ECUAȚIILE CONSTITUTIVE MACROSCOPICE ALE PROCESELOR MONOTONE TERMOVÂSCOELASTOPLASTICE

N. Sveatenco, dr.fiz.mat.
Universitatea Tehnică a Moldovei

INTRODUCERE

La construirea ecuațiilor constitutive trebuie să ia în considerare de influența caracterului microneomogen de deformare asupra comportării materialului policristalin la scară macroscopică. Modelele propuse în [1,2,4,5,9,10] se bazează pe noțiunea de suprafața de curgere. Totuşi, la nivel de macrostructură noțiunea de suprafață de curgere, obținută prin medierea unui număr infinit de suprafețe ale subelementelor, îşi pierde sensul geometric; aceste suprafețe în procesul de deformare se intersectează şi relațiile între macrotensiuni şi deformații nu pot fi construite în cadrul calcului diferențial. Condiția de curgere în modelul examinat nu conține noțiunea de suprafață de curgere, şi de aceea asigură trecerea continuă de la starea reversibilă la starea ireversibilă.

1. PRINCIPIILE TRECERII DE LA STAREA MICRO LA CEA MACRO ŞI ECUAȚIILE FIZICE LOCALE ALE MODELULUI STRUCTURAL

Se examinează un element macroscopic care la momentul de timp inițial se află într-o stare liberă naturală, apoi fiind supus unor acțiunii mecanice şi termice. Se admite că în procesul de solicitare, comportarea materialului depinde considerabil de viteza de solicitare şi de încălzire.

Pentru a descrie comportarea mediului microneomogen elementul macroscopic omogen al corpului policristalin de volum V_0 mărginit de suprafața S_0, se consideră compus dintr-un număr infinit de subelemente legate cinematic între ele. Subelementul ca cea mai mică unitate a structurii se identifică cu mulțimea tuturor particulelor materiale în interiorul conglomeratului V_0 care au acelaşi tensor al deformațiilor ireversibile

$$\overline{p}_{ij} = \widetilde{p}_{ij}, \qquad \overline{p}_{ij} = \left\langle \widetilde{p}_{ij} \right\rangle_{\overline{V}}, \tag{1}$$

unde prin $\overline{p}_{ij}$ se subînțeleg deformațiile ireversibile medii în subelementul de volum $\overline{V}$.

Componența particulelor materiale în subelement rămâne neschimbată în toate procesele de deformare a conglomeratului. Particulele aceluiaşi subelement pot avea diferite orientări şi situații în spațiul conglomeratului. Deoarece granulele agregatului policristalin se deformează neuniform, conform definiției acceptate masa şi volumul unui singur subelement pot fi mărimi oricât de mici. Este evident, că pornind de la selecția particulelor materiale după tensorul deformațiilor ireversibile, celelalte mărimi termomecanice variază de la o particulă materială la altă în subelementul dat.

În ciuda faptului că subelementele posedă numai proprietăți elementare, totalitatea lor datorită interacțiunilor dintre ele posedă un spectru extrem de larg de proprietăți. Proprietățile conglomeratului sunt cu mult mai variate decât suma proprietăților elementelor de structură din care este compus.

Trecerea de la tensiunile $\widetilde{t}_{ij}$ şi deformațiile $\widetilde{d}_{ij}$ la scară microscopică, la cele macroscopice t_{ij}, d_{ij} se efectuează în baza ecuațiilor de echilibru şi a relațiilor geometrice, care sunt satisfăcute în fiecare micropunct în interiorul domeniului V_0

$$\widetilde{t}_{ij,j} + b_i = 0\,, \qquad \widetilde{d}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{u}_{i,j} + \widetilde{u}_{j,i}\right), \tag{1}$$

şi condițiilor de omogenitate a tensiunilor şi a deformațiilor pe suprafața conglomeratului S_0

$$\widetilde{u}_i\big|_{S_0} = u_i = d_{ij} x_j\,, \qquad d_{ij} = const\,, \tag{2}$$

$$f_i^{(n)}\Big|_{S_0} = t_{ij} n_j = \widetilde{t}_{ij} n_j\Big|_{S_0}\,, \qquad t_{ij} = const\,, \tag{3}$$

unde $\mathbf{f}(S_0)$ este forța de suprafață, $\mathbf{u}(S_0)$ sunt deplasările pe suprafața conglomeratului S_0.

Interconexiunea dintre mărimile microscopice luate în medie şi analoagele lor macroscopice, care figurează în condițiile la limită (2), (3) se stabileşte în baza relațiilor (1):

$$t_{ij} = \left\langle \widetilde{t}_{ij} \right\rangle_{V_0}\,, \qquad d_{ij} = \left\langle \widetilde{d}_{ij} \right\rangle_{V_0}\,. \tag{4}$$

Prin urmare, în baza legii întâi a termodinamicii şi expresiilor (1) - (3) se poate deduce teorema lui Hill [4]

$$t_{ij}d_{ij} = \left\langle \tilde{t}_{ij}\tilde{d}_{ij} \right\rangle = \left\langle \tilde{t}_{ij} \right\rangle \left\langle \tilde{d}_{ij} \right\rangle . \qquad (5)$$

Câmpurile aleatoare ale tensiunilor şi deformațiilor vom reprezenta sub forma de sumă a aşteptărilor matematice şi fluctuațiilor:

$$\bar{t}_{ij} = t_{ij} + \Delta\bar{t}_{ij}, \quad \bar{d}_{ij} = d_{ij} + \Delta\bar{d}_{ij}, \qquad (6)$$

unde conform (4) - (5)

$$\left\langle \Delta\bar{t}_{ij} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \Delta\bar{d}_{ij} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \Delta\bar{t}_{ij}\Delta\bar{d}_{ij} \right\rangle = 0. \qquad (7)$$

În baza principiului fluctuației tensiunilor şi deformațiilor formulat de V.Marina [7], legii întâi a termodinamicii, precum şi legii de variație elastică a volumului, în lucrările [8,11] a fost obținută schema generală de interacțiune cinematică dintre sub-elemente în conglomerat:

$$\Delta\bar{t}_{ij} = -B\Delta\bar{d}_{ij} + \alpha\sqrt{\frac{B(B+K)}{3}\Delta\bar{d}_{nm}\Delta\bar{d}_{nm}}\;\delta_{ij}, \qquad (8)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & dacă \quad \bar{d}_{nm}\bar{d}_{nm} > d_{pq}d_{pq} \\ -1, & dacă \quad \bar{d}_{nm}\bar{d}_{nm} \le d_{pq}d_{pq} \end{cases},$$

unde K este modulul de compresibilitate volumică; iar parametrul interior B reflectă concomitent neomogenitatea decurgerii proceselor de deformare şi solicitare subelementelor în conglomerat. Relațiile (8) asigură trecerea de la starea micro la cea macro.

În consecință a descompunerii fluctuațiilor tensiunilor şi deformațiilor în componente deviatoare şi sferice

$$\Delta\bar{t}_{ij} = \Delta\bar{\sigma}_{ij} + \Delta\bar{\sigma}_0\delta_{ij}, \quad \Delta\bar{d}_{ij} = \Delta\bar{\varepsilon}_{ij} + \Delta\bar{\varepsilon}_0\delta_{ij}. \qquad (9)$$

sunt obținute două grupe de ecuații

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij} = -B\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}, \qquad (10)$$

$$\Delta\bar{\sigma}_0 = \alpha\sqrt{\frac{BK}{3}\Delta\bar{\varepsilon}_{nm}\Delta\bar{\varepsilon}_{nm}}, \qquad (11)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & dacă \quad \bar{\varepsilon}_{nm}\bar{\varepsilon}_{nm} > \varepsilon_{pq}\varepsilon_{pq} \\ -1, & dacă \quad \bar{\varepsilon}_{nm}\bar{\varepsilon}_{nm} \le \varepsilon_{pq}\varepsilon_{pq} \end{cases}.$$

La descrierea comportării neelastice a conglomeratului policristalin cea mai importantă este estimarea influenței dezvoltării neomogenității deformațiilor ireversibile în interiorul volumului V_0 asupra relației macroscopice dintre tensiuni şi deformații. De aceea interconexiunea locală în cadrul modelului examinat se stabileşte dintre deformații reversibile $\bar{e}_{ij}$ şi ireversibile $\bar{p}_{ij}$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{e}_{ij} + \bar{p}_{ij}. \qquad (12)$$

Având în vedere că proprietățile elastice ale subelementelor şi ale elementului corpului se presupun identice

$$\bar{e}_{ij} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{2G}, \quad e_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G}, \qquad (13)$$

din (10) obținem ecuațiile fluctuațiilor deformațiilor reversibile şi ireversibile:

$$\bar{e}_{ij} - e_{ij} = m\left(p_{ij} - \bar{p}_{ij}\right), \quad m = \frac{B}{B+2G}. \qquad (14)$$

Parametrul interior necunoscut m se precizează în baza principiului discordanței măsurilor formulat de V.Marina [7,8]: în toate interacțiunile reale în conglomerat discordanța dintre măsura macroscopică şi analogul microscopic potrivit atinge valori extreme

$$\left\langle \bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle - \left\langle \bar{\sigma}_{ij} \right\rangle \left\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle = Extr. \qquad (15)$$

Din condiția extremului discordanței Δ obținem că parametrul schemei cinematice m depinde de coeficientul de ecruisare lineară a_0 [12]:

$$m = -a_0 + \sqrt{a_0 + a_0^{\,2}}. \qquad (16)$$

Proprietățile tensoriale ale subelementelor în stare “liberă” se definesc, presupusă fiind posibilitatea descompunerii componentelor deviatorului deformațiilor elastice $\bar{e}_{ij}$ după tangenta şi după secanta la traiectoria deformării ireversibile

$$\bar{e}_{ij} = \bar{\tau}\frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}} + \bar{r}\frac{\bar{p}_{ij}}{\bar{p}}, \qquad d\bar{\lambda} = \sqrt{d\bar{p}_{ij}d\bar{p}_{ij}}. \qquad (17)$$

Ca parametrul de stare ce identifică funcționalele $\bar{\tau}$ şi $\bar{r}$ cu subelementul anumit se alege ponderea subelementelor deformate ireversibil $\psi\ (0 \le \psi \le 1)$ care reflectă succesiunea de trecere a subelementelor din starea reversibilă în cea ireversibilă la solicitarea inițială.

Starea termomecanică a subelementului în conglomerat depinde nu numai de valorile proprii ale parametrilor fizici, ci şi de starea altor subelemente. De aceea proprietățile subelementului în conglomerat se deosebesc de proprietățile subelementului în stare liberă. Pentru a reflecta cantitativ această variație a proprietăților în cadrul modelului examinat se admite că toate modurile de interacțiune dintre subelemente în conglomerat se formează numai sub influența legăturilor medii, adică particulele materiale în conglomerat nu se pot deforma de sine stătător, ci numai într-un mod coordonat.

Fenomenul de autoconcordanță a proceselor de deformare ireversibile ale subelementelor în cadrul principiului legăturilor medii poate fi reprezentat în modul de două ecuații [6, 12]:

– condiție de curgere în subelementul supus modificărilor structurale în conglomerat

$$\bar{e}_{ij}\frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}} = \tau(\psi,\gamma,\upsilon,s)+\bar{r}\cos\bar{\alpha}\,, \qquad (18)$$

$$d\bar{\lambda} = \sqrt{d\bar{p}_{ij}d\bar{p}_{ij}}\,, \qquad \cos\bar{\alpha} = \frac{\bar{p}_{ij}}{\bar{p}}\frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}}\,; \qquad (19)$$

– lege despre orientarea generală a proceselor de curgere ireversibilă în subelemente

$$\frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{p}} = \frac{dp_{ij}}{dp}\,, \qquad (20)$$

$$d\bar{p} = d\sqrt{\bar{p}_{ij}\bar{p}_{ij}}\,, \qquad dp = d\sqrt{p_{ij}p_{ij}}\,, \qquad (21)$$

unde $\bar{\alpha}$ este unghiul dintre tangenta la traiectoria deformației ireversibile și vectorul deformației ireversibile.

Funcționalul $\tau(\psi,\gamma,\upsilon,s)$ se precizează în baza legii creşterii centrale a deformațiilor ireversibile a lui V.Marina [6]: proprietățile scalare ale subelementelor pot fi prezentate sub formă de sumă a proprietăților termovâscoplastice în stare structural stabilă $\tau(\psi,\gamma,\upsilon)$ și celor care provin din modificarea structurii în procesele ireversibile

$$\tau(\psi,\gamma,\upsilon,s) = \tau(\psi,\gamma,\upsilon)+s\,. \qquad (22)$$

$\tau(\psi,\gamma,\upsilon)$ poate fi identificat cu limita de curgere inițială a subelementului.

Ecuația evolutivă pentru parametrul de stare $\bar{s}$, ce caracterizează ecruisarea izotropă în urma modificării structurii în procesele ireversibile, se admite sub forma

$$\dot{\bar{s}} = \begin{cases} a\sqrt{\dot{\bar{p}}_{ij}\dot{\bar{p}}_{ij}}\,, & \bar{s} < \bar{x}(\gamma,\upsilon), \\ \dot{\bar{x}}, & \bar{s} = \bar{x}(\gamma,\upsilon). \end{cases} \qquad (23)$$

La începutul procesului de deformare ireversibilă $\bar{s}\big|_{t=0} = s_0$, unde s_0 depinde de tipul tratamentului termic al materialului. Dacă la începutul procesului de deformare ireversibilă materialul se află în stare structural stabilă, atunci $s_0 = 0$.

Relația dintre ecruisarea cinematică $\bar{r}$ și parametrii de stare se exprimă în felul următor

$$\bar{r} = \begin{cases} a_0\bar{p}, & a_0\bar{p} < \bar{x}_0(\gamma,\upsilon), \\ \bar{x}_0(\gamma,\upsilon), & a_0\bar{p} = \bar{x}_0(\gamma,\upsilon), \end{cases} \qquad (24)$$

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{r}_{ij}\bar{r}_{ij}}\,, \qquad \bar{r}_{ij} = \bar{r}\frac{\bar{p}_{ij}}{\bar{p}}\,. \qquad (25)$$

Interacțiunea între două subelemente se realizează prin intermediul interacțiunilor dintre particulele materiale care aparțin diferitor subelemente, ce se reflectă printr-o substituire a parametrilor de stare locali în ecuația fizică a subelementelor cu valorile medii din toată mulțimea:

$$\gamma = \frac{1}{\psi_\lambda}\int_0^1 \dot{\bar{\lambda}}(\psi')d\psi', \qquad \upsilon = \frac{1}{\psi_\upsilon}\int_0^1 \bar{\upsilon}(\psi')d\psi'\,, \qquad (26)$$

$$\dot{s} = \frac{1}{\psi_s}\int_0^1 \dot{\bar{s}}(\psi')d\psi'\,, \qquad 0 \le \psi_\lambda,\psi_\upsilon,\psi_s \le 1\,, \qquad (27)$$

unde γ – viteza medie a deformarii ireversibile în submulțimea de subelemente, care se află dincolo de limita de elasticitate; υ – variația neelastică de volum; ψ – parametrul distinctiv al subelementelor, care la solicitarea inițială coincide cu ponderea subelementelor deformate ireversibil în momentul depăşirii de acest subelement a limitei de elasticitate; ψ_λ, ψ_υ, ψ_s – ponderile sumare ale subelementelor, în care parametrii corespunzători $\dot{\bar{\lambda}}$, $\bar{\upsilon}$, $\dot{\bar{s}}$ sunt diferiți de zero.

Condiția de curgere (18) nu conține noțiunea de suprafață de curgere. Deoarece la nivel de macrostructură noțiunea de suprafață de curgere, obținută prin medierea unui număr infinit de suprafețe ale subelementelor, își pierde sensul geometric; aceste suprafețe în procesul de deformație se intersectează și relațiile între macrotensiuni şi deformații nu pot fi construite în cadrul calcului diferențial. În baza concepții de curgere (18) se asigură trecerea continuă de la starea reversibilă la starea ireversibilă.

Proprietățile tensoriale ale subelementelor în conglomerat se descriu prin legea (20) care stabilește traiectoriile admisibile ale deformării ireversibile ale subelementelor în conglomerat.

La solicitarea monotonă în toată submulțimea de subelemente deformate ireversibil se produce un proces activ de solicitare, ce corespunde monotoniei a evoluției ponderii subelementelor deformate ireversibil în procesul considerat. Aceasta înseamnă că față de ψ se formează numai o singură frontieră de delimitare între subelementele deformate reversibil $\psi' < \psi \le 1$ şi ireversibil $0 \le \psi \le \psi'$. Deoarece variațiile $d\overline{p}$ în toate subelemente are unul şi acelaşi semn legea traiectoriilor admisibile (20) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{d\overline{p}}{d\overline{\lambda}} = \frac{dp}{d\lambda}, \qquad \frac{d\overline{p}_{ij}}{d\overline{\lambda}} = \frac{dp_{ij}}{d\lambda}, \tag{28}$$

de unde

$$\cos\overline{\alpha} = \frac{\overline{p}_{ij}}{\overline{p}}\frac{d\overline{p}_{ij}}{d\overline{\lambda}} = \frac{d\overline{p}}{d\overline{\lambda}} = \frac{dp}{d\lambda} = \frac{p_{ij}}{p}\frac{dp_{ij}}{d\lambda} = \cos\alpha, \tag{29}$$

$$d\lambda = \int_0^{\psi'} d\overline{\lambda}\,d\psi, \qquad d\overline{p}\Big|_{\psi > \psi'} = 0, \qquad \gamma = \frac{\dot{\lambda}}{\psi'}. \tag{30}$$

Metoda de identificare a parametrilor şi a funcțiilor necunoscute ale modelului a fost prezentată în [13,14], unde se consideră experiențele de solicitare proporțională a epruvetelor tubulare cu forța de tracțiune F şi presiunea interioară P_i în condiții de diferite viteze constante de deplasare a dispozitivului de prindere şi nivele de temperaturi.

Orientarea traiectoriei de solicitare în spațiul tensiunilor axiale t_{zz} şi celor circumferențiale $t_{\varphi\varphi}$ se precizează prin parametrul ζ

$$\zeta = \frac{t_{\varphi\varphi}}{t_{zz}}, \quad \zeta = \frac{2-\eta}{1+\eta}, \quad \eta = \beta\frac{2G}{K}\frac{m-a}{1-m+a}. \tag{31}$$

$$t_{zz} = \frac{F}{2\pi Rh} + \frac{P_i R}{2h}, \qquad t_{\varphi\varphi} = \frac{P_i R}{h}, \tag{32}$$

unde h – grosimea şi R – raza medie a tubului.

Procesul de deformare cu $\upsilon = const$ corespunde solicitării izoterme dacă $\beta = 1$.

Solicitarea cu parametrul constant de stare γ este deformarea cu viteză constantă de deplasare a dispozitivului de prindere $\dot{d}_{zz} = const$

$$\gamma = \frac{m-a}{a_0+m}\frac{\sqrt{2\left(1-\eta+\eta^2\right)}}{\eta}\dot{d}_{zz}. \tag{33}$$

Raportul dintre forța de tracțiune şi presiunea interioară, care trebuie respectat la executarea experienței cu parametrul de stare γ constant

$$\frac{F}{P_i} = \frac{3\eta}{2-\eta}\pi R^2. \tag{34}$$

2. ECUAȚIILE CONSTITUTIVE MACROSCOPICE LA SOLICITAREA MONOTONĂ COMPUSĂ ŞI NEIZOTERMĂ

Pentru a obține relația dintre deformațiile reversibile şi cele ireversibile într-un proces termovâscoelastoplastic introducem postulatul [6, 8], conform căruia într-o submulțime de subelemente deformate ireversibil în fiecare moment de timp există măcar un singur subelement $\psi = \psi^*$, comportarea căruia în conglomerat nu se deosebeşte de comportarea în stare "liberă" şi se determină prin legea (17) având în vedere (22) şi (24):

$$\overline{e}^*_{ij} = \overline{e}_{ij}(\psi_*) = \tau(\psi^*,\gamma,\upsilon,s)\frac{dp_{ij}}{d\lambda} + a_0\overline{p}^*_{ij}, \tag{35}$$

$$\tau\left(\psi^*,\gamma,\upsilon,s\right) = \tau\left(\psi^*,\gamma,\upsilon\right) + s. \tag{36}$$

Să presupunem că în subelementul $\psi = \psi^*$ deformațiile ireversibile obțin valorile medii pe submulțimea subelementelor deformate ireversibil

$$\overline{p}^*_{ij} = \overline{p}_{ij}(\psi^*) = \frac{1}{\psi'}\int_0^{\psi'}\overline{p}_{ij}d\psi. \tag{37}$$

Ținând cont că la solicitare monotonă

$$\int_0^1 \overline{p}_{ij}d\psi = \int_0^{\psi'}\overline{p}_{ij}d\psi = p_{ij}, \tag{38}$$

din (37) avem

$$\overline{p}^*_{ij} = \frac{p_{ij}}{\psi'}. \tag{39}$$

Luând în considerare că mărimile $\overline{e}^*_{ij}$ şi $\overline{p}^*_{ij}$ aparțin aceluiaşi subelement $\psi = \psi^*$ să scriem ecuațiile fluctuațiilor deformațiilor reversibile şi ireversibile (14) în felul următor

$$\overline{e}^*_{ij} - e_{ij} = m\left(p_{ij} - \overline{p}^*_{ij}\right), \tag{40}$$

de unde aflăm că

$$\overline{e}^*_{ij} = \frac{1}{\psi'}\int_0^{\psi'}\left[\, e_{ij} + m\left(p_{ij} - \overline{p}_{ij}\right)\right]d\psi$$

sau

$$\overline{e}^*_{ij} = \overline{e}_{ij}(\psi^*) = \frac{1}{\psi'}\int_0^{\psi'}\overline{e}_{ij}d\psi. \tag{41}$$

Substituind (17) în (41) şi egalând cu (35) obținem

$$\tau(\psi^*,\gamma,\upsilon,s)=\frac{1}{\psi'}\int_0^{\psi'}\tau(\psi,\gamma,\upsilon,s)d\psi \tag{42}$$

sau având în vedere (36)

$$\tau(\psi^*,\gamma,\upsilon,s)=\frac{1}{\psi'}\int_0^{\psi'}\tau(\psi,\gamma,\upsilon)d\psi+s\,. \tag{43}$$

Conform (37), (41), (43) ne convingem că în subelementul mediu $\psi=\psi^*$ toate mărimile (tensiunile, deformațiile, limita de curgere ş.a.) obțin valorile corespunzătoare luate în medie pe submulțimea subelementelor deformate ireversibil $0\le\psi\le\psi'$.

Exprimând din (40) mărimea deformației reversibile macroscopice e_{ij} şi luând în considerare (35) şi (39) obținem relația de bază pentru solicitarea compusă

$$e_{ij}=\tau\left(\psi^*,\gamma,\upsilon,s\right)\frac{dp_{ij}}{d\lambda}+\left(\frac{m+a_0}{\psi'}-m\right)p_{ij}\,. \tag{44}$$

Pentru a stabili relațiile dintre deviatorii deformațiilor reversibile şi ireversibile la scară macroscopică trebuie să reprezentăm funcțiile locale $\tau^*=\tau\left(\psi^*,\gamma,\upsilon\right)$ şi ψ' prin mărimi macroscopice obținute din experiențele la solicitare proporțională a epruvetelor tubulare cu pereți subțiri după traiectoriile (31). Coordonatele punctelor de pe aceste diagrame de deformare [12] le notăm cu prim e', p' pentru a distinge de valorile curente ale mărimilor e, p în procesul compus considerat:

$$e'=\varphi(p',\gamma,\upsilon)+s'+r'\,. \tag{45}$$

Legătura dintre e, p şi e', p' se stabileşte din condiția de depăşire a limitelor de elasticitate la solicitarea proporțională şi în procesul considerat a aceluiaşi număr de subelemente.

Pentru un grup de sublemente, care se află în stare de curgere ireversibilă $\psi\le\psi'$, să reprezentăm schema de interacțiune cinematică dintre subelemente în conglomerat (14) având în vedere legea deformării ireversibile a subelementului în conglomerat (18) şi relațiile (22), (28), (29) sub forma următoare:

$$\tau(\psi,\gamma,\upsilon)+s+\bar{r}\cos\alpha-e_{ij}\frac{dp_{ij}}{d\lambda}=m(p-\bar{p})\cos\alpha\,. \tag{46}$$

În subelementul la frontieră $\psi=\psi'$ ce delimitează domeniul reversibil de cel ireversibil $\bar{p}=0$ şi $\bar{r}=0$ deci din (46) obținem:

$$\tau(\psi',\gamma,\upsilon)+s-e_{ij}\frac{dp_{ij}}{d\lambda}=mp\cos\alpha\,. \tag{47}$$

Deformațiile ireversibile în subelmente cu $\psi\le\psi'$ calculăm scăzând (46) din (47):

$$\bar{p}=\frac{\tau(\psi',\gamma,\nu)-\tau(\psi,\gamma,\nu)}{(a_0+m)\cos\alpha}\,. \tag{48}$$

Proprietățile tensoriale ale subelementelor în conglomerat la solicitare proporțională se stabilesc având în vedere că directoarele deviatorilor deformațiilor reversibile e'_{ij}, $\bar{e}'_{ij}$ şi ireversibile p'_{ij}, $\bar{p}'_{ij}$ coincid:

$$\frac{\bar{e}'_{ij}}{\bar{e}'}=\frac{e'_{ij}}{e'}=\frac{\bar{p}'_{ij}}{\bar{p}'}=\frac{p'_{ij}}{p'}=a_{ij}\,, \tag{49}$$

$$\bar{e}'=\sqrt{\bar{e}'_{ij}\bar{e}'_{ij}}\,,\quad \bar{p}'=\sqrt{\bar{p}'_{ij}\bar{p}'_{ij}}\,, \tag{50}$$

de unde conform (23), (24), (29)

$$\cos\alpha=\frac{p'_{ij}}{p'}\frac{dp'_{ij}}{d\lambda'}=1\,,\quad s'=ap'\,,\quad \bar{r}'=a_0\bar{p}'\,. \tag{51}$$

Dacă prin $\bar{p}'$, p' vom nota deformațiile ireversibile la solicitarea inițială proporțională în momentul depăşirii limitelor de elasticitate a aceluiaşi număr de subelemente ca şi la solicitarea compusă, atunci conform (48) stabilim următoarea interconexiune dintre mărimile $\bar{p}$, p şi $\bar{p}'$, p':

$$\bar{p}(\psi)=\frac{\bar{p}'(\psi)}{\cos\alpha},\qquad p=\frac{p'}{\cos\alpha}\,. \tag{52}$$

Prin urmare, deformațiile ireversibile în subelemente şi în elementul corpului în momentul depăşirii limitelor de elasticitate a aceluiaşi număr de subelemente este de $1/\cos\alpha$ ori mai mare la solicitarea compusă decât la cea proporțională.

La solicitare proporțională pentru un grup de sublemente ce funcționează în domeniul ireversibil $\psi\le\psi'$ condiția de curgere (18) se reprezintă în felul următor:

$$\bar{e}'=\tau(\psi,\gamma,\upsilon)+s'+\bar{r}'\,, \tag{53}$$

Legătura locală dintre deformațiile reversibile şi ireversibile (14) se scrie sub forma:

$$\bar{e}'-e'=m(p'-\bar{p}')\,. \tag{54}$$

Pornind de la (54) deformațiile elastice ale subelementelor ce se află în stare reversibilă $\psi > \psi'$ sunt identice

$$\bar{e}' = e' + mp' . \qquad (55)$$

Conform principiului legăturilor medii

$$e = \int_0^1 \bar{e}\, d\psi = \int_0^{\psi'} \bar{e}\, d\psi + \int_{\psi'}^1 \bar{e}\, d\psi . \qquad (56)$$

Substituind expresiile (53) şi (55) care determină deformația elastică în două zone corespunzătoare

$$e' = \int_0^{\psi'} [\, \tau(\psi,\gamma,\upsilon) + s' + \bar{r}'\,]\, d\psi + (1-\psi')(e' + mp'), \qquad (57)$$

obținem mărimea limitei de curgere în subelementul mediu $\psi = \psi^*$

$$\tau(\psi^*,\gamma,\upsilon) = e' + \left(m - a - \frac{a_0 + m}{\psi'} \right) p' . \qquad (58)$$

Diferențiind (53) şi (54) pentru valori constante ale parametrilor de stare γ şi υ

$$\dot{\bar{e}}' = a\dot{p}' + a_0 \dot{\bar{p}}', \qquad \dot{\bar{e}}' - \dot{e}' = m(\dot{p}' - \dot{\bar{p}}'), \qquad (59)$$

obținem că viteza deformării ireversibile are aceeaşi valoare în submulțimea subelementelor $\psi \le \psi'$

$$\dot{\bar{p}}' = \frac{\dot{e}' + (m-a)\dot{p}'}{a_0 + m} . \qquad (60)$$

Conform principiului legăturilor medii

$$\dot{p} = \int_0^1 \dot{\bar{p}}\, d\psi = \int_0^{\psi'} \dot{\bar{p}}\, d\psi = \frac{\dot{e}' + (m-a)\dot{p}'}{a_0 + m} \psi' . \qquad (61)$$

Astfel parametrul distinctiv al subelementelor ψ' se precizează de relația

$$\psi' = \frac{a_0 + m}{e,_{p'} + m - a} . \qquad (62)$$

În procesul de solicitare scleronom $\gamma = const$ şi izoterm $\upsilon = const$ din (45) rezultă

$$e,_{p'} = \varphi,_{p'} + a + a_0 , \qquad (63)$$

atunci funcțiile locale (62) şi (58) se exprimă prin mărimile macroscopice obținute în experiențele de solicitare proporțională a epruvetelor tubulare

$$\psi' = \frac{a_0 + m}{\varphi,_{p'} + m + a_0} , \qquad (64)$$

$$\tau(\psi^*,\gamma,\upsilon) = \varphi(p',\gamma,\upsilon) - \varphi,_{p'} p' . \qquad (65)$$

Substituind (64) ,(65), (43) în ecuația de bază (44), obținem interconexiunea dintre deformațiile macroscopice reversibile şi ireversibile la solicitarea monotonă compusă:

$$e_{ij} = [\varphi(p',\gamma,\upsilon) - \varphi,_{p'} p' + s] \frac{dp_{ij}}{d\lambda} + (\varphi,_{p'} + a_0) p_{ij} \text{ ,(66)}$$

unde

$$p' = p\cos\alpha , \qquad p = \sqrt{p_{ij} p_{ij}} ,$$

$$\cos\alpha = \frac{p_{ij}}{p} \frac{dp_{ij}}{d\lambda} , \qquad d\lambda = \sqrt{dp_{ij} dp_{ij}} .$$

Expresia pentru parametrul de stare γ se obține, excluzând din (30) mărimea ψ' în baza (64)

$$\gamma = \frac{\varphi,_{p'} + m + a_0}{a_0 + m} \dot{\lambda} . \qquad (67)$$

Parametrul de stare s , care reflectă ecruisarea izotropă a elementului corpului se află, integrând relațiile (23) după timp. Pe sectorul $\bar{s} < x_0$, când înmuierea în subelemente lipseşte, avem

$$s = a\lambda . \qquad (68)$$

Astfel, la solicitări compuse diagramele $e \sim p$ depind atât de proprietățile materialului cât şi de forma traiectoriei de deformare ireversibilă $p_{ij} = p_{ij}(t)$ prezentată în figura 1. Sistemul de ecuații constitutive, care descriu legătura dintre deformațiile reversibile şi cele ireversibile într-un proces termovâscoelastoplastic, la solicitarea compusă în comparație cu cea proporțională conține noi parametri: unghiul α dintre tangenta la traiectoria deformației ireversibile şi vectorul deformației, precum şi lungimea arcului de traiectorie a deformațiilor ireversibile λ. Pentru $\cos\alpha = 1$ obținem relațiile care descriu procesele de solicitare proporționale monotone.

Să demonstrăm că în procesele termovâscoelastoplastice, vectorul deformației elastice întotdeauna este detaşat de la tangenta la traiectoria deformației ireversibile. Totodată cu creşterea curburii traiectoriei deformării ireversibile şi micşorării modulului p această detaşare creşte.

În acest scop scriem relațiile (66) obținute dintre deformațiile macroscopice reversibile şi ireversibile la solicitarea monotonă compusă sub forma:

$$e_{ij} = A_1 \frac{dp_{ij}}{d\lambda} + A_2 p_{ij} \,. \quad (69)$$

Modulul deviatorului tensorului deformațiilor reversibile macroscopice

$$e = \sqrt{e_{ij} e_{ij}} = \sqrt{A_1^2 + 2A_1 A_2 p \cos\alpha + A_2^2 p^2} \,. \quad (70)$$

Unghiul dintre vectorul deformației elastice și tangenta la traiectoria deformației ireversibile β se precizează prin relația

$$\cos\beta = \frac{e_{ij}}{e} \frac{dp_{ij}}{d\lambda} = \frac{A_1 + A_2 p \cos\alpha}{\sqrt{A_1^2 + 2A_1 A_2 p \cos\alpha + A_2^2 p^2}} \,, \quad (71)$$

de unde obținem expresia pentru $tg\beta$

$$tg\beta = \frac{A_2 p \sin\alpha}{A_1 + A_2 p \cos\alpha} = \frac{\varphi,_{p'} p' + a_0 p'}{\varphi + a_0 p' + s} tg\alpha \,. \quad (72)$$

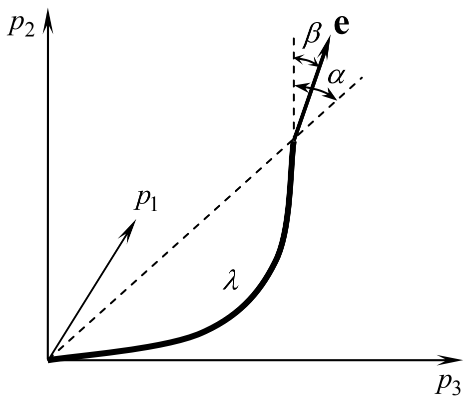

Figura 1. Traiectoria de deformare ireversibilă

Conform relațiilor obținute în procesele termovâscoelastice ($\psi' = 0$) $\alpha = \beta$, adică direcțiile vectorilor deformațiilor elastice și neelastice coincid. În procesele termovâscoelastoplastice $\varphi,_{p'} p' < \varphi(p', \gamma, \upsilon)$, prin urmare, conform (72) $\beta < \alpha$, ceea ce înseamnă că direcția vectorului deformațiilor reversibile se află între direcțiile secantei și tangentei la traiectoria deformației ireversibile.

Din ecuațiile generale (44) și (66) pot fi obținute precum și alte opțiuni de ecuații constitutive. De exemplu, pentru modelul structural mediului scleronom stabil [2] în cadrul concepției legăturilor medii obținem

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma} \frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}} \,, \qquad \bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ij}} = \bar{\tau} \,,$$

$$\bar{\tau} = const \,, \quad m = 1 \,, \quad s = 0 \,, \quad a_0 = 0 \,, \quad p' = p \,,$$

$$e_{ij} = \left[\varphi(p, \gamma, \upsilon) - \varphi,_p p\right] \frac{dp_{ij}}{d\lambda} + \varphi,_p p_{ij} \,. \quad (73)$$

Din (73) urmează faptul care contrazice datele experimentale, anume că modulul deviatorului tensorului tensiunilor la solicitare compusă este mai mic decât la solicitarea proporțională.

Relația (66) conține atât cazurile particulare ale teoriei curgerii, dacă $\varphi,_{p'} + a_0 = 0$, cât și teoria deformațiilor plastice mici, propusă de Hencky [3], când $\varphi(p', \gamma, \upsilon) - \varphi,_{p'} p' + s = 0$.

CONCLUZII

Sistemul obținut de ecuații constitutive conține numai mărimi macroscopice măsurabile și permite să se descrie procesele de solicitare monotonă neizotermă compusă în baza unei informații reduse despre proprietățile inițiale ale materialelor (solicitărilor proporționale și izoterme ale tuburilor cu pereți subțiri).

Parametrii interiori ai modelului care reflectă neomogenitățile câmpurilor tensorilor tensiune și deformație la scară microscopică se determină în baza principiilor termodinamice și ipotezei că interacțiunii reale din toate schemele posibile de interacțiune cinematică dintre subelemente îi corespunde schema cu discordanță extremă a măsurilor macroscopice și microscopice.

Condiția de curgere [6, 12] în modelul examinat asigură trecerea continuă de la starea reversibilă la starea ireversibilă, pentru că nu conține noțiunea de suprafață de curgere și de aceea toate dificultățile asociate cu acest concept dispar automat.

Spre deosibire de teoriile construite în baza concepției suprafeței de curgere modelul propus admite verificarea experimentală directă. Unghiul de detașare β (72) în funcție de geometria traiectoriei și proprietățile materialului cercetat, stabilite în baza experiențelor de solicitare proporțională, poate fi determinat pentru orice traiectorie a deformației ireversibile.

Comparând (73) cu (66) stabilim diferența fundamentală. În modelul cercetat modulul deviatorului tensorului deformațiilor reversibile (sau tensiunilor) la solicitarea compusă este întotdeauna mai mare decât la solicitarea proporțională. Această legitate este confirmată de experiențe.

Bibliografie

1. Besseling J.F. *Theory of plastic flow of an initially isotropic material that strain-hardens anisotropically during plastic deformation.// Mehanika: culegerea periodică de trad. de art. str., Nr.2, pag. 124-168, 1961.*

2. Gohfelid D.A., Sadakov O.S. *Plasticinosti i polzucesti elementov construcții pri povtornîh nagrujeniah.//Maşinostroienie, Moscova, pag. 256, 1984.*

3. Hencky H. *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen.// Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol.4, Nr.4, ISSN 0044-2267, pag. 323–334, 1924.*

4. Hill R. *On macroscopic measures of plastic work and deformation in microheterogeneous media.// Journal of Mathematical Physics, ISSN 0022-2488, pag.214, 1975.*

5. Kuzimin M.A. *Structural model of creep allowing for loading history.// Strength of Materials, vol. 15, Nr.6, ISSN 0039-2316, pag. 750-754, 1983.*

6. Marina V. *Mnogoelementnaya model' sredy, opisyvayushhaya peremennye slozhnye neizotermicheskie proczessy nagruzheniya. //Avtoreferat dis. doc.fiz.-mat., Institut mehaniki AN Ucrainy, Kiev, s.3-31, 1991.*

7. Marina V. *The influence of the microheterogeneity on the metallic materials behavior during irreversible processes.// Metallurgy and New Researches, vol. II, Nr.3, ISSN 1221-5503, pag.50-61, 1994.*

8. Marina V. *The structural model of the polycrystalline aggregate in the reversible and irreversible processes.// Metallurgy and New Researches, vol. IV, Nr.4, ISSN 1221-5503, pag.37-51, 1996.*

9. **Novojilov** ***V.V.***, **Kadaşevici** ***Yu.I***. *Micronapriy-zheniya v construkczionnyh materialah.// Mashino-stroenie. Leningrad, s. 223, 1990.*

10. Shevchenko Yu. ***N***. *Thermoviscoelastoplastic processes in the deformation of elements of a solid.// International Applied Mechanics, vol. 30, Nr.3, ISSN 1063-7095, pag.165-183, 1994.*

11. Sveatenco N. *Principiile interacțiunii cinematice dintre elemente de structură ale mediului microneomogen.// Meridian Ingineresc Nr.1, Chişinău, ISSN 1683-853X, pag.35-39, 2013.*

12. Sveatenco N. *Determinarea parametrului schemei de interacțiune dintre subelemente ale mediului microneomogen.// Meridian Ingineresc Nr.3, Chişinău, ISSN 1683-853X, pag.48-54, 2013.*

13. Sveatenco N. *Identification of the micro-heterogeneous medium model parameters and functions.// Meridian Ingineresc Nr.4, Chişinău, ISSN 1683-853X, pag.35-49, 2013.*

14. Sveatenco N. *The approximate method of representation of real material in the structural model.// Meridian Ingineresc Nr.4, Chişinău, ISSN 1683-853X, pag.89-93, 2013.*

Recomandat spre publicare 120.12.2013.