Sinteza SRA cu performanțe impuse în baza criteriului gradului maximal de stabilitate

Ion FIODOROV, Olga FIODOROV
Technical University of Moldova
fiodorov_ion@yahoo.com

Abstract: **Se propune o metodă de acordare a regulatoarelor liniare tipizate pentru sinteza sistemelor de reglare automată (SRA) cu grad maximal de stabilitate şi performanțe impuse. Se prezintă algoritmul de sinteză a SRA cu grad maximal de stabilitate la modele de obiecte cu parametrii cunoscuți.**

Cuvinte-cheie: **sistem de reglare automată, regulatoare tipizate, acordarea regulatoarelor, grad maximal de stabilitate.**

I. INTRODUCERE

Unul din criteriile importante pentru sinteza SRA liniare este criteriul gradului maximal de stabilitate. Sistemul proiectat în baza acestui criteriu posedă astfel de proprietăți cum ar fi robustețe la variația într-un domeniu foarte larg a parametrilor obiectelor reglate, aşa şi performanțe de funcționare destul de înalte.

În [1] a fost examinată problema sintezei optimale a SRA în baza criteriului gradului maximal de stabilitate. În lucrarea dată se propune sinteza sistemelor cu grad maximal de stabilitate cu posibilitatea impunerii şi optimizării performanțelor de lucru.

II. FORMULAREA ŞI SOLUȚIONAREA PROBLEMEI

Problema sintezei sistemelor de reglare automată cu grad maximal de stabilitate se formulează în felul următor. Se dă structura sistemului de reglare automată (SRA) şi este necesar de a determina un vector al parametrilor dinamici ai regulatorului, astfel încât să se îndeplinească condiția

$$J = \max_{b_j} \eta(b_j),\ j = 1,...,m, \tag{1}$$

unde J este gradul maximal de stabilitate; η - gradul de stabilitate al SRA; b_j - coeficienții dinamici de acord ai legii de reglare P, PI, PID; m - numărul parametrilor de acord în legea de reglare. Numărul parametrilor regulatorului trebuie să satisfacă condiția $m \le (n-1)$, n - gradul ecuației caracteristice.

La baza soluționării problemei formulate stă următoarea afirmație.

Afirmație. *Gradul de stabilitate maximal posibil al SRA poate fi atins atunci când părțile reale ale tuturor rădăcinilor ecuației caracteristice sunt egale între ele* [2].

Presupunem că SRA proiectat se caracterizează cu următoarea ecuație caracteristică

$$\begin{aligned} A(p,b_j) &= a_0 p^n + \sum_{i=1}^{n} a_i p^{n-i} + k\sum_{j=1}^{m} b_j p^{m-j} = \\ &= d_0 p^n + d_1 p^{n-1} + ... + d_{n-1} p + d_n = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

unde a_i sunt coeficienții funcției de transfer a modelului obiectului condus; ; k - coeficientul de transfer al modelului obiectului;

$d_0 = a_0;\ d_i = f_i(a_i),\ i = 1,...,(n-m)$;

$d_i = f_i(k, a_i, b_j), i = ((n-(m-1)),...,n),\ j = 1,...,m$.

Rădăcinile ecuației caracteristice sunt, în general, perechi de rădăcini complexe:

$$p_k = \pm j\omega_k - \alpha_k, \tag{3}$$

unde k - numărul de ordine a perechei de rădăcini complexe, ω_k - valoarea părții imaginare a rădăcinii complexe p_k, α_k - valoarea părții reale a rădăcinii complexe.

Reieşind din afirmația de mai sus şi substituind în (3)

$$\alpha_k = J, \tag{4}$$

ecuația caracteristică (2) poate fi transcrisă prin descompunerea ei în n factori liniari:

$$\begin{aligned} A(p) &= d_0 \prod_{k=1}^{z} (p - j\omega_k + J)(p + j\omega_k + J) \prod^{r} (p + J) = \\ &= q_0 p^n + q_1 p^{n-1} + ... + q_{n-1} p + q_n = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

unde z este numărul perechilor de rădăcini complexe; r - numărul de rădăcini reale; $n = 2z + r$ - gradul ecuației caracteristice a SRA proiectat; $q_0 = d_0 = a_0$; $q_i = f_i(a_0, J, \omega_k), i = (1,...,n)$.

Expresiile (2) şi (5) sunt echivalente, deoarece reprezintă ecuațiile caracteristice ale unuia şi aceluiaşi sistem automat. Din acest motiv coeficienții de pe lângă variabilele de acelaşi ordin din ambele ecuații sunt egali între ei.

Reieşind din aceste considerente putem scrie următoarea egalitate:

$$d_i(a_i) = q_i(a_0, J, \omega_k),\ i = (n-m), \tag{6}$$

de unde după unele transformări şi punând $\omega_k = 0$, putem primi expresia pentru determinarea gradului maximal de stabilitate J al SRA proiectat

$$J = f(a_0, a_i),\ i = (n-m). \tag{7}$$

Iar din egalitățile

$$\begin{aligned} &d_i(k, a_i, b_j) = q_i(a_0, J, \omega_k), \\ &i = ((n-(m-1)),...,n),\ j = 1,...,m \end{aligned} \tag{8}$$

ce reprezintă egalarea coeficienților ecuației caracteristice (2), care include parametrii dinamici ai legii de reglare aleasă, cu coeficienții de pe lângă variabilele de acelaşi ordin din ecuația (5), după unele transformări, se obțin expresiile pentru calculul parametrilor de acord b_j ai legii de reglare alese

$$\begin{aligned} &b_j = f_j(k, a_0, a_i, J, \omega_k); \\ &i = ((n-(m-1)),...,n),\ \ j = (1,...,m), \end{aligned} \tag{9}$$

unde parametrii liberi ω_k reprezintă părțile imaginare ale rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului sintetizat cu regulatorul respectiv, şi în dependență de valorile ce le primesc pot fi sintetizate SRA cu procese tranzitorii aperiodice, monotone cu suprareglaj impus $\sigma\%$, sau oscilatorii cu grad de oscilanță impus m sau cu grad de amortizare impus ψ, deoarece $\sigma\%$, m şi ψ sunt într-o dependenţă faţă de părţile imaginare ale rădăcinilor ω_k [3].

În continuare, determinăm în ce relaţie se află gradul maximal de stabilitate al SRA obţinut în rezultatul tehnicii expuse mai sus şi gradele maximale de stabilitate determinate în conformitate cu criteriul gradului maximal de stabilitate pentru sinteza optimă a parametrilor dinamici ai regulatoarelor tipizate.

În cazul criteriului gradului maximal de stabilitate pentru sinteza optimă a parametrilor dinamici ai regulatoarelor tipizate, expresia generalizată pentru determinarea gradelor maximale de stabilitate ale SRA se reprezintă astfel [1]:

$$A_{n-m}(-J) = A_n^{(m)}(-J) =$$
$$= (-1)^n c_0 J^{n-m} + (-1)^{n-1} c_1 J^{n-m-1} + ... \qquad (10)$$
$$... + (-1)^{m+1} c_{n-m-1} J + (-1)^m c_{n-m} = 0,$$

care se obţine în urma derivării ecuaţiei caracteristice (2) de m ori pe variabila J (conform numărului de parametri de acord prezenţi în legea de reglare respectivă), $c_0, c_1, ..., c_n$ depind numai de parametrii funcţiei de transfer a modelului obiectului reglat.

O caracteristică generalizată a valorilor numerice ale coeficienţilor ecuaţiei algebrice (10) şi a rădăcinilor ei poate servi parametrul [3]:

$$J_{mg} = \sqrt[n]{|J_1 J_2 ... J_n|} = \sqrt[n]{c_{n-m} / c_0}\,, \qquad (11)$$

numit rădăcină medie geometrică, ce reprezintă distanţa centrului constelaţiei rădăcinilor ecuaţiei faţă de axa imaginară.

Efectuând unele calcule pentru diferite modele de obiecte şi regulatoare tipizate, şi analizând rezultatele primite s-a ajuns la concluzia că expresia pentru determinarea gradului maximal de stabilitate al SRA (7) este identică cu expresia ce exprimă media geometrică a rădăcinilor ecuaţiilor algebrice pentru determinarea gradelor maximale de stabilitate (11).

Prin urmare, utilizarea tehnicii expuse mai sus permite de a obţine valoarea gradului maximal de stabilitate egală cu media geometrică a rădăcinilor ecuaţiei pentru determinarea gradelor maximale de stabilitate ale SRA (10). Faptul acesta ne demonstrează că gradul de stabilitate J, obţinut prin metoda dată, reprezintă gradul de stabilitate maximal posibil ce poate fi impus sistemului de reglare automată proiectat.

Pentru cazul când se îndeplineşte condiţia $m = (n-1)$ gradul maximal de stabilitate J al SRA este egal cu gradul optimal de stabilitate J_0 şi se determină în conformitate cu următoarea relaţie:

$$J = J_0 = \frac{a_1}{n a_0}\,. \qquad (12)$$

Dacă în expresiile pentru calculul parametrilor de acord (9) $\omega_k = 0$, atunci în calitate de variabilă poate fi gradul de stabilitate J al SRA, care după cum se cunoaşte este invers proporţional duratei regimului tranzitoriu t_t al procesului indicial [3].

Substituind în (9) valoarea lui J, calculată pentru un t_t oarecare, se determină valorile parametrilor dinamici ai legii de reglare aleasă, ce asigură un proces indicial cu durata regimului tranzitoriu impusă.

III. ALGORITM DE SINTEZĂ A SRA CU PERFORMANŢE IMPUSE ÎN BAZA CRITERIULUI GRADULUI MAXIMAL DE STABILITATE

Pentru aplicaţii algoritmul de sinteză a SRA cu grad maximal de stabilitate la modele de obiecte cu parametrii cunoscuţi se reduce la parcurgerea următorilor paşi:

1. Se determină funcţia de transfer a SRA în circuit închis cu regulatorul tipizat selectat.
2. Se obţine ecuaţia caracteristică a sistemului în buclă închisă

$$A(p, b_j) = d_0 p^n + d_1 p^{n-1} + ... + d_{n-1} p + d_n = 0\,.$$

3. Utilizând substituţia $p_k = \pm j\omega_k - J$, ecuaţia caracteristică a SRA se descompune în n factori liniari şi se aduce la forma

$$A(p) = d_0 \prod_{k=1}^{z} (p - j\omega_k + J)(p + j\omega_k + J) \prod^{r} (p + J) =$$
$$= q_0 p^n + q_1 p^{n-1} + ... + q_{n-1} p + q_n = 0,$$

unde J - gradul maximal de stabilitate al SRA; z - numărul perechilor de rădăcini complexe; r - numărul de rădăcini reale; $n = 2z + r$ - gradul ecuaţiei caracteristice a SRA proiectat.

4. Din egalitatea

$$d_i(a_i) = q_i(a_0, J, \omega_k),\ i = (n-m),\ \omega_k = 0\,,$$

după unele transformări, obţinem expresia pentru determinarea gradului maximal de stabilitate J al SRA proiectat

$$J = f(a_0, a_i),\ i = (n-m)\,,$$

unde m - numărul parametrilor de acord în legea de reglare; a_i - parametrii funcţiei de transfer a modelului obiectului reglat.

5. Utilizând egalităţile

$$d_i(k,\ a_i,\ b_j) = q_i(a_0, J,\ \omega_k),$$
$$i = (n-(m-1),...,n),\ j = 1,...,m,$$

se determină expresiile pentru calculul parametrilor de acord ai regulatorului tipizat ales

$$b_j = f_j(k,\ a_0,\ a_i,\ J,\ \omega_k);$$
$$i = ((n-(m-1)),...,n), \quad j = (1,...,m).$$

6. Variind partea imaginară a rădăcinilor complexe ω_k sau gradul de stabilitate J putem să impunem sau să optimizăm performanţele procesului indicial al SRA: suprareglajul $\sigma\%$, gradul de amortizare ψ sau durata regimului tranzitoriu t_t.

IV. CONCLUZII

S-a propus un algoritm de sinteză a SRA cu performanţe impuse în baza criteriului gradului maximal de stabilitate.

Metoda propusă reprezintă o metodă algebrică, care constă din următoarele etape: determinarea expresiei pentru calculul gradului maximal de stabilitate al SRA; obţinerea expresiilor algebrice pentru determinarea parametrilor de acord ai regulatorului tipizat din ecuaţia caracteristică a sistemului şi ecuaţia obţinută prin descompunerea ecuaţiei caracteristice în factori liniari; variind gradul de stabilitate J sau partea imaginară a rădăcinilor complexe ω_k putem să impunem sau să optimizăm performanţele procesului indicial al SRA proiectat.

BIBLIOGRAFIE

[1] Izvoreanu B., Sârbu V., Doni V., Fiodorov I. *Tuning of Linear Regulators for Objects Models by Maximal Stability Degree.* // Proceedings of the 5th Symposium on Automatic Control and Computer Science. - Iaşi, 1995. - Vol.1, p.335-338.

[2] Ким Д. П., Дмитриева Н. Д. *Сборник задач по теории автоматического управления* – М.: Физматлит, 2007 – 165с.

[3] Макаров И. М., Менский Б. М. *Линейные автоматические системы.* – М.: Машиностро-ение, 1982 - 504 с.