DESPRE O PROBLEMĂ DE CONCENTRAŢIE A SOLUŢIEI

Autor: Victor TELEPAN, grupa CIC - 1303
Coordonator ştiinţific: conf.univ., dr. Ion LEAH

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *In the present paper is examined a problem of a technological nature, wich requires to establish the quantity of salt in a solution depending on time. The mathematical model of the problem is deduced according to the form of a differential equation. This equation can be resolved in quadratures. Two important particular cases are examined, which contain initial conditions as well. In this cases the equation can be resolved completely.*

Cuvinte cheie: *model matematic, ecuaţie diferenţială, condiţii iniţiale, problema Cauchy.*

Problema examinată în această lucrare se referă la concentraţia soluţiei apoase a unei substanţe arbitrare. Se obţine modelul matematic al acestei probleme.

Problema este următoarea. Fie că un vas de volum *V* este umplut cu o soluţie de oarecare substanţă numită, pentru simplitate, sare, dar care poate fi şi o suspensie. Fie că această sare se introduce în vas cu o viteză variabilă $q=q(t)$. Volumul de sare ce se introduce în vas poate fi neglijat, el fiind nesemnificativ în raport cu volumul vasului *V*. În continuare, vom presupune că în vas se introduce apă curată cu o viteză constantă *v*. După amestecarea soluţiei până la o consistenţă omogenă, aceasta se scurge din vas cu aceeaşi viteză *v*. Se pune problema de a stabili cantitatea de sare din soluţie în funcţie de timp: $m = m(t)$

Pentru început, să precizăm noţiunea de viteză ca funcţie de timp. Fixăm un moment de timp *t* şi dăm acestei valori o creştere Δt. În intervalul de timp dintre *t* şi $t+\Delta t$ în vas pătrunde o cantitate de sare pe care o notăm cu Δm. Raportul $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ reprezintă *viteza medie* de pătrundere a sării în vas. Prin viteza de pătrundere a sării în vas în momentul de timp *t* (viteza instantanee de pătrundere) vom înţelege limita acestui raport pentru Δt tinzând la 0:

$$q = q(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}. \tag{1}$$

Să examinăm acum problema. Vom nota cu *m* cantitatea de sare din vas în momentul de timp *t*. Mărimile *q*, *t* şi *m* sunt variabile, prin urmare metodele matematicii elementare nu pot fi utilizate. Vom aplica metode ale calculului diferenţial şi integral [1]. Fie că în momentul arbitrar de timp *t* cantitatea de sare din vas este $m = m(t)$. Dăm argumentului *t* o creştere Δt şi examinăm schimbarea cantităţii de sare în intervalul de timp dintre *t* şi $t+\Delta t$. Vom considera că în acest interval de timp, de durată Δt, viteza de pătrundere a sării în vas este constantă şi egală cu viteza ei în momentul de timp *t*. Prin urmare, în vas s-a introdus o cantitate de sare egală cu $q(t)\cdot\Delta t$ sau $q\cdot\Delta t$.

Să urmărim, câtă sare s-a scurs din vas în acest interval de timp. În vas s-a introdus o cantitate de apă egală cu $v\cdot\Delta t$; aceeaşi cantitate de soluţie s-a scurs din vas. Dacă notăm cu *x* cantitatea de sare ce se conţine în acest volum, obţinem proporţia $\frac{V}{m} = \frac{v\cdot\Delta t}{x}$, de unde $x = \frac{m\cdot v\cdot\Delta t}{V}$. Diferenţa dintre cantitatea de sare introdusă în vas şi cea eliminată din vas reprezintă variaţia funcţiei m:

$$\Delta m = q\cdot\Delta t - \frac{m\cdot v\cdot\Delta t}{V} = \left(q - \frac{mv}{V}\right)\cdot\Delta t, \tag{2}$$

de unde, prin împărţirea la Δt obţinem $\frac{\Delta m}{\Delta t} = q - \frac{mv}{V}$. În această egalitate trecem la limită pentru $\Delta t \to 0$. Cum limita părţii stângi este m', iar partea dreaptă este constantă în raport cu Δt, şi limita constantei este însăşi constanta, se obţine $m' = q - \frac{mv}{V}$, sau

$$m' + \frac{v}{V} \cdot m = q \,. \tag{3}$$

Ecuaţia obţinută (3) reprezintă modelul matematic al cantităţii de sare din vas. Aceasta este o *ecuaţie diferenţială liniară* de ordinul 1, care se rezolvă *în cuadraturi*. Soluţia ei depinde de funcţia din partea dreaptă $q = q(t)$ şi se exprimă prin integrale.

Vom examina două cazuri particulare ale funcţiei q, care se întâlnesc mai des în practică.

1. Fie că funcţia q este constantă, $q =$ const. Ecuaţia (3) are aceeaşi formă

$$m' + \frac{v}{V} \cdot m = q, \tag{4}$$

dar cu q constant. Vom mai presupune că este îndeplinită condiţia iniţială $m(0) = m_0$. Aceasta înseamnă că în momentul iniţial de timp $t = 0$ cantitatea de sare din vas era cunoscută şi avea valoarea m_0. Aplicând metoda lui Lagrange de rezolvare a ecuaţiei diferenţiale liniare, se află soluţia generală a ecuaţiei (4):

$$m = \frac{qV}{v} + Ce^{-\frac{v}{V} \cdot t}, \tag{5}$$

unde C este o constantă arbitrară. Folosind condiţia iniţială $m(0) = m_0$, se află constanta C:

$C = m_0 - \frac{qV}{v}$, iar apoi şi soluţia problemei Cauchy a ecuaţiei diferenţiale (2):

$$m = \frac{qV}{v} + \left(m_0 - \frac{qV}{v} \right) \cdot e^{-\frac{v}{V} \cdot t} \,. \tag{6}$$

2. Fie că funcţia v are forma $v = e^{-kt+b}$, unde $k > 0$. Asemenea situaţii se întâlnesc frecvent în probleme tehnologice [2]. Ca exemplu poate servi procesul de răcire a unui corp, descris printr-o lege a lui Newton, sau procesul dezintegrării unei substanţe radioactive. În acest caz ecuaţia (3) capătă forma

$$m' + \frac{v}{V} \cdot m = e^{-kt+b}, \tag{7}$$

care de asemenea este de tip liniar. Presupunem şi acum că este îndeplinită condiţia iniţială $m(0) = m_0$. Şi în acest caz, rezolvând ecuaţia (3) ca o ecuaţie liniară, se află soluţia ei

$$m = \frac{V}{v - kV} e^{-kt+b} + \left(m_0 - \frac{V}{v - kV} e^{b} \right) e^{-\frac{v}{V} \cdot t}, \tag{8}$$

care satisface condiţia iniţială $m(0) = m_0$.

Remarci

1. Cunoscând cantitatea de sare din soluţie, se poate afla concentraţia acestei soluţii în funcţie de timp.

2. Modelul matematic (3) poate fi aplicat şi în alte probleme. În locul cantităţii de sare poate fi cantitatea de sarcini electrice într-un conductor sau cantitatea de căldură ce se transferă de la un corp la altul. De asemenea, acesta poate fi aplicat în problema de purificare a aerului, cum s-a făcut, de exemplu, în [3]; şi în acest caz se obţine o ecuaţie diferenţială de forma (3).

3. În măsura necesităţilor, se poate rezolva şi problema inversă. Dacă concentraţia soluţiei nu trebuie să depăşească o anumită valoare critică, din expresia pentru funcţia $m = m(t)$ se poate afla care va fi acel moment de timp t, în care această valoare critică va fi realizată. Respectiv, se pot lua măsurile necesare.

Bibliografie

1. Piskunov, N.S. *Calcul diferenţial şi integral*. *Vol. 2*. Chişinău, Ed. Lumina, 1992.
2. Амелькин, В.В. *Дифференциальные уравнения в приложениях*. М., Наука, 1987.
3. Clipa, E. *Asupra unei probleme de purificare a aerului*. Conferinţa tehnico-ştiinţifică a colaboratori-lor, doctoranzilor şi studenţilor. Chişinău, U.T.M., 2007, p. 280.