SUBBUCLE CARACTERISTICE ŞI SUBBUCLE DEPLIN INVARIANTE, I

A. Covalschi, V. Ursu

Abstrac: *Minuţios sunt cercetate subbuclele caracteristice şi subbuclele deplin invariante ale unei buclei date . Deasemenea sunt construite un şir de exemple de astfel de subbucle.*
Cuvinte chee: *buclă, subbuclă, centrul, automorfism, endoorfism, asociator, comutator, subbuclă caracteristică, subbuclă deplin invariantă*

1. De la bine început vom menţiona că noţiuni principale îutilizate în lucrare pot fi găsite în [1-3] (vezi, deasemenea [5]).

Fie *L* o buclă şi $Aut(L)$ mulţimea tuturor automorfismelor lui *L*.

Definiţia 1.1 *O submulţime H a buclei L vom numi-o caracteristică, dacă H este invariantă faţă de orice automorfism al lui L, adică pentru orice* $\varphi \in Aut(L)$ *avem* $\varphi(H) \subseteq H$..

În contextual definiţiei 1.1, o subbuclă *H* a buclei *L* se numeşte *caracteristică,* dacă submulţimea *H* este caracteristică (vezi [1]).

Observaţia 1.1 Submulţimea *H* a buclei *L* este caracteristică dacă şi numai dacă $\varphi(H) = H$ pentru orice $\varphi \in Aut(L)$.

Într-adevăr, din $\varphi(H) \subseteq H$ pentru orice $\varphi \in Aut(L)$. Rezultă $H \subseteq \varphi^{-1}(H)$ pentru orice $\varphi \in Aut(L)$, deci şi pentru $\varphi^{-1} \in Aut(L)$ avem $H \subseteq (\varphi^{-1})^{-1}(H)$, adică $H \subseteq \varphi(H)$. Prin urmare, $\varphi(H) = H$.□

Observaţia 1.2. Dacă mulţimea $Int(L)$ a substituţiilor interne ale buclei *L* se conţine în $Aut(L)$, atunci orice subbuclă caracteristică a buclei *L* este normală în *L*. În particular, orice subbuclă caracteristică a *A*-buclei este normală.

Există bucle care au subbuclele caracteristice însă nu sunt normale ([4], [6]). Invers, nu orice subbuclă normală este caracteristică.

Exemplul 1.3.1 Fie $F = F(x_1,...,x_n)$ o buclă liberă de rangul $n \geq 2$ ai cărei generatori liberi sunt $x_1,...,x_n$, iar $H = lp^F(x_1)$ – subbucla normală generată în bucla *F* de un singur element – x_1. Întrucât *F* este liberă, aplicaţia $\varphi : x_1 \to x_2$, $\varphi : x_2 \to x_1, \varphi : x_i \to x_i$, $i = 3,...,n$ defineşte un automorfism al lui *F* pe *F*. Atunci avem $\varphi(H) = lp^F(\varphi(x_1)) = lp^F(x_2) \neq H$. Conform observaţiei 1,1 subbucla normală *H* nu este caracteristică.

Observaţia 1.3 Fie *L* o buclă şi $H_1 \subseteq H_2$ subbucle ale lui *L*. Dacă H_1 este caracteristică în H_2 şi H_2 este cracteristică în *L*, atunci H_1 este caracteristică în *L*.

Această afirmaţie rezultă din faptul că dacă H_2 este cracteristică în *L*, atunci restricţia unui automorfism al lui *L* la H_1 este un automorfism al lui H_1.

Observaţia 1.4 Fie *L* o *A*-buclă şi $H_1 \subseteq H_2$ subbucle ale lui *L*. Dacă H_1 este caracteristică în H_2 şi H_2 este subbuclă normală în *L*, atunci H_1 este subbuclă normală în *L*.

Într-adevăr, din $H_2 \lhd L$ rezultă că restricţia unui automorfism intern al lui *L* în H_2 este un automorfism (nu neapărat intern) al lui H_2 şi, deaceea, invariază pe H_1. Deci H_1 este subbuclă normală în *L*.□

În orice buclă *L* nucleul de stânga $N_s(L)$, nucleul de dreapta $N_d(L)$, nucleul de mijloc $N_m(L)$ şi nucleul $N(L)$ ale lui *L* sunt definite astfel:

$$N_s(L) = \{a \in L \mid ax \cdot y = a \cdot xy \text{ } pentu \text{ } \forall x, y \in L\},$$
$$N_d(L) = \{a \in L \mid x \cdot ya = xy \cdot a \text{ } pentu \text{ } \forall x, y \in L\},$$
$$N_m(L) = \{a \in L \mid x \cdot ay = xa \cdot y \text{ } pentu \text{ } \forall x, y \in L\},$$
$$N(L) = N_s(L) \cap N_m(L) \cap N_d(L).$$

În [2] este arătat că $N_s(L)$, $N_d(L)$ şi $N_m(L)$ sunt subbucle ale buclei *L,* deci şi intersecţia lor $N(L)$ de asemenea este subbuclă.
Evident că centrul buclei *L* este mulţimea

$$Z(L) = \{a \in L \mid a \in N(L),\ a \cdot x = x \cdot a \ \textit{pentru orice}\, x \in L\}.$$

Are loc următoarea afirmaţie:

Propoziţia 1.1 *Nucleele de stânga, de dreapta, de centru şi centrul ale oricărei bucle L sunt subbucle caracteristice ale buclei L.*

Folosind noţiunea de centru vom construi inductiv un şir crescător $Z_n(L),\ n = 0,1,...$ de subbucle caracteristice ale lui *L*. Prin definiţie $Z_0(L) = \{e\},\ Z_1(L) = Z(L)$. Fie $Z(L/Z_1(L))$ centrul buclei-factor $L/Z_1(L)$ şi $\varphi_1 : L \to L/Z_1(L)$ – omomorfismul natural. Definim $Z_2(L) = \varphi_1^{-1}(Z(L/Z_1(L)))$, adică $Z_2(L)/Z_1(L) = Z(L/Z_1(L))$. Întrucât $Z(L/Z(L))$ este o subbuclă normală în $L/Z(L)$, urmează că proimaginea $Z_2(L)$ în raport cu omomorfismul φ_1 este subbuclă normală în *L*. Fie $Z(L/Z_2(L))$ centrul lui $L/Z_2(L)$ şi $\varphi_2 : L \to L/Z_2(L)$ – omomorfismul natural. Definim $Z_3(L) = \varphi_2^{-1}(Z(L/Z_2(L)))$, adică $Z_3(L)/Z_2(L) = Z(L/Z_2(L))$. Presupunem că $Z_n(L) \lhd L$ şi $\varphi_n : L \to L/Z_n(L)$ este omomorfismul natural. Definim $Z_{n+1}(L) = \varphi_n^{-1}(Z(L/Z_n(L)))$, adică $Z_{n+1}(L)/Z_n(L) = Z(L/Z_n(L))$. Rezultă că $Z_{n+1}(L) \lhd L$ şi $Z_n(L) \subseteq Z_{n+1}(L)$.

Şirul $\{e\} = Z_0(L) \subseteq Z_1(L) \subseteq ... \subseteq Z_n(L) \subseteq ...$ de subbucle ale lui *L* se numeşte *şir central ascendent* al lui *L*, iar subbuclele $Z_0(L),\ Z_1(L),\ ..., Z_n(L),\ ...$ se numesc *termenii* acestui şir (vezi, deasemenea [3]).

Propoziţia 1.2 *Termenii şirului central ascendent al buclei L sunt subbucle caracteristice.*

2. Fie *L* o buclă şi $End(L)$ mulţimea endomorfismelor lui *L*.

Definiţia 1.2 *Subbucla H a buclei L se numeşte deplin invariantă sau deplin caracteristică (sau verbală), dacă pentru orice* $\varphi \in End(L)$ *avem* $\varphi(H) \subseteq H$.

Observaţia 1.5 Din incluziunea $Aut(L) \subseteq End(L)$ rezultă că orice subbuclă deplin invariantă în *L* este caracteristică în *L*.

Această afirmaţie rezultă din faptul că dacă H_2 este deplin invariantă în *L*, atunci restricţia unui endomorfism al lui *L* în H_2 este un endomorfism al lui H_2.

Pentru a da exemple de subbucle deplin invariante, vom scoate în evidenţă definiţiile unor noţiuni foarte importante.

Definiţia 1.3 *Fie L o buclă şi* $x, y, z \in L$. *Se numeşte:*

- *asociatorul de dreapta al tripletului de elemente* x, y, z *elementul*
$$[x, y, z] = x \backslash ((xy \cdot z)/(yz));$$
- *asociatorul de stânga al tripletului de elemente* x, y, z *elementul*
$$(x, y, z) = ((xy) \backslash (x \cdot yz))/z.$$
- *asociatorul de mijloc al tripletului de elemente* x, y, z *elementul*
$$< x, y, z > = y \backslash (x \backslash ((x \cdot yz)/z),$$
- *comutatorul al perechii de elemente* x, y *elementul*

$(x, y) = x \backslash (y \backslash (xy))$.

Conform definiţiei 1.3, rezultă următoarea afirmaţie:

Propoziţia 1.3. *Pentru orice elemente* $x, y, z \in L$ *au loc următoarele relaţii:*

$$xR_{y,z} = x[x, y, z],\quad zL_{y,x} = (x, y, z)z,\quad xT_y = x[x, y],$$

unde $R_{y,z}, L_{y,x}, T_y$ sunt subituţiile interne ale buclei *L* (vezi [1]).

Pentru orice submulţime *H* a buclei *L* vom nota cu $[H, L]$ subbucla generată în *L* de comutatorii şi asociatorii de dreapta şi stânga de forma $[h, x, y], (x, y, h),\ (h, x)$, unde $h \in H,\ x, y \in L$ şi îl vom numi *asociatorul-comutatorul mutual* sau *subbucla asociator- comutator mutuală* a lui *H* şi *L*. În particular, $[L,L]$ se numeşte *asociator-comutator, subbuclă asociator-comutator, subbucla derivată* a *lui L* şi se mai notează cu L'.

Propoziţia 1.4 *Subbucla H a buclei L este normală dacă şi numai dacă*

$$[H,L] \subseteq H$$

Demonstraţie. Dacă $H \triangleleft L$, atunci, conform Propoziţiei 1.3, pentru orice $h \in H$ şi orice $x, y \in L$ avem

$$hT_x = h(h,x) \in H,\ hR_{x,y} = h[h,x,y] \in H,\ hL_{x,y} = (x,y,h)h \in H$$

de unde rezultă $(h,x) \in H,\ [h,x,y] \in H,\ (x,y,h) \in H$, adică $[H,L] \subseteq H$.

Invers, presupunem că $[H,L] \subseteq H$. Deci pentru orice $h \in H$ şi orice $x, y \in L$ avem $(h,x) \in H,\ [h,x,y] \in H,\ (x,y,h) \in H$, de unde rezultă $hT_x \in H,\ hR_{x,y} \in H,\ hL_{x,y} \in H$. Prin urmare, subbucla *H* este invariantă în raport şi cu orice substituţie internă a buclei *L*. De unde rezultă că $H \triangleleft L$.

Corolar 1.1 *Dacă H este o subbuclă normală a buclei L, atunci subbucla asociator-comutator mutuală* $[H,L]$ *este normală în L.*

Conform definiţiei 1.3, nucleele de stânga $N_s(L)$, de dreapta $N_d(L)$ şi de mijloc $N_m(L)$ ale unei bucle *L* pot fi exprimate astfel:

$$N_s(L) = \{a \in L \mid [a,x,y] = 1 \ \textit{pentu}\ \forall x, y \in L\},$$

$$N_d(L) = \{a \in L \mid (x,y,a) = 1 \ \textit{pentu}\ \forall x, y \in L\},$$

$$N_m(L) = \{a \in L \mid < x,a,y >= 1 \ \textit{pentu}\ \forall x, y \in L\}.$$

Pentru orice submulţime *M* a buclei *L* vom nota cu (M,L), $[M,L,L]$, (L,L,M), $\langle L,M,L \rangle$ submulţimile lui *L* definite prin formulele

$$(M,L) = \{(a,x) \mid a \in M, x \in L\},$$
$$(L,L,M) = \{(x,y,a) \mid a \in M,\ x,y \in L\},$$
$$[M,L,L] = \{[a,x,y] \mid a \in M,\ x,y \in L\},$$
$$\langle L,M,L \rangle = \{\langle x,a,y \rangle \mid a \in M,\ x,y \in L\}.$$

Propoziţia 1.5 *Fie L o buclă, H o subbuclă a lui L şi N o subbuclă normală a lui L. Dacă* $N \subseteq H$, *atunci sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1) $H/N \subseteq Z(L/N) \Leftrightarrow [H,L] \subseteq N;$

2) $H/N \subseteq N_s(L/N) \Leftrightarrow (H,L,L) \subseteq N;$

3) $H/N \subseteq N_d(L/H) \Leftrightarrow [L,L,H] \subseteq N;$

4) $H/N \subseteq N_m(L/N) \Leftrightarrow \langle L,H,L \rangle \subseteq N.$

Demonstraţie. 1) Dacă $H/N \subseteq Z(L/N)$, atunci pentru orice $h \in H$ şi orice $x, y \in L$ avem

$$hN \cdot xN = xN \cdot hN \Rightarrow hx \cdot N = x \cdot hN \Rightarrow hx \in x \cdot hN \Rightarrow h \backslash (x \backslash (hx)) = (h,x) \in N,$$
$$(hN \cdot xN)yN = hN \cdot (xN \cdot yN) \Rightarrow (h \cdot xy)N = hN \cdot xy \Rightarrow h \cdot xy \in hN \cdot xy \Rightarrow$$
$$h \backslash ((h \cdot xy)/xy) = [h,x,y] \in N,$$
$$xN \cdot (yN \cdot hN) = (xN \cdot yN) \cdot hN \Rightarrow (x \cdot yh)N = (xy) \cdot hN \Rightarrow x \cdot yh \in xy \cdot hN = xy \cdot Nh \Rightarrow$$
$$(xy \backslash x \cdot yh)/h = (x,y,h) \in N.$$

De unde rezultă $[H,L] \subseteq N.$ Invers, fie $[H,L] \subseteq N.$ Atunci pentru orice $h \in H$ şi orice $x, y \in L$ avem $(h,x) \in N,\ [h,x,y] \in N,\ (x,y,h) \in N.$ De unde rezultă

$$\begin{aligned} & hN \cdot xN = hx \cdot N = (x \cdot h[h,x])N = xN \cdot (h[h,x])N = xN \cdot hN, \\ & (hx \cdot y)N = (h[h,x,y] \cdot xy)N = (h[h,x,y] \cdot N)(xN \cdot yN) = hN \cdot (xN \cdot yN), \\ & xN \cdot (yN \cdot hN) = (x \cdot yh)N = (xy \cdot (x,y,h)h)(hN = (xN \cdot yN) \cdot ((x,y,h)h \cdot N) = \\ & (xN \cdot yN) \cdot (N \cdot (x,y,h)h) = (xN \cdot yN) \cdot Nh = (xN \cdot yN) \cdot hN, \end{aligned}$$

şi deci $H/N \subseteq Z(L/N).$ În mod analog se demonstrează 2), 3) şi 4).

Corolar 1.2 *Pentru termenii şirului central ascendent al buclei L sunt adevărate incluziunile:* $[Z_{i+1}(L), L] \subseteq Z_i(L),\ i = 0, 1, \ldots$

Propoziţia 1.6 *Pentru orice buclă L şi orice subbuclă a sa sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1) *Dacă* $(L,L) \subseteq H$, $(L,L,H) \subseteq H$ *şi* $[H,L,L] \subseteq H$, *atunci* $H \lhd L$ *şi bucla-factor* L/H *este comutativă; invers, dacă* $H \lhd L$ *şi bucla-factor* L/H *este comutativă, atunci* $(L,L) \subseteq H$ *;*
2) *Dacă* $[L,L,L] \subseteq H$, $(H,L) \subseteq H$ *şi* $(L,L,H) \subseteq H$, *atunci* $H \lhd L$ *şi bucla-factor* L/H *este grup; invers, dacă* $H \lhd L$ *şi bucla-factor* L/H *este grup, atunci* $[L,L,L] \subseteq H$ *;*
3) *Dacă* $(L,L,L) \subseteq H$, $(H,L) \subseteq H$ *şi* $[H,L,L] \subseteq H$, *atunci* $H \lhd L$ *şi bucla-factor* L/H *este asociativă; invers, dacă* $H \lhd L$ *şi bucla-factor* L/H *este asociativă, atunci* $(L,L,L) \subseteq H$.

Demonstraţie. 1) Presupunem $(L,L) \subseteq H$, $(L,L,H) \subseteq H$ *şi* $[H,L,L] \subseteq H$. Atunci $[H,L] \subseteq H$, conform Propoziţiei 1.4 avem $H \lhd L$.
Pentru orice *x* şi orice *y* din *L* în bucla-factor L/H avem

$$xH \cdot yH = xy \cdot H = (y \cdot x(x,y)) \cdot H = y \cdot (x(x,y) \cdot H) =$$

$$y \cdot xH = yx \cdot H = yH \cdot xH,$$

deoarece $(x,y) \in H$. Deci bucla-factor L/H este comutativă.

Invers, presupunem că $H \lhd L$ şi bucla-factor L/H este comutativă. Rezultă că pentru orice $x \in L$ şi orice $y \in L$ avem $xH \cdot yH = yH \cdot xH$, de unde

$$xy \in yH \cdot xH = Hy \cdot xH = H \cdot (y \cdot xH) = (y \cdot xH)H = y \cdot xH$$

şi, deci, $x \backslash (y \backslash (xy)) = (x,y) \in H.$ Prin urmare, $(L,L) \subseteq H.$

2) Presupunem $[L,L,L] \subseteq H$, $(H,L) \subseteq H$ *şi* $(L,L,H) \subseteq H$. Atunci evident că $[H,L] \subseteq H$ şi, conform Propoziţiei 1.4, $H \lhd L$. Pentru orice $x \in L$, orice $y \in L$ şi orice $z \in L$ avem

$$(xH \cdot yH) \cdot zH = (xy \cdot z)H = (x(x,y,z) \cdot yz)H =$$

$$x[x,y,z]H \cdot (yz)H = xH \cdot yzH = xH \cdot (yH \cdot zH)$$

deoarece $[x,y,z] \in H.$ Deci bucla-factor L/H este asociativă, adică L/H este grup.

Invers, presupunem că $H \lhd L$ şi bucla-factor L/H este asociativă. Rezultă că pentru orice $x \in L$, orice $y \in L$ şi orice $z \in L$ avem $(xH \cdot yH) \cdot zH = xH \cdot (yH \cdot zH)$,de unde

$$(x \cdot y)z \in Hx \cdot (yH \cdot zH) = H(x \cdot yz) = Hx \cdot yz,$$

$$((x \cdot y)z)/yz \in Hx = xH,$$

$$x \backslash (((x \cdot y)z)/yz) = [x,y,z] \in H.$$

Prin urmare, $[L,L,L] \subseteq H$.

3) Presupunem $(L,L,L) \subseteq H$, $(H,L) \subseteq H$ *şi* $[H,L,L] \subseteq H$. Atunci $[H,L] \subseteq H$ şi, conform Propoziţiei 1.4, $H \lhd L$. Pentru orice $x \in L$, orice $y \in L$ şi orice $z \in L$ avem

$$xH \cdot (yH \cdot zH) = (x \cdot yz)H = (xy \cdot (x,y,z)z)H = xy \cdot ((x,y,z)z \cdot H) =$$

$$xy \cdot (H \cdot (x,y,z)z) = xy \cdot Hz = xy \cdot zH = (xy \cdot z)H = (xH \cdot yH) \cdot zH$$

deoarece $(x,y,z) \in H$. Deci bucla-factor L/H este asociativă, adică L/H este grup.

Invers, presupunem $H \lhd L$ şi L/H este grup. Rezultă că pentru orice $x \in L$, orice $y \in L$ şi orice $z \in L$ avem $xH \cdot (yH \cdot zH) = (xH \cdot yH)zH$ de unde

$$x \cdot yz \in (xH \cdot yH) \cdot zH = (xy \cdot z)H = xy \cdot zH,$$

$$xy \backslash (x \cdot yz) \in zH = Hz,$$

$$(xy \backslash (x \cdot yz)) / z = (x,y,z) \in H.$$

Prin urmare, $(L,L,L) \subseteq H$.

Corolar 1.3 *Dacă* $L' \subseteq H$ *, atunci* $H \lhd L$ *şi bucla-factor* L/H *este grup abelian. Invers, dacă* $H \lhd L$ *şi bucla-factor* L/H *este grup abelian, atunci* $L' \subseteq H$.

Propoziţia 1.7 *a) Dacă L şi H sunt două bucle şi* $\varphi : L \to H$ *este un omomorfism surjectiv, atunci* $\varphi(L^{(k)}) = H^{(k)}$, $\varphi(L_k) = H_k$ *pentru* $k = 0,1,2,...$;

Corolar 1.4 *Dacă L este o buclă şi H o subbuclă normală a sa, atunci pentru şirul derivat şi şirul central descendent al buclei factor* L/H *avem*

$$(L/K)^{(k)} = (L^{(k)}H)/H, \ (L/H)_{(k)} = (L_k H)/H \text{ pentru } k = 0,1,2, ...$$

Această afirmaţie rezultă aplicând teorema de mai sus omomorfismului natural $\varphi : L \to L/H, \ \varphi(x) = xH \ (x \in L)$.

Corolar 1.5 *Pentru orice buclă L, termenii şirului derivat* $L^{(k)}, k = 0,1,...$ *şi termenii şirului descendent* $L_k, k = 0,1,...$ *sunt subbucle deplin invariante.*

Bibliografie

[1] Chein O., Pflugfeider Y.O., Smith J., *Quasigroups and loops: Theory and Applications,* Berlin: Heldermann-Verlag, 1990.

[2] Белоусов В.Д. *Основы теории квазигрупп и луп.* М.: Мир, 1967.

[3] Bruck R.H. *A Survey of Binary Systems*. Springer Verlag, Berlin- Heidelberg-New York, 1958.

[4] Bruck R.H., *Simple quasigroups,* Bull. Amer. Math. Soc., 50, 769-781 (1944).

[5] 1. V. Ursu, E. Ursu, *Subbucle consolidate şi relaţii induse de ele I,*Conferinţa tehnic-ştiinţifică a colaboratorilor, doctoranzilor şi studenţilor UTM, Chişinău, Editura "Tehnica-UTM" (2014), p.234-241.

[6] Bates G.E., *Decompozitions of a loop into characteristic free summands,* Bull. Amer. Math. Soc., 54, 566-574 (1948).