle w(y) \rangle - \left\langle \frac{\partial w(y)}{\partial x} \right\rangle \quad (\text{A.2.3.})$$

Se menționează că în partea dreaptă au apărut salturile funcției w și derivatei $\partial w/\partial x$, pentru $x = 0$.

Se va considera un caz particular, când funcția $w(x, y)$ are salt concentrat în punctul $y = 0$, iar derivata ei este continuă:

$$\langle w(y) \rangle = \delta(y); \quad \left\langle \frac{\partial w(y)}{\partial x} \right\rangle = 0 \quad (\text{A.2.4.})$$

relația (A.2.3.) capătă forma:

$$\frac{d^2 \bar{w}(\alpha, y)}{dy^2} - \alpha^2 \bar{w}(\alpha, y) = i\alpha \delta(y) \quad (\text{A.2.5.})$$

Ultima ecuație are coeficienții constanți de o singură variabilă y . Pentru a rezolva această ecuație se va folosi transformarea Fourier în raport cu variabila y și parametrul β . Înmulțind

ecuația (A.2.5.) cu $e^{-i\beta y}$ și integrând în intervalul $(-\infty, +\infty)$ obținem:

$$\left[-\alpha^2 + (-i\beta)^2\right] \bar{w}(\alpha, \beta) = i\alpha \quad (\text{A.2.6.})$$

Din relația (A.2.6.) se determină \bar{w} . Folosind formula de restabilire a funcției w cunoscând transformata $\bar{w}(\alpha, \beta)$ se obține:

$$w(x, y) = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (\text{A.2.7.})$$

Dacă în intervalul $|y| \leq a$ au loc salturile funcției și derivatei prin superpoziție se obține:

$$w(x, y) = -\frac{x}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\langle w(\eta) \rangle d\eta}{x^2 + (y - \eta)^2} - \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \ln \left[x^2 + (y - \eta)^2 \right] \left\langle \frac{\partial w(\eta)}{\partial x} \right\rangle d\eta + const. \quad (\text{A.2.8.})$$

Soluția (A.2.8.) oferă posibilitatea pentru a rezolva probleme când pe linia $x=0$ funcția sau derivata ei are salt. În același timp, ea poate fi folosită pentru a rezolva și probleme de limită pentru regiuni finite. În aceste cazuri frontiera se va considera ca defect. La apropierea de frontieră din interiorul regiunii saltul funcției sau derivatei se va considera egal cu valorile funcției sau derivatei respective. La apropierea de frontieră din interiorul regiunii studiate funcția sau derivata ei se vor considera nule.

Se va considera o regiune arbitrară G mărginită de conturul $L = L_1 \cup L_2$

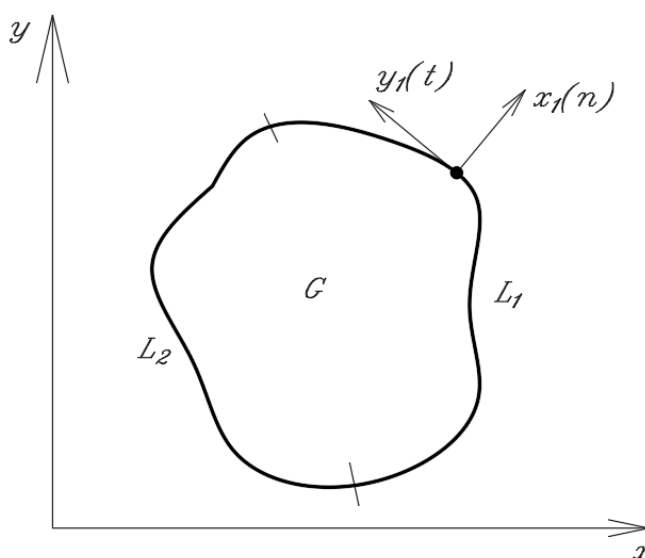


Fig. A.2.1. Regiune de contur arbitrar amplasată într-un plan infinit.

Regiunea G se va amplasa într-un plan infinit. Pe conturul L se va introduce un sistem local de coordonate (x_l, y_l) . În acest caz soluția provenită din saltul funcției w și derivatei $\partial w / \partial x_l$ se va determina cu ajutorul expresiei A.2.8. în care coordonatele (x, y) se vor înlocui cu (x_l, y_l) :

$$w(x_l, y_l) = -\frac{x_l}{2\pi} \int_L \frac{\langle w(\eta) \rangle dS}{x_l^2 + (y_l - \eta)^2} - \frac{1}{4\pi} \int_L \ln [x_l^2 + (y_l - \eta)^2] \left\langle \frac{\partial w(\eta)}{\partial x_l} \right\rangle dS + const. \quad (\text{A.2.9.})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \ln [x_l^2 + y_l^2] = \frac{2x_l}{x_l^2 + y_l^2}$$

$$w(x_l, y_l) = -\frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial x_l} \ln r \langle w(\eta) \rangle dS - \int_L \frac{1}{4\pi} \ln r \left\langle \frac{\partial w}{\partial x_l} \right\rangle dS \quad (\text{A.2.10.})$$

Dacă x_l coincide cu normala n atunci:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial n} \text{ și } \left\langle \frac{\partial w}{\partial x_l} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial w}{\partial n} \right\rangle,$$

iar formularea devine clasică în coordonate globale:

$$w(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial n} \ln r \langle w \rangle dS - \frac{1}{4\pi} \int_L \ln r \left\langle \frac{\partial w}{\partial n} \right\rangle dS. \quad (\text{A.2.11.})$$

Anexa 3. Program la calculator

În baza soluțiilor prezentate în capitolele anterioare, a fost elaborat un program de calcul în limbajul Matlab pentru placa simplu rezemată încărcată cu o forță concentrată. Pentru aproximarea integralelor curbilini s-au folosit elemente constante.

Structura programului este prezentată în Fig. A.3.1. El este alcătuit din programul principal **DISSOL** care conține datele de intrare și de ieșire, formează matricea A și vectorul B , rezolvă sistemul de ecuații liniare 3.1.25., calculează deplasarea și eforturile în nodurile interioare ale plăcii cu relațiile 3.1.26. - 3.1.29., și face chemare la următoarele subprograme:

COSDIR – calculează cosinusurile directe ale elementelor și efectuează trecerea de la coordonatele globale la cele locale în baza relațiilor din punctul 3.1.5;

AIJ, BIJ, ... , KIJ – calculează termenii matricei globale în baza relațiilor 3.1.22.

WNIF, TETANIF, MNIF și VNIF – calculează termenii vectorului B în baza relațiilor 3.1.20.

I1, I2, ... , I29 – efectuează calculul integralelor pe lungimea elementului.

Variabilele și masivele folosite în program sunt prezentate mai jos:

NN – numărul de noduri pe frontieră;

NI – numărul de noduri interioare;

NE – numărul de elemente pe frontieră;

ELR – numerele de ordine a elementelor încastrate;

ELS – numerele de ordine a elementelor simplu rezemate;

ELL – numerele de ordine a elementelor libere;

X, Y – vectorul ce conține coordonatele globale ale nodurilor elementelor de pe frontieră;

XIN, YIN – vectorul ce conține coordonatele globale ale nodurilor interioare;

XM, YM – vectorul ce conține coordonatele globale în centrul elementelor de pe frontieră;

XL, YL – coordonatele nodului în centrul elementului i în sistemul de coordonate local legat cu centrul elementului j ;

XINL, YINL – coordonatele nodului interior în sistemul de coordonate local legat cu centrul elementului de pe frontieră ;

GNU – coeficientul lui Poisson;

D – rigiditatea cilindrică a plăcii;

E – modulul de elasticitate a materialului;

AL – lungimea elementului;

ANX, ANY – cosinusurile directe, respectiv sinusurile directe ale elementelor de pe frontieră calculate în baza relațiilor 3.1.41;

C, S – cosinusurile, respectiv sinusurile unghiului γ dintre normale n_i și n_j (3.1.42.);
 A – matricea sistemului de dimensiune $2NE \times 2NE$ ce conține coeficienții a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} și d_{ij} ;
 B – vectorul din partea dreaptă a sistemului;
 XX – vectorul ce conține necunoscutele (salturile);
 sQ – vectorul ce conține salturile forței transversale $\langle V_n \rangle$;
 $sTETA$ – vectorul ce conține salturile unghiului de rotire $\langle \theta_n \rangle$

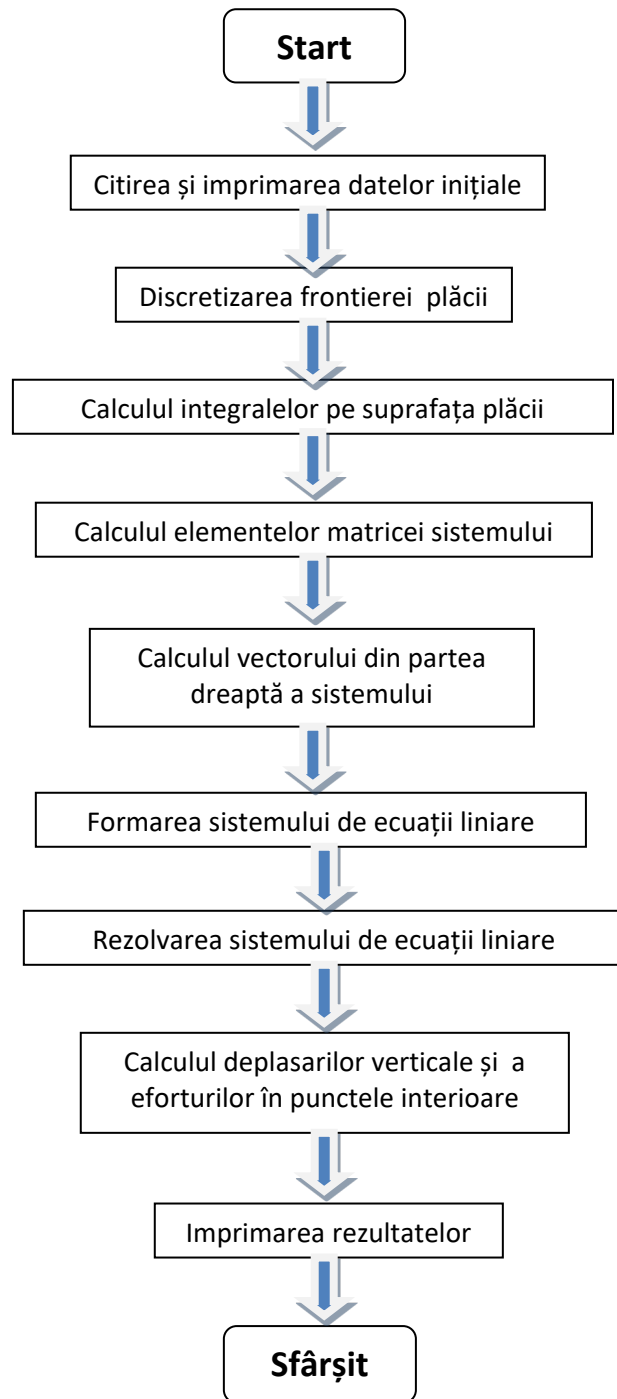


Fig. A.3.1. Schema-bloc a programului.

În continuare este prezentat textul programului în limbajul de programare Matlab:

DISSOL

```
clear all
format long
NN=input('Numarul de noduri. NN=');
NE=input('Numarul de elemente. NE=');
GNU=input('Coeficientul lui Poisson. GNU=');
E=input('Modulul de elasticitate a materialului placii [Pa]. E=');
h=input('Grosimea placii [m]. h=');
F=input('Forta concentrata in originea sistemului de coordonate [N]. F=');
CSI=input('Dist. pe X de la orig. sist. gl. de coord. pina la forta [m]. CSI=');
ETA=input('Dist. pe Y de la orig. sist. gl. de coord. pina la forta [m]. ETA=');
%Calculul rigiditatii cilindrice a placii 'D'
D=E*h^3/12/(1-GNU^2);
%Introducerea coordonatelor nodurilor de pe frontiera.
disp('Coordonatele nodurilor de pe frontiera')
for I=1:NN
    X(I)=input(' X=');
    Y(I)=input(' Y=');
    disp(sprintf('i=%g X=%f Y=%f',I,X(I),Y(I)))
end
% Determinarea coordonatelor in centrul elementelor
for I=(1:NE);
    XM(I)=(X(I)+X(I+1))/2;
    YM(I)=(Y(I)+Y(I+1))/2;
end
% Introducerea conditiilor de frontiera
ELS=input('Indicele elementului simplu rezemat [se introduce in paranteza patrata]. ELS=');
ELR=input('Indicele elementului incastrat [se introduce in paranteza patrata]. ELR=');
ELL=input('Indicele elementului liber [se introduce in paranteza patrata]. ELL=');
for I=(1:NE);
for J=(1:NE);
% Determinam cosinusurile directe ale elementelor
[AL,C,S,XL,YL,r1]=cosdir(I,J,X,Y,XM,YM);
%Determinarea functiilor de integrare I1...I20
AI1=I1(J,r1,AL,XL,YL);
AI2=I2(J,r1,AL,XL,YL);
AI3=I3(J,r1,AL,XL,YL);
AI4=I4(J,r1,AL,XL,YL);
AI5=I5(J,r1,AL,XL,YL);
AI6=I6(J,r1,AL,XL,YL);
AI7=I7(J,r1,AL,XL,YL);
AI8=I8(J,r1,AL,XL,YL);
AI9=I9(J,r1,AL,XL,YL);
AI10=I10(J,r1,AL,XL,YL);
AI11=I11(J,r1,AL,XL,YL);
AI12=I12(J,r1,AL,XL,YL);
AI13=I13(J,r1,AL,XL,YL);
AI14=I14(J,r1,AL,XL,YL);
AI15=I15(J,r1,AL,XL,YL);
AI16=I16(J,AL,YL);
AI17=I17(J,r1,AL,XL,YL);
AI18=I18(J,r1,AL,XL,YL);
AI19=I19(J,r1,AL,XL,YL);
AI20=I20(J,r1,AL,XL,YL);
```

```

AI21=I21(J,r1,AL,XL,YL);
AI22=I22(J,r1,AL,XL,YL);
AI23=I23(J,r1,AL,XL,YL);
AI24=I24(J,r1,AL,XL,YL);
AI25=I25(J,r1,AL,XL,YL);
AI26=I26(J,r1,AL,XL,YL);
AI27=I27(J,r1,AL,XL,YL);
AI28=I28(J,r1,AL,XL,YL);
AI29=I29(J,r1,AL,XL,YL);
% CALCULUL ELEMENTELOR MATRICEI GLOBALE "A"
SS(I,J)=SIJ(I,J,GNU,XL,AI11,AI13);
CC(I,J)=CIJ(I,J,GNU,XL,AL,AI1,AI2);
GG(I,J)=GIJ(I,J,D,XL,AI1);
DD(I,J)=DIJ(I,J,D,AL,AI14);
VV(I,J)=VIJ(GNU,XL,C,S,AI4,AI5,AI6,AI7,AI8);
TT(I,J)=TIJ(I,J,GNU,XL,C,S,AI11,AI12,AI13,AI10);
EE(I,J)=EIJ(I,J,D,XL,AL,C,S,AI1,AI2,AI3);
FF(I,J)=FIJ(I,J,D,XL,AL,C,S,AI1,AI15,AI16);
MM(I,J)=MIJ(I,J,GNU,D,XL,C,S,AI17,AI18,AI19,AI20,AI21,AI22);
AA(I,J)=AIJ(I,J,GNU,D,XL,AL,C,S,AI4,AI5,AI6,AI7,AI8);
RR(I,J)=RIJ(I,J,D,GNU,XL,C,S,AI11,AI12,AI13,AI10);
BB(I,J)=BIJ(I,J,D,GNU,XL,AL,C,S,AI1,AI2,AI9,AI3);
OO(I,J)=OIJ(D,GNU,XL,C,S,AI23,AI24,AI25,AI26,AI27,AI28,AI29);
PP(I,J)=PIJ(D,GNU,XL,C,S,AI17,AI18,AI19,AI20,AI21,AI22);
UU(I,J)=UIJ(D,GNU,XL,C,S,AI4,AI5,AI6,AI7,AI8);
KK(I,J)=KIJ(D,GNU,XL,C,S,AI10,AI11,AI12,AI13);
end
end
% FORMAREA MATRICEI GLOBALE "A"
SSS=SS([ELS ELR],ELL);
CCC=CC([ELS ELR],[ELS ELL]);
GGG=GG([ELS ELR],ELR);
DDD=DD([ELS ELR],[ELS ELR]);
VVV=VV(ELR,ELL);
TTT=TT(ELR,[ELS ELL]);
EEE=EE(ELR,ELR);
FFF=FF(ELR,[ELS ELR]);
MMM=MM([ELS ELL],ELL);
AAA=AA([ELS ELL],[ELS ELL]);
RRR=RR([ELS ELL],ELR);
BBB=BB([ELS ELL],[ELS ELR]);
OOO=OO(ELL,ELL);
PPP=PP(ELL,[ELS ELL]);
UUU=UU(ELL,ELR);
KKK=KK(ELL,[ELS ELR]);
Msist=[SSS CCC GGG DDD; VVV TTT EEE FFF; MMM AAA RRR BBB; OOO PPP UUU KKK];
% CALCULUL ELEM. VECTORULUI DIN PARTEA DREAPTA A SISTEMULUI "B"
for I=(1:NE)
    L(I)=-Wnif(I,XM,YM,F,D,CSI,ETA);
    M(I)=-TETAnif(I,X,Y,XM,YM,D,F,CSI,ETA);
    N(I)=-Mnif(I,X,Y,XM,YM,GNU,F,CSI,ETA);
    Q(I)=-Vnif(I,X,Y,XM,YM,GNU,F,CSI,ETA);
end
% FORMAREA VECTORULUI DIN PARTEA DREAPTA A SISTEMULUI "B"
LL=L([ELS ELR]);
MM=M(ELR);
NN=N([ELS ELL]);
QQ=Q(ELL);

```



```
Vsist=[LL MM NN QQ];
% REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUATII
XX=inv(Msist)*Vsist';
```

```

    NI=input('Numarul de noduri interioare. NI=');
% Introducerea coordonatelor nodurilor interioare
disp('Coordonatele nodurilor interioare')
for K=1:NI
    XIN(K)=input(' XIN=');
    YIN(K)=input(' YIN=');
    disp(sprintf('i=%g XIN=%f YIN=%f',I,XIN(K),YIN(K)))
end
for K=(1:NI)
    for J=(1:NE)
% Calculul cosinusurilor directe ale elementului "j"
AX(J)=X(J+1)-X(J);
AY(J)=Y(J+1)-Y(J);
AL(J)=sqrt(AX(J)^2+AY(J)^2);
ANX(J)=AY(J)/AL(J);
ANY(J)=-AX(J)/AL(J);
XL=(XIN(K)-XM(J))*ANX(J)+(YIN(K)-YM(J))*ANY(J);
YL=-(XIN(K)-XM(J))*ANY(J)+(YIN(K)-YM(J))*ANX(J);
r1=sqrt(XL^2+YL^2);
%Determinarea functiilor de integrare I1...I29
AI1=I1(J,r1,AL,XL,YL);
AI2=I2(J,r1,AL,XL,YL);
AI3=I3(J,r1,AL,XL,YL);
AI4=I4(J,r1,AL,XL,YL);
AI5=I5(J,r1,AL,XL,YL);
AI6=I6(J,r1,AL,XL,YL);
AI7=I7(J,r1,AL,XL,YL);
AI8=I8(J,r1,AL,XL,YL);
AI9=I9(J,r1,AL,XL,YL);
AI10=I10(J,r1,AL,XL,YL);
AI11=I11(J,r1,AL,XL,YL);
AI12=I12(J,r1,AL,XL,YL);
AI13=I13(J,r1,AL,XL,YL);
AI14=I14(J,r1,AL,XL,YL);
AI15=I15(J,r1,AL,XL,YL);
AI16=I16(J,AL,YL);
AI17=I17(J,r1,AL,XL,YL);
AI18=I18(J,r1,AL,XL,YL);
AI19=I19(J,r1,AL,XL,YL);
AI20=I20(J,r1,AL,XL,YL);
AI21=I21(J,r1,AL,XL,YL);
AI22=I22(J,r1,AL,XL,YL);
AI23=I23(J,r1,AL,XL,YL);
AI24=I24(J,r1,AL,XL,YL);
AI25=I25(J,r1,AL,XL,YL);
AI26=I26(J,r1,AL,XL,YL);
AI27=I27(J,r1,AL,XL,YL);
AI28=I28(J,r1,AL,XL,YL);
AI29=I29(J,r1,AL,XL,YL);
% CALCULUL SOLUTIILOR IN NODURILE INTERIOARE PROVENIITE DIN SALTUL "w"
G11(K,J)=-((3-GNU)*XL^3*AI11+(1+GNU)*AI13*XL)/(4*pi);
```

```

dx2g11(K, J)=(GNU-3)*XL^5*AI17+(9*GNU-3)*XL*AI19+(18-14*GNU)*XL^3*AI18)/(2*pi);
dxyg11(K, J)=(9*GNU-15)*XL^4*AI20+(GNU+1)*AI22+(10-14*GNU)*XL^2*AI21)/(2*pi);
dy2g11(K, J)=-((3*GNU-5)*XL^5*AI17+(3*GNU+3)*XL*AI19+(22-18*GNU)*XL^3*AI18)/(2*pi);
Mxg11(K, J)=-D*(dx2g11(K, J)+GNU*dy2g11(K, J));
Myg11(K, J)=-D*(dy2g11(K, J)+GNU*dx2g11(K, J));
Mxyg11(K, J)=-D*(1-GNU)*dxyg11(K, J);
Mnxsw(K, J)=(Mxg11(K, J)*ANX(J)^2+Myg11(K, J)*ANY(J)^2+2*Mxyg11(K, J)*ANX(J)*ANY(J));
Mnysw(K, J)=(Mxg11(K, J)*ANY(J)^2+Myg11(K, J)*ANX(J)^2+2*Mxyg11(K, J)*ANX(J)*ANY(J));
Mnxysw(K, J)=(Myg11(K, J)-Mxg11(K, J))*ANX(J)*ANY(J)+Mxyg11(K, J)*(ANX(J)^2-ANY(J)^2);
dx3g11(K, J)=-3*(XL^6*(GNU-3)*AI29+(1-3*GNU)*AI28+XL^2*AI27*(35*GNU-25)+XL^4*AI26*(35-
25*GNU))/(2*pi);
dx2yg11(K, J)=-6*(XL^5*AI23*(3*GNU-5)+XL*AI24*(3*GNU-1)+10*XL^3*AI25*(1-GNU))/pi;
dxy2g11(K, J)=-3*(AI28*(GNU+1)+XL^6*(5-3*GNU)*AI29+XL^2*AI27*(15-25*GNU)+XL^4*AI26*(35*GNU-
45))/(2*pi);
dy3g11(K, J)=6*(XL^5*AI23*(5*GNU-7)+XL*AI24*(GNU+1)+10*XL^3*AI25*(1-GNU))/pi;
Qnxsw(K, J)=-D*((dx3g11(K, J)+dxy2g11(K, J))*ANX(J)+(dy3g11(K, J)+dx2yg11(K, J))*ANY(J));
Qnysw(K, J)=-D*((dx3g11(K, J)+dxy2g11(K, J))*ANY(J)+(dy3g11(K, J)+dx2yg11(K, J))*ANX(J));
% CALCULUL SOLUTIILOR IN NODURILE INTERIOARE PROVENIITE DIN SALTUL "Tetax"
G12(K, J)=((1+GNU)*AI1+(1-GNU)*XL^2*AI2)/4/pi;
dx2g12(K, J)=- (XL^4*(GNU+1)*AI4+AI6*(GNU-3)+6*XL^2*AI5*(1-GNU))/(4*pi);
dxyg12(K, J)=- (XL^3*AI7*(3*GNU-1)+XL*AI8*(3-GNU))/(2*pi);
dy2g12(K, J)=- (AI6*(GNU+1)+XL^4*AI4*(1-3*GNU)+6*XL^2*AI5*(GNU-1))/(4*pi);
Mxg12(K, J)=-D*(dx2g12(K, J)+GNU*dy2g12(K, J));
Myg12(K, J)=-D*(dy2g12(K, J)+GNU*dx2g12(K, J));
Mxyg12(K, J)=-D*(1-GNU)*dxyg12(K, J);
Mnxsteta(K, J)=(Mxg12(K, J)*ANX(J)^2+Myg12(K, J)*ANY(J)^2+2*Mxyg12(K, J)*ANX(J)*ANY(J));
Mnysteta(K, J)=(Mxg12(K, J)*ANY(J)^2+Myg12(K, J)*ANX(J)^2+2*Mxyg12(K, J)*ANX(J)*ANY(J));
Mnxysteta(K, J)=(Myg12(K, J)-Mxg12(K, J))*ANX(J)*ANY(J)+Mxyg12(K, J)*(ANX(J)^2-ANY(J)^2);
dx3g12(K, J)=(XL^5*AI17*(GNU+1)+XL*AI19*(9*GNU-15)+XL^3*AI18*(10-14*GNU))/(2*pi);
dx2yg12(K, J)=(XL^4*AI20*(9*GNU-3)+AI22*(GNU-3)+XL^2*AI21*(18-14*GNU))/(2*pi);
dxy2g12(K, J)=- (XL^5*AI17*(3*GNU-1)+XL*AI19*(3*GNU-9)+XL^3*AI18*(14-18*GNU))/(2*pi);
dy3g12(K, J)=(AI22*(GNU+1)+XL^4*AI20*(9-15*GNU)+XL^2*AI21*(10*GNU-14))/(2*pi);
Qnxsteta(K, J)=-D*((dx3g12(K, J)+dxy2g12(K, J))*ANX(J)+(dy3g12(K, J)+dx2yg12(K, J))*ANY(J));
Qnysteta(K, J)=-D*((dx3g12(K, J)+dxy2g12(K, J))*ANY(J)+(dy3g12(K, J)+dx2yg12(K, J))*ANX(J));
% CALCULUL SOLUTIILOR IN NODURILE INTERIOARE PROVENIITE DIN SALTUL "Mx"
G13(K, J)=XL*AI1/(4*pi*D);
dx2g13(K, J)=(XL^3*AI11+3*XL*AI13)/(4*pi*D);
dxyg13(K, J)=- (XL^2*AI12-AI10)/(4*pi*D);
dy2g13(K, J)=(XL^3*AI11-XL*AI13)/(4*pi*D);
Mxg13(K, J)=-D*(dx2g13(K, J)+GNU*dy2g13(K, J));
Myg13(K, J)=-D*(dy2g13(K, J)+GNU*dx2g13(K, J));
Mxyg13(K, J)=-D*(1-GNU)*dxyg13(K, J);
Mnxsmx(K, J)=(Mxg13(K, J)*ANX(J)^2+Myg13(K, J)*ANY(J)^2+2*Mxyg13(K, J)*ANX(J)*ANY(J));
Mnysmx(K, J)=(Mxg13(K, J)*ANY(J)^2+Myg13(K, J)*ANX(J)^2+2*Mxyg13(K, J)*ANX(J)*ANY(J));
Mnxysmx(K, J)=(Myg13(K, J)-Mxg13(K, J))*ANX(J)*ANY(J)+Mxyg13(K, J)*(ANX(J)^2-ANY(J)^2);
dx3g13(K, J)=- (XL^4*AI4+6*XL^2*AI5-3*AI6)/(4*pi*D);
dx2yg13(K, J)=(XL^3*AI7-3*XL*AI8)/(2*pi*D);
dxy2g13(K, J)=- (XL^4*AI4-6*XL^2*AI5+AI6)/(4*pi*D);
dy3g13(K, J)=- (3*XL^3*AI7-XL*AI8)/(2*pi*D);
Qnxsmx(K, J)=-D*((dx3g13(K, J)+dxy2g13(K, J))*ANX(J)+(dy3g13(K, J)+dx2yg13(K, J))*ANY(J));
Qnysmx(K, J)=-D*((dx3g13(K, J)+dxy2g13(K, J))*ANY(J)+(dy3g13(K, J)+dx2yg13(K, J))*ANX(J));
% CALCULUL SOLUTIILOR IN NODURILE INTERIOARE PROVENITE DIN SALTUL "Vx"
G14(K, J)=AI14/(8*pi*D);
dx2g14(K, J)=(2*AI1+2*XL^2*AI2+AL(J))/(8*pi*D);
dxyg14(K, J)=XL*AI3/(4*pi*D);
dy2g14(K, J)=(2*AI1+2*AI9+AL(J))/(8*pi*D);
Mxg14(K, J)=-D*(dx2g14(K, J)+GNU*dy2g14(K, J));
Myg14(K, J)=-D*(dy2g14(K, J)+GNU*dx2g14(K, J));

```

```

Mxyg14(K,J)=-D*(1-GNU)*dxyg14(K,J);
Mnxsv(K,J)=(Mxg14(K,J)*ANX(J)^2+Myg14(K,J)*ANY(J)^2+2*Mxyg14(K,J)*ANX(J)*ANY(J));
Mnysv(K,J)=(Mxg14(K,J)*ANY(J)^2+Myg14(K,J)*ANX(J)^2+2*Mxyg14(K,J)*ANX(J)*ANY(J));
Mnxysv(K,J)=(Myg14(K,J)-Mxg14(K,J))*ANX(J)*ANY(J)+Mxyg14(K,J)*(ANX(J)^2-ANY(J)^2);
dx3g14(K,J)=(XL^3*AI11+3*XL*AI13)/(4*pi*D);
dx2yg14(K,J)=-(XL^2*AI12-AI10)/(4*pi*D);
dxy2g14(K,J)=(XL^3*AI11-XL*AI13)/(4*pi*D);
dy3g14(K,J)=(3*XL^2*AI12+AI10)/(4*pi*D);
Qnxsv(K,J)=-D*((dx3g14(K,J)+dxy2g14(K,J))*ANX(J)+(dy3g14(K,J)+dx2yg14(K,J))*ANY(J));
Qnysv(K,J)=-D*((dx3g14(K,J)+dxy2g14(K,J))*ANY(J)+(dy3g14(K,J)+dx2yg14(K,J))*ANX(J));
end
end
%FORMAREA MATRICEI DEPLASARII VERTICALE "w" PROVENITA DIN SALTURI PE FRONTIERA
GG11=G11(:,ELL);
GG12=G12(:,[ELS ELL]);
GG13=G13(:,ELR);
GG14=G14(:,[ELS ELR]);
GGKJ=[GG11 GG12 GG13 GG14];
%FORMAREA MATRICEI MOMENTULUI "Mx" PROVENITA DIN SALTURI PE FRONTIERA
MMnxsw=Mnxsw(:,ELL);
MMnxsteta=Mnxsteta(:,[ELS ELL]);
MMnxsmx=Mnxsmx(:,ELR);
MMnxsv=Mnxsv(:,[ELS ELR]);
MXTOT=[MMnxsw MMnxsteta MMnxsmx MMnxsv];
%FORMAREA MATRICEI MOMENTULUI "My" PROVENITA DIN SALTURI PE FRONTIERA
MMnysw=Mnysw(:,ELL);
MMnysteta=Mnysteta(:,[ELS ELL]);
MMnysmx=Mnysmx(:,ELR);
MMnysv=Mnysv(:,[ELS ELR]);
MYTOT=[MMnysw MMnysteta MMnysmx MMnysv];
%FORMAREA MATRICEI MOMENTULUI "Mxy" PROVENITA DIN SALTURI PE FRONTIERA
MMnxysw=Mnxysw(:,ELL);
MMnxysteta=Mnxysteta(:,[ELS ELL]);
MMnxysmx=Mnxysmx(:,ELR);
MMnxysv=Mnxysv(:,[ELS ELR]);
MXYTOT=[MMnxysw MMnxysteta MMnxysmx MMnxysv];
%FORMAREA MATRICEI FORTEI TAIETOARE "Qx" PROVENITA DIN SALTURI PE FRONTIERA
QQnxsw=Qnxsw(:,ELL);
QQnxsteta=Qnxsteta(:,[ELS ELL]);
QQnxsmx=Qnxsmx(:,ELR);
QQnxsv=Qnxsv(:,[ELS ELR]);
QXTOT=[QQnxsw QQnxsteta QQnxsmx QQnxsv];
%FORMAREA MATRICEI FORTEI TAIETOARE "Qy" PROVENITA DIN SALTURI PE FRONTIERA
QQnysw=Qnysw(:,ELL);
QQnysteta=Qnysteta(:,[ELS ELL]);
QQnysmx=Qnysmx(:,ELR);
QQnysv=Qnysv(:,[ELS ELR]);
QYTOT=[QQnysw QQnysteta QQnysmx QQnysv];
% CALCULUL SOLUTIILOR IN NODURILE INTERIOARE PROVENITE DIN SARCINA EXTERIOARA
for K=1:NI
    r(K)=sqrt((XIN(K)-CSI)^2+(YIN(K)-ETA)^2);
    %Calculul deplasarii provenita din forta concentrata
    wintF(K)=F*r(K)^2*log(r(K))/(8*pi*D);
    %Calculul momentului Mx provenit din forta concentrata
    MxintF(K)=(-(1+GNU)*log(r(K))-(1-GNU)*(XIN(K)-CSI)^2/r(K)^2-(3*GNU+1)/2)*F/(4*pi);
    %Calculul momentului My provenit din forta concentrata
    MyintF(K)=(-(1+GNU)*log(r(K))-(1-GNU)*(YIN(K)-ETA)^2/r(K)^2-(3*GNU+1)/2)*F/(4*pi);
    %Calculul momentului Mxy provenit din forta concentrata

```

```

MxyintF(K)=-(1-GNU)*(XIN(K)-CSI)*(YIN(K)-ETA)/(4*pi*r(K)^2);
%Calculul fortei Qx provenit din forta concentrata
dx3g14(K)=((XIN(K)-CSI)^3+3*(XIN(K)-CSI)*(YIN(K)-ETA)^2)/(4*pi*D*r(K)^4);
dxy2g14(K)=((XIN(K)-CSI)^3-(XIN(K)-CSI)*(YIN(K)-ETA)^2)/(4*pi*D*r(K)^4);
QxintF(K)=-D*(dx3g14(K)+dxy2g14(K));
%Calculul fortei Qy provenit din forta concentrata
dy3g14(K)=(3*(XIN(K)-CSI)^2*(YIN(K)-ETA)+(YIN(K)-ETA)^3)/(4*pi*D*r(K)^4);
dx2yg14(K)=-((XIN(K)-CSI)^2*(YIN(K)-ETA)-(YIN(K)-ETA)^3)/(4*pi*D*r(K)^4);
QyintF(K)=-D*(dy3g14(K)+dx2yg14(K));
end
% CALCULUL SAGETII 'W' SI EFORTURILOR IN NODURILE INTERIOARE
% Calculul deplasarii verticale w
WINT=GGKJ*XX+WintF';
for K=1:NI
    disp(sprintf('k=%g xint=%g Yint=%g wint',K,XIN(K),YIN(K),WINT(K)))
end
% Calculul momentului 'Mx'
MXINT=MXTOT*XX+MxintF';
for K=1:NI
    disp(sprintf('k=%g xint=%g Yint=%g Mxint',K,XIN(K),YIN(K),MXINT(K)))
end
% Calculul momentului 'My'
MYINT=MYTOT*XX+MyintF';
for K=1:NI
    disp(sprintf('k=%g xint=%g Yint=%g Myint',K,XIN(K),YIN(K),MYINT(K)))
end
% Calculul momentului 'Mxy'
MXYINT=MXYTOT*XX+MxyintF';
for K=1:NI
    disp(sprintf('k=%g xint=%g Yint=%g Mxyint',K,XIN(K),YIN(K),MXYINT(K)))
end
% Calculul fortei 'Qx'
QXINT=QXTOT*XX+QxintF';
for K=1:NI
    disp(sprintf('k=%g xint=%g Yint=%g Qxint',K,XIN(K),YIN(K),QXINT(K)))
end
% Calculul fortei 'Qy'
QYINT=QYTOT*XX+QyintF';
for K=1:NI
    disp(sprintf('k=%g xint=%g Yint=%g Qyint',K,XIN(K),YIN(K),QYINT(K)))
end

```

COSDIR

```

function [AL,C,S,XL,YL,r]=cosdir(I,J,X,Y,XM,YM)
% cosinusurile directe ale elementului i
AX(I)=X(I+1)-X(I);
AY(I)=Y(I+1)-Y(I);
AL(I)=sqrt(AX(I)^2+AY(I)^2);
ANX(I)=AY(I)/AL(I);
ANY(I)=-AX(I)/AL(I);
% cosinusurile directe ale elementului j
AX(J)=X(J+1)-X(J);
AY(J)=Y(J+1)-Y(J);
AL(J)=sqrt(AX(J)^2+AY(J)^2);
ANX(J)=AY(J)/AL(J);
ANY(J)=-AX(J)/AL(J);

```

```

%determinarea cos(gamma), sin(gamma)
C=ANX(I)*ANX(J)+ANY(I)*ANY(J);
S=ANY(I)*ANX(J)-ANX(I)*ANY(J);
%determinarea coordonatelor nodului i: xil si yil in sistemul de
%coordonate locale ale elementului j
XL=(XM(I)-XM(J))*ANX(J)+(YM(I)-YM(J))*ANY(J);
YL=-(XM(I)-XM(J))*ANY(J)+(YM(I)-YM(J))*ANX(J);
r1=sqrt(XL^2+YL^2);
end

```

AIJ

```

%Calc. elem. AIJ (Momentul Mn in 'i' din saltul teta const. pe segm. 'j')
function [AIJ]=AIJ(I,J,GNU,D,XL,AL,C,S,AI4,AI5,AI6,AI7,AI8)
if I~=J
    z1=((1+3*GNU)*XL^4*AI4+6*(1-GNU)*XL^2*AI5-(3+GNU)*AI6)*(1-GNU)*C^2/4/pi;
    z2=(XL^4*AI4-6*XL^2*AI5+AI6)*(1-GNU)^2*S^2/4/pi;
    z3=((1-3*GNU)*XL^3*AI7-(3-GNU)*XL*AI8)*2*C*S*(1-GNU)/2/pi;
    AIJ=(z1+z2+z3)*D;
else
    AIJ=D*(1-GNU)*(3+GNU)/pi/AL(J);
end

```

-
-
-

VIJ

```

%Calc. elem. VIJ (Unghiul TETAn in 'i' din saltul w const. pe segm. 'j')
function [VIJ]=VIJ(GNU,XL,C,S,AI4,AI5,AI6,AI7,AI8)
    z1=-C*((3-GNU)*XL^4*AI4-6*(1-GNU)*XL^2*AI5-(1+GNU)*AI6)/4/pi;
    z2=-S*((1+GNU)*XL*AI8+(5-3*GNU)*XL^3*AI7)/2/pi;
    VIJ=(z1+z2);
end

```

Wnif

```

% Calculul sagetii wi din o forta concentrata in punctul i
function [wnif]=wnif(I,XM,YM,F,D)
    Ri=sqrt(XM(I)^2+YM(I)^2);
    wnif=F*Ri^2*log(Ri)/8/pi/D;
end

```

TETAnif

```

% Calculul momentului Mn in directia normalei la segmentul i din o forta
% concentrata F in o placa infinita

```

```

%aici C=ANX(I); S=ANY(I)
function [TETAnif]=TETAnif(I,X,Y,XM,YM,D,F)
% cosinusurile directoare ale elementului i
  AX(I)=X(I+1)-X(I);
  AY(I)=Y(I+1)-Y(I);
  AL(I)=sqrt(AX(I)^2+AY(I)^2);
  ANX(I)=AY(I)/AL(I);
  ANY(I)=-AX(I)/AL(I);
  Ri=sqrt(XM(I)^2+YM(I)^2);
  TETAxif=-(F*XM(I)*(2*log(Ri)+1))/8/pi/D;
  TETAyif=-(F*YM(I)*(2*log(Ri)+1))/8/pi/D;
  TETAnif=ANX(I)*TETAxif+ANY(I)*TETAyif;
end

```

Mnif

```

% Calculul momentului Mn in directia normalei la segmentul i din o forta
% concentrata F in o placa infinita
%aici C=ANX(I); S=ANY(I)
function [Mnif]=Mnif(I,X,Y,XM,YM,GNU,F)
% cosinusurile directoare ale elementului i
  AX(I)=X(I+1)-X(I);
  AY(I)=Y(I+1)-Y(I);
  AL(I)=sqrt(AX(I)^2+AY(I)^2);
  ANX(I)=AY(I)/AL(I);
  ANY(I)=-AX(I)/AL(I);
  Ri=sqrt(XM(I)^2+YM(I)^2);
  Mxif=-((1+GNU)*log(Ri)+(1-GNU)*XM(I)^2/Ri^2+(3*GNU+1)/2)*F/4/pi;
  Myif=-((1+GNU)*log(Ri)+(1-GNU)*YM(I)^2/Ri^2+(3*GNU+1)/2)*F/4/pi;
  Mxyif=-F*(1-GNU)*XM(I)*YM(I)/Ri^2/4/pi;
  Mnif=ANX(I)^2*Mxif+ANY(I)^2*Myif+2*ANX(I)*ANY(I)*Mxyif;
end

```

Vnif

```

% Calculul fortei generalizate vn in directia normalei la segmentul i din o forta
% concentrata F in o placa infinita
%aici C=ANX(I); S=ANY(I)
function [Vnif]=vnif(I,X,Y,XM,YM,GNU,F)
% cosinusurile directoare ale elementului i
  AX(I)=X(I+1)-X(I);
  AY(I)=Y(I+1)-Y(I);
  AL(I)=sqrt(AX(I)^2+AY(I)^2);
  ANX(I)=AY(I)/AL(I);
  ANY(I)=-AX(I)/AL(I);
  Ri=sqrt(XM(I)^2+YM(I)^2);
  Vnif=-F*ANX(I)*XM(I)*((3-GNU)*XM(I)^2+(1+GNU)*YM(I)^2)/4/pi/Ri^4-F*ANY(I)*YM(I)*((3-
GNU)*YM(I)^2+(1+GNU)*XM(I)^2)/4/pi/Ri^4;
end

```

I1

```
function [I1]=I1(J,r1,AL,XL,YL)
%pentru x=0; y=0
if r1==0
    I1=(AL(J)*(log(AL(J)^2/4) - 2))/2;
    %pentru x=0;
elseif XL==0
    if YL==AL(J)/2
        I1=((AL(J)/2 + YL)*(log((AL(J)/2 + YL)^2) - 2))/2;
    elseif YL==-AL(J)/2
        I1=((AL(J)/2 - YL)*(log((AL(J)/2 - YL)^2) - 2))/2;
    elseif YL~=0
        I1=((AL(J)/2 + YL)*(log((AL(J)/2 + YL)^2) - 2))/2 + ((AL(J)/2 - YL)*(log((AL(J)/2 -
        YL)^2) - 2))/2;
    end
    %pentru x.ne.0; y.ne.0
else
I1=log(((AL(J)/2 - YL)^2 + XL^2)^(1/2))*(AL(J)/2 - YL) - AL(J) + log((XL^2 + (AL(J)/2 +
YL)^2)^(1/2))*(AL(J)/2 + YL) + XL*atan((AL(J)/2 + YL)/XL) + XL*atan((AL(J)/2 - YL)/XL);
end
```

- .
- .
- .

I29

```
function [I29]=I29(J,r1,AL,XL,YL)
%pentru x=0; y=0
if r1==0
    I29=-1024/(9*AL(J)^9);
    %pentru x=0;
elseif XL==0
    if YL==AL(J)/2
        I29=- 512/(9*(AL(J) + 2*YL)^9);
    elseif YL==-AL(J)/2
        I29=- 512/(9*(AL(J) - 2*YL)^9);
    elseif YL~=0
        I29=- 512/(9*(AL(J) - 2*YL)^9) - 512/(9*(AL(J) + 2*YL)^9);
    end
    %pentru x.ne.0; y.ne.0
else
    I29=((511*(AL(J)/2 - YL)^3)/(384*XL^4) + (385*(AL(J)/2 - YL)^5)/(384*XL^6) + (35*(AL(J)/2 -
    YL)^7)/(128*XL^8) + ((93*AL(J))/2 - 93*YL)/(128*XL^2))/((AL(J)/2 - YL)^8 + 4*XL^2*(AL(J)/2 -
    YL)^6 + 6*XL^4*(AL(J)/2 - YL)^4 + 4*XL^6*(AL(J)/2 - YL)^2 + XL^8) + (35*atan((AL(J)/2 -
    YL)/XL))/(128*XL^9) + (((93*AL(J))/2 + 93*YL)/(128*XL^2) + (511*(AL(J)/2 + YL)^3)/(384*XL^4) +
    (385*(AL(J)/2 + YL)^5)/(384*XL^6) + (35*(AL(J)/2 + YL)^7)/(128*XL^8))/(XL^8 + (AL(J)/2 + YL)^8 +
    4*XL^2*(AL(J)/2 + YL)^6 + 6*XL^4*(AL(J)/2 + YL)^4 + 4*XL^6*(AL(J)/2 + YL)^2) + (35*atan((AL(J)/2
    + YL)/XL))/(128*XL^9);
end
```

DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnatul, Galbinean Sergiu, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări și realizări științifice. Conștientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecințele în conformitate cu legislația în vigoare.

Galbinean Sergiu

Data

CV-ul CANDIDATULUI

Nume Prenume	Galborean Sergiu			
Data nașterii	31.12.1985			
Cetățenia	MD			
Studii	2005-2009	licență	UTM	Construcții și Inginerie Civilă
	2009-2011	masterat	UTM	Inginerie Structurală
	2011-2014	doctorat	UTM	135.02. Mecanica corpului solid
Stagii	2009-2015	UTM		Asistent universitar
	2012-2013	„Intexnauca” S.A.		Inginer proiectant cat. II
	2015-prez.	UTM		Lector universitar
	2016-2020	I.M.P. „Chișinăuproiect”		Inginer proiectant cat. I
	2020-prez.	„Comsales Grup” S.R.L.		Inginer proiectant cat. I
Domenii de interes științific	Teoria elasticității; Metoda Elementelor Finite; Metoda Elementelor de Frontieră			
Participări în proiecte științifice naționale	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 2011-2015 - participarea în cadrul proiectului de cercetare: „Calculul plăcilor plane și curbe prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue”. 			
Participări la manifestări științifice	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Discontinuous solutions in BEM for plate analysis in Reissner-Mindlin theory. In: International Azerbaijan Academic Research Congress, 2022, p.751-758. ISBN 978-605-71461-7-5. 			
Lucrări științifice și științifico-metodice publicate	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Galborean, S. Application of discontinuous solutions in Boundary Element Method for the bending problems of Kirchhoff plates with an arbitrary contour. In: Journal of Engineering Science, vol. 30, nr. 2, UTM, 2023, pp. 23-33. ISSN 2587-3474. ▪ Galborean, S. Soluții discontinue pentru calculul plăcilor în teoria clasică. In: <i>Akados</i>, Nr. 1 (48), AȘM, 2018, p. 31-35. ISSN 1857-0461. ▪ Galborean, S. Calculation errors of the plates using finite element method. In: <i>Meridian Ingineresc</i>, Nr. 2, UTM, 2013, p. 64-66. ISSN 1683-853X. Categoria C. ▪ Beleuță, V.; Galborean, S. Calculul săgeții inițiale de încovoiere a turnului zăbrețit prin utilizarea modelului grinzii echivalente. In: <i>Meridian Ingineresc</i>, Nr. 3(58), UTM, 2015, p. 47-50. ISSN 1683-853X. ▪ Galborean, S. Influența modului de conectare a nodurilor în structuri cadre-diafragme. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. II, Chișinău, 2009, p. 450-452. ISBN 978-9975-45-142-0. ▪ Galborean, S. Despre unele erori la calculul cu metoda elementelor finite. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. II, Chișinău, 2010, p. 327-328. ISBN 978-9975-45-159-8. ▪ Galborean, S. Calculul plăcilor consolidate pe contur cu grinzi. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. I, Chișinău, 2011, p. 391-394. ISBN 978-9975-45-208-3. ▪ Galborean, S. Elaborarea programului de calcul al plăcii simplu rezemate pe două laturi opuse folosind seriile Levy. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. I, Chișinău, 2011, p. 395-398. ISBN 978-9975-45-208-3. 			

	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Galbinean, S. Metode numerice de calcul a plăcilor. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. II, Chișinău, 2012, p. 107-110. ISBN 978-9975-45-251-9. ▪ Scînteii, S.; Galbinean, S.; Cîrlan, A. Studiul comportării unui scaun fabricat din lemn lamelat. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. II, Chișinău, 2012, p. 159-162. ISBN 978-9975-45-251-9. ▪ Galbinean, S. Calculul plăcilor prin metoda elementelor de frontieră bazată pe soluții discontinue. In: tezele Conferinței tehnico-științifice ale studenților și doctoranzilor UTM, Vol. II, Chișinău, 2013, p. 407-411. ISBN 978-9975-45-312-7. ▪ Galbinean, S. Implimentarea numerică a metodei elementelor de frontieră. In: tezele Conferinței jubiliare tehnico-științifice a colaboratorilor, doctoranzilor și studenților consacrată celei de-a 50-a aniversare a UTM, Vol. II, Chișinău, 2014, p. 202-205. ISBN 978-9975-45-382-0. 	
Premii, mențiuni, distincții, titluri onorifice etc.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Certificat de atestare tehnico-profesională în domeniul Rezistența construcțiilor: a) civile; b) industriale și agrozootehnice. Seria 2022-P; nr. 0851. 18.05.2022. ▪ Certificat de participare la cursul Basic Allplan Engineer și SCIA Engineer, Chișinău, UTM, 04.03.2019-07.03.2019. ▪ Certificat de participare la cursul Basic Allplan Architecture, Chișinău, UTM, 25.02.2019-01.03.2019. ▪ Diplomă de gradul III - Laureat al anului 2011 în domeniul de cercetare, Chișinău 2011 	
Cunoașterea limbilor	engleză	B2
	rusă	C1
Permis de conducere	B	
Date de contact	adresa	Chișinău, str. Cetatea Chilia, 25
	tel.	+37369739339
	e-mail.	sergiu.galbinean@cms.utm.md