KEPLER ȘI PROBLEMA A *n* CORPURI

Academician **Mitrofan CIOBANU**
Universitatea de Stat din Tiraspol
Elena CEBOTARU
Universitatea Tehnică a Moldovei

Nu pot exista lucruri, oricât de îndepărtate, la care
să nu ajungem, și oricât de ascunse, pe care să nu le descoperim.
Rene Descartes, *Discurs asupra metodei.*

KEPLER AND THE PROBLEM OF *n* BODIES

Summary. This year, 400 years have passed since the creation of the Kepler's theory about the movement of celestial bodies, which are of the great importance for the understanding the movement of the celestial bodies, and have given rise to various vital problems that remain unresolved to the present. It reflects some moments in the history of solving the problem of *n* bodies and studying of the problem of the stability of Solar System.

It is well known that the study of body movement in the Solar System and Celestial Mechanics is based on Kepler's laws and Newton's law of universal gravitational attraction. The following questions, concerning the stability of the Solar System, arise naturally:

1. Will the current configuration of the Solar System be maintained for its entire life?
2. Will there be no collisions between the planets of the Solar System?
3. Will any planet, for example Earth, leave the Solar System in the future?

There are various approaches to the problem of stability in mathematics and, in particular, to the Celestial Mechanics. The instability of the Solar System was demonstrated by Spiru Haret in his Ph.D. thesis held in Paris in 1878. This result denies the previous affirmations of Pierre Laplace (1773) and Joseph Louis Lagrange (of 1776), using the first-degree approximation of perturbation forces, and of Siméon Denis Poisson (1808) with the second degree approximation of perturbation forces. Since the analytical integration of the motion equations of several bodies, under the gravitational interaction between pairs of bodies according to the Newton's law, is impossible to realize under general initial conditions, solving the problem is done using the Computational Algebra under the restricted initial conditions. In the paper we explicitly formulate the restricted problem of the movement of *n + 1* bodies. Profound results in the study of these problems were obtained by Eugen Grebenicov and his disciples.

Key words: gravitational forces, problem of *n* bodies, bounded problem of *n* bodies.

Rezumat. Studiul pune în valoare rolul legilor lui Kepler. Având o deosebită importanță pentru înțelegerea mișcării corpurilor cerești, ele au generat o serie de probleme vitale ce rămân nerezolvate până astăzi. În 2018 s-au împlinit 400 de ani de la lansarea teoriei lui Kepler despre mișcarea corpurilor cerești. Sunt reflectate aspecte din istoria rezolvării problemei a *n* corpuri în raport cu problema stabilității Sistemului Solar.

Este bine cunoscut că studiul mișcării corpurilor din Sistemul Solar și Mecanica Cerească au la bază legile lui Kepler şi legea lui Newton a atracției gravitaționale universale. Următoarele întrebări, referitoare la problema stabilității Sistemului Solar, apar în mod natural:

1. Se va păstra oare configurația actuală a Sistemului Solar pentru toată perioada lui de existență?
2. Se vor produce sau nu ciocniri între planetele Sistemului Solar?
3. Va părăsi oare Sistemul Solar vreuna din planete, de exemplu, Pământul?

Există diverse abordări ale problemei stabilității în matematică şi, în particular, în Mecanica Cerească. Instabilitatea Sistemului Solar a fost demonstrată de Spiru Haret în teza sa de doctorat susținută la Paris în anul 1878. Acest rezultat infirmă concluziile anterioare ale lui Pierre Laplace (din 1773) și Joseph Louis Lagrange (din 1776), folosind o aproximare de gradul întâi a forțelor perturbatoare, și ale lui Siméon Denis Poisson (din 1808) cu o aproximare de gradul doi a forțelor perturbatoare. Întrucât integrarea analitică a ecuațiilor mișcării mai multor corpuri, sub interacțiunea gravitațională dintre perechile de corpuri, ce se supune legii lui Newton, este imposibil de efectuat în condiții inițiale generale, problema este rezolvată cu ajutorul Algebrei Computaționale în condiții inițiale restrânse. În lucrare se formulează explicit problema mărginită a mișcării a *n+1* corpuri. Rezultate profunde în studiul acestor probleme au fost obținute de acad. Eugen Grebenicov și discipolii săi.

Cuvinte-cheie: forţe gravitaţionale, problema a *n* corpuri, problema mărginită a *n* corpuri.

INTRODUCERE: PREDECESORII

Au trecut 400 de ani de la lansarea Legilor lui Kepler și aproape 400 de ani de la publicarea lor. Ele au o deosebită importanță pentru înțelegerea mișcării corpurilor cerești și au dat naștere la un șir de probleme vitale care rămân nerezolvate până în prezent.

Astronomia ca știință a apărut în cele mai vechi timpuri. Studiul cerului înstelat a fost condiționat de nevoile practice ale omului: necesitatea de a măsura timpul și de a crea un sistem de calendar, precum și de a se orienta pe suprafața Pământului. Cercetările efectuate pe parcurs s-au soldat cu elaborarea diferitor sisteme ce descriu Universul.

Timp de secole s-a considerat că Pământul stă nemișcat în centrul Universului, iar toate celelalte corpuri cerești – Luna, Soarele, planetele, stelele –, se mișcă pe traiectorii perfect circulare în jurul corpului central. Acesta este sistemul lumii propus de Ptolemeu în secolul al II-lea î. Hr. [11].

Astronomia a fost dominată de ideile lui Ptolemeu timp de 1 300 de ani. Învățăturile lui Ptolemeu despre Univers cuprindeau în forma cea mai completă teoria astronomică antică. Studiul său *Almagesta* a stat la temelia astronomiei în Evul Mediu și cuprindea, pe lângă catalogul stelelor cunoscute, o expunere amănunțită a reprezentării geocentrice a Universului. Ptolemeu respingea ideea unui Univers heliocentric, expusă în lucrările lui Aristarchus din Samos și Seleukos din Seleukia (anul 288 î. Hr.).

Ştiinţele naturii au cunoscut un avânt puternic în epoca Renașterii. Din această epocă datează începuturile științelor moderne ale naturii, întemeiate pe experiment și pe aplicarea matematicii. Totuși, sistemul geocentric a fost adânc împlântat în tradițiile europene. S-au făcut multe victime în rândul celor care doreau să exprime idei noi, arzându-i pe rug ca vrăjitori. În acest sens, ca un martir liber-cugetător a rămas în istorie Giordanno Bruno (1548 – 17.02. 1600), care a îndrăznit să afirme că fiecare stea are un sistem planetar.

Totuși, în anul 1543 Nicolaus Copernic (1473–1543), marele astronom al tuturor timpurilor, a publicat lucrarea *De revolutionibus orbium coelestium* (Despre revoluţiile sferelor cereşti) în care expunea teoria sa heliocentrică cum că Pământul și celelalte planete se rotesc în jurul Soarelui. Copernic a explicat contradicția ce apărea între reprezentarea Universului de către Ptolemeu și datele matematice, pledând pentru o reprezentare heliocentrică, potrivit căreia planetele se rotesc în jurul Soarelui, dar tot pe orbite circulare.

Cercetările lui Nicolaus Copernic au produs o schimbare radicală în astronomie. El a arătat că mișcarea planetară poate fi explicată prin poziţia centrală a Soarelui, și nu a Pământului. După o muncă de 40 de ani, a dovedit inconsistența teoriei geocentrice a lui Ptolemeu și astfel a exercitat un puternic impact în mentalitatea Evului Mediu. Nicolaus Copernic i-a retras planetei noastre titlul de centru al Universului și a plasat-o pe o orbită solară obișnuită. Astfel, s-a demonstrat că Pământul este o planetă ca toate celelalte, dând o lovitură decisivă teoriilor mistice despre existența unei lumi cerești deosebite de lumea pământeană.

Doctrina heliocentrică a lui Copernic a fost completată și dezvoltată de Galileo Galilei (1564–1642), Tycho Brahe (1546–1601), Johannes Kepler (1571–1630) și ulterior de Isaac Newton (1642 – 1727), care i-a dat forma definitivă și explicația fizică. Copernic a fost inițiatorul uneia dintre cele mai mari revoluții științifice și filosofice din istoria spirituală a omenirii [2, 5, 9].

REVOLUŢIA ŞTIINŢIFICĂ A LUI KEPLER

În 1588, astronomul danez Tycho Brahe a emis o teorie de compromis, potrivit căreia Pământul rămâne nemișcat în timp ce planetele se mișcă în jurul Soarelui care, la rândul său, înconjoară Pământul. Tycho Brahe a măsurat, fără telescop, de-a lungul a 20 de ani, poziţiile planetelor și stelelor cu o precizie de 2 minute de arc.

În 1609, Galileo Galilei a construit un mic telescop de refracție și a descoperit că Venus, la fel ca și Luna, are faze, semn că se rotește în jurul Soarelui. El a descoperit de asemenea patru sateliți naturali ai lui Jupiter și inelele lui Saturn. Galileo Galilei a fost unul dintre remarcabilii fizicieni și astronomi din epoca Renașterii. El a descoperit legea inerției, legea căderii corpurilor, legea compunerii mișcărilor. A avansat principiul de bază al relativității, potrivit căruia legile fizicii sunt aceleași în orice sistem în mișcare rectilinie uniformă, indiferent de viteza sau direcția sa. Prin urmare, nu există mișcare absolută și nici repaus absolut. Acest principiu a furnizat contextul de bază al legilor mișcării ale lui Newton și joacă un rol primordial în teoria relativității restrânse a lui Einstein. În calitatea sa de astronom a mai descoperit natura stelară a Căii Lactee, petele de pe Soare și rotația acestuia în jurul axei sale, confirmând astfel concepția heliocentrică a lui Copernic [8, 7].

Meritul de a declanșa o nouă revoluție științifică îi revine până la urmă astronomului și matematicianului german Johannes Kepler. El a activat în aceeași perioadă cu genialul savant italian Galileo Galilei. Discipol și ginere al lui Tycho Brahe, Johannes Kepler a avut acces la cele mai vaste și precise surse științifice ale vremii, completând calitățile de observator ale dascălului său cu cunoștințele matematice excepționale pe care le acumulase. El a dezvoltat doctrina heliocentrică a lui Copernic, a formulat și confirmat legile mișcării planetelor (Legile lui Kepler), care descriu mișcările planetelor în jurul Soarelui (sau a stelei sistemului solar respectiv) și în general comportamentul oricărui sistem de două corpuri între care acționează o forță invers proporțională cu pătratul distanței.

Astfel, după calcule îndelungi, Kepler renunță la orbitele circulare. În baza cercetărilor sale, Kepler a formulat legile mișcării planetelor:

K1. *Planeta se mișcă în jurul stelei pe o orbită eliptică, în care steaua reprezintă unul dintre focare*.

K2. *Linia dreaptă care unește planeta cu steaua (raza vectoare a planetei) mătură arii egale în perioade de timp egale*.

K3. *Pătratul timpului de revoluție a planetei este proporțional cu puterea a treia a distanței medii dintre o planetă și Soare:* $T^2 = CR^3$.

Din legea K2 rezultă că o planetă se deplasează cu atât mai repede, cu cât este mai aproape de stea. Legea K3, a armoniei, cum mai este numită, stabilește legătura dintre distanțele a două planete față de Soare și timpul în care planetele realizează un parcurs complet.

Primele două legi au fost tipărite în 1609 în *Astronomia nova*, iar cea de-a treia, deși enunțată la 8 martie 1618, a fost publicată în lucrarea *Harmonices mundi* în 1619.

Teoria lui Kepler n-a fost acceptată imediat. Multe personalități importante, precum Galileo Galilei și René Descartes, au respins categoric *Astronomia nova* a lui Kepler. Au apărut obiecții și asupra introducerii fizicii în astronomia sa. Învățăturile lui Kepler și-au câștigat valoarea odată cu trecerea anilor. Lucrarea *Tabulae Rudolfinae* (1627), editată în timpul vieții sale, conține tabele ce descriu mișcările planetelor. Studiul a constituit baza tuturor calculelor astronomice pentru următorii 200 de ani.

Legile lui Kepler au o deosebită importanță pentru înțelegerea mișcării corpurilor cerești, de exemplu, a Pământului și a celorlalte planete în jurul Soarelui sau a Lunii, precum și a sateliților artificiali în jurul Pământului. Valabile doar în cadrul mecanicii newtoniene, ele descriu comportamentul unui sistem de două corpuri între care acționează o forță invers proporțională cu pătratul distanței. Cu alte cuvinte, putem spune că legile lui Kepler înfățișază mișcarea planetară. Aceste legi descriu mișcările planetelor cu o aproximație suficientă în unele calcule. Aproximația este relativ bună când masa planetei este neglijabilă față de masa stelei. Adesea sunt necesare modificări care să țină seama de alte efecte. Unele abateri sunt cauzate de efectele reciproce ale gravitației dintre planete, de mișcarea stelei în funcție de atragerea planetelor și de efectele relativiste. Ținând cont de acestea, au fost descoperite alte corpuri cerești.

În pofida unor carențe, legile lui Kepler fac parte din fondul de aur al astronomiei, mecanicii și fizicii. Deși au trecut patru secole de când au fost formulate, chiar și în prezent, astronomii și specialiștii în mecanica cerească pornesc cercetările sale în multe cazuri nu de la legea lui Newton, ci de la forma dată anterior acestei legi de către Kepler. În teoriile lui Kepler Soarele și planetele sunt privite ca niște puncte materiale, având în vedere că dimensiunile lor sunt neglijabile în comparație cu distanțele ce le separă. Astfel, putem afirma că problema Newtoniană a *n* corpuri își are originile tot în lucrările lui Kepler.

Să ne amintim că Isaac Newton, într-o zi a anului 1666, privind de pe un pod mărul care îi scăpase din mână, a ajuns să descopere fenomenul și legea gravitației universale. Întâmplarea aceasta a avut ecou în lume și a dat viață expresiei „mărul lui Newton". Totuși, anume legile lui Kepler au constituit baza pentru formularea legilor gravitației de către Isaac Newton. Aceste legi, din datele experimentele, au fost deduse empiric de Kepler.

O jumătate de secol mai târziu, Newton se întreba ce formă trebuie să aibă forța de atracție gravitațională între planete și Soare pentru a genera o orbită ce respectă legile lui Kepler. Newton a dezvoltat aparatul matematic prin intermediul căruia a ajuns la concluzia că mișcarea eliptică a planetei în jurul Soarelui după legile lui Kepler are loc doar în cazul când planeta este atrasă de Soare cu o forță de o mărime invers proporțională distanței „Planetă-Soare" și întotdeauna îndreptată spre Soare. Newton a obținut acest rezultat, publicat în 1687, datorită metodelor de calcul diferențial și integral fondate de el și de Leibniz. Cu alte cuvinte, Newton a stabilit că legile mișcării planetelor, descoperite cu mult mai înainte de Kepler, sunt *de facto* consecințe ale legii gravitației universale [2, 5, 9].

PROBLEMA A *n* CORPURI

Notăm prin (C, m) corpul C cu masa m. Corpul C se identifică cu un punct P care coincide cu centrul masei. Problema mișcării punctului material (P, m), în câmpul gravitațional creat de corpul (S, M), se numește problema celor două corpuri. Studiul mișcării a n corpuri ($n \geq 3$) sub acțiunea atracției gravitaționale mutuale dintre acestea, conform legii atracției universale, se numește problema a n corpuri. Problema a n corpuri ($n \geq 3$) este următoarea: În vacuum sunt date n puncte materiale, ale căror mase sunt cunoscute $\{m_i\}$.

Fie că interacţiunea gravitaţională dintre perechile de puncte se supune legii lui Newton, iar forţele gravitaţionale sunt aditive. Fie că sunt cunoscute la momentul instant t = 0 poziţiile iniţiale şi vitezele fiecărui punct:

$r_i|t=0 = r_i(0)$, $v_i|t=0 = v_i(0)$.

Este necesar să se găsească poziţia punctelor materiale pentru toate momentele ulterioare în timp. Modelul matematic al problemei a *n* corpuri, în sistemul rectangular inerţial *OXYZ*, este descris de un sistem din *3n* ecuaţii diferenţiale de forma [16]:

$$\begin{cases} m_k \dfrac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \overrightarrow{grad}_k U, \\ \overrightarrow{grad}_k U = \dfrac{\partial U}{\partial x_k}\vec{e}_1 + \dfrac{\partial U}{\partial y_k}\vec{e}_2 + \dfrac{\partial U}{\partial z_k}\vec{e}_3, \\ \vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k), k = 1, 2, ..., n, \end{cases}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – sunt vectorii unitari ai axelor de coordonate *Ox, Oy, Oz*. Funcţia scalară *U* reprezintă potenţialul newtonian şi se determină din relaţia:

$$\begin{cases} U = \dfrac{f}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}{}' \dfrac{m_k m_s}{\Delta_{ks}}, \\ \Delta_{ks} = \sqrt{(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2 + (z_s - z_k)^2}. \end{cases}$$

Semnul „' ” de la a doua sumă arată că indicii de sumare *k* şi *s* niciodată nu sunt egali: $k \neq s$, *f* este constanta gravitaţională.

Aceste ecuaţii determină traiectoriile corpului din sistem, în cazul în care sunt date condiţiile iniţiale.

Problema celor două corpuri a fost rezolvată de Kepler în secolul al XVII-lea. Soluţia obţinută de Kepler nu avea însă o demonstraţie strict matematică. Aceasta a fost dată mai târziu de Newton, care a determinat soluţia generală a problemei a două corpuri. Nu există însă nicio soluţie simplă a problemei celor trei corpuri.

Euler (1766) şi Lagrange (1772) au găsit abia în secolul al XVIII-lea primele soluţii specifice problemei a trei corpuri [6, 9, 10]. Lagrange a demonstrat în premieră existenţa soluţiilor coliniare exacte ale ecuaţiilor diferenţiale pentru problema a trei corpuri în cazul când masele exacte m_1, m_2, m_3, ce se atrag reciproc, pentru toţi $\infty < t < +\infty$ se află imobil pe o dreaptă ce se roteşte uniform în jurul centrului de greutate comun, evident amplasat pe aceeaşi dreaptă. Lagrange a arătat că ecuaţiile diferenţiale pentru problema a trei corpuri admit o aşa soluţie exactă pentru masele m_1, m_2, m_3 (luate arbitrar) şi care pentru toţi $\infty < t < +\infty$ formează un triunghi echilateral ce se roteşte uniform în jurul centrului comun de greutate dintr-un plan nevariabil.

Viteza unghiulară de rotaţie se determină univoc de valorile maselor şi dimensiunile liniare ale configuraţiei. În anii 1892–1899, Henri Poincaré a demonstrat că există numeroase soluţii în problema a trei corpuri. Pentru problema a trei corpuri, în 1912, Zundman a obţinut o soluţie analitică generală sub formă de serie. Deşi aceste serii converg în orice moment în timp şi cu orice condiţii iniţiale, ele converg extrem de încet. Datorită convergenţei extrem de lente, utilizarea practică a seriei Zundman este imposibilă. De asemenea, pentru problema cu trei corpuri, Bruns şi Poincaré au demonstrat că soluţia sa generală nu poate fi exprimată prin funcţii algebrice sau funcţii transcendente.

Odată cu creşterea lui *n*, problema se complică şi mai mult. Ecuaţiile matematice corespunzătoare prezintă dificultăţi ce fac imposibilă obţinerea directă a unei soluţii generale. Lipsa unor metode universale de integrare a ecuaţiilor diferenţiale ce descriu mişcarea a *n* corpuri a stimulat dezvoltarea unor metode specifice de rezolvare a lor. Fiecărei soluţii particulare a ecuaţiilor problemei mai multor corpuri i se poate pune în corespondenţă structura geometrică, numită configuraţie în spaţiul Euclidian tridimensional. Printre acestea din urmă a fost evidenţiată o clasă a aşa-numitelor configuraţii centrale cărora li s-au consacrat numeroase cercetări. Laplace primul a propus definiţia intuitivă a configuraţiei centrale, folosită, ulterior, de mulţi matematicieni pentru determinarea altor soluţii exacte ale problemei a *n>3* corpuri. Cele mai multe dintre soluţiile exacte cunoscute ale problemei Newtoniene a *n* corpuri aparţin aşa-numitei clase de soluţii omografice, a căror condiţii suficiente pentru existenţă au fost obţinute de Wintner în prima jumătate a secolului al XX-lea, iar condiţiile necesare au fost formulate ulterior de E. A. Grebenicov [12, 16].

A. Fransen a arătat că în problema a trei corpuri există soluţii exacte spaţiale şi plane, geometric descrise prin triunghiuri isoscele în schimbare, care nu păstrează proprietatea de asemănare, iar R. Leman-Filges a arătat că pentru *n=4* nu există decât o singură configuraţie centrală tridimensională spaţială – tetraedrul regulat, dar numai atunci când $m_1=m_2=m_3=m_4$. Analiză fundamentală a proprietăţilor configuraţiilor centrale în interpretarea lui Lagrange şi Laplace aparţine lui O. Dziobek, care a cercetat amănunţit chestiunea cu privire la numărul configuraţiilor centrale coliniare în funcţie de parametrul *n* şi a arătat că pentru orice valoare a lui *n* printre configuraţiile centrale necoliniare există poligoane regulate (mai exact, poligoane regulate cu *n* unghiuri) sau poligoane regulate cu *(n-1)* unghiuri, în centrul cărora se poate afla o anumită masă arbitrară, iar în vârfurile lor – mase egale între ele.

Relevante sunt rezultatele lui A. Albouy [1] și N. Zemtsova [13, 15, 17] cu privire la existenţa unor noi configuraţii centrale în problema a 4-corpuri, prima – sub forma unui triunghi isoscel cu cea de-a patra masă localizată pe bisectoare (toate cele patru mase sunt egale) și cea de-a doua – sub formă de romb cu două câte două mase egale între ele. În lucrările [15, 16] este dat un rezultat cu privire la non-existenţa unor configuraţii centrale în formă de dreptunghiuri, trapeze și deltoide. E. Grebenicov și A. Procopenia au demonstrat existenţa configuraţiilor sub formă de poligoane ce schimbă dimensiunile și care se rotesc cu viteză variabilă în jurul centrului comun de greutate [16].

E firesc ca în procesul cunoașterii să vrem să aflăm ce configurații sunt stabile. Prin stabilitatea sistemului material se subînțelege că pentru fiecare corp C_i cu punctul inițial N_i există un anumit timp T_i, două numere pozitive a, b și o traiectorie g_i pentru care:

- $a << b$, $N_i \in g_i$ și g_i este o curbă închisă simplă;
- în momentul $t = 0$ corpul C_i este situat în punctul N_i;
- în momentele $t \in [0, T_i]$ și $t+nT_i$, unde n este un număr întreg, corpul C_i este situat la distanța $\leq a$ de un anumit punct al curbei g_i (care depinde numai de t);
- în orice moment al mișcării, două corpuri diferite din sistem sunt situate unul de altul la o distanță mai mare ca numărul b.

Perturbările corpului C_i față de traiectoria g_i sunt determinate de forțele gravitaţionale ale altor corpuri. Ținând cont de acestea, au fost descoperite noi corpuri cerești. Problema stabilității sistemelor materiale a apărut în legătură cu studierea Sistemului Solar. Problema stabilităţii acestuia a fost cercetată iniţial de Pierre Laplace, în 1773, și Joseph Louis Lagrange, în 1776. Ei au arătat că axele majore ale orbitelor sunt stabile, folosind o aproximare de gradul întâi a forțelor perturbatoare [6, 9]. În 1808, Siméon Denis Poisson a demonstrat că stabilitatea este valabilă și atunci când se folosesc aproximări de gradul doi [10]. Spiru Haret, în 1878, în teza sa de doctorat *Sur l'invariabilité des grandes axes des orbites planétaires* a demonstrat, folosind aproximațiile de gradul al treilea, că axele nu sunt stabile așa cum se credea anterior, ci prezintă o variabilitate de timp pe care el o numește perturbație seculară. Acest rezultat presupune că mișcarea planetară nu este absolut stabilă. Henri Poincaré a considerat rezultatul respectiv drept o mare surpriză și a continuat cercetarea lui Haret, care l-a dus în cele din urmă la crearea teoriei haosului. Félix Tisserand, în *Traité de mécanique céleste*, a recomandat extinderea metodei lui Haret asupra altor probleme astronomice și, mult mai târziu, în 1955, Jean Meffroy a reluat cercetarea lui Haret folosind noi tehnici. Rezultatele teoriei KAM (Kolmogorov – Arnold – Moser) au arătat că Sistemul Solar se află într-o stare de stabilitate relativă [18].

Creatorii teoriei stabilităţii, Lyapunov și Poincaré, au accentuat în mod repetat că studiul stabilităţii soluţiilor particulare ale problemei a trei corpuri nu poate fi dus până la sfârșit în limitele teoremelor clasice enunţate de ei.

Remarcabile în dezvoltarea teoriei stabilității în sens Lyapunov a sistemelor hamiltoniene, la care se atribuie dinamica cosmică, sunt rezultatele savanților A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold și Iu. Moser, cunoscuți ca fondatori ai teoriei KAM [16,18]. Teoria KAM a dat răspuns la un șir de întrebări asupra studiului stabilității soluțiilor dinamicii hamiltoniene, însă problema stabilității în sens Lyapunov a sistemelor planetare rămâne nerezolvată. În prezent, devin tot mai eficiente metodele de cercetare calitative ale sistemelor dinamice bazate pe determinarea soluțiilor particulare exacte ale ecuațiilor diferențiale și analiza ulterioară a stabilității lor, folosind cele mai recente progrese în algebra computațională.

PROBLEMA MĂRGINITĂ A *n+1* CORPURI

Lipsa unor metode universale de integrare a ecuațiilor diferențiale ce descriu mișcarea a 3 corpuri, l-a determinat pe savantul german Jacobi să formuleze o problemă nouă, simplificată pentru modelul matematic al dinamicii cosmice, numită de el problema mărginită a trei corpuri. Jacobi a formulat-o în felul următor: *Trebuie de studiat mișcarea în spațiul tridimensional a punctului material cu masa infinit mică, atras de alte două puncte materiale, cu mase de dimensiuni finite, în corespundere cu legea de atracție a lui Newton. Singură masa infinit mică nu acționează gravitațional mișcarea celorlalte două puncte materiale cu mase nenule.*

Matematicienii francezi Elmabsut B. și D. Bang au obţinut o generalizare interesantă a rezultatelor referitoare la existenţa unor puncte staţionare de tipul punctelor de echilibru, care formează nu unul, ci mai multe poligoane regulate ce se mișcă în jurul centrului comun de greutate cu una și aceeași viteză unghiulară în unul și același plan. Autorii au determinat suficiente condiții care confirmă existența soluțiilor particulare exacte ale ecuațiilor diferențiale ale problemei mai multor corpuri și care reprezintă poziții de echilibru ale sistemului în spațiul fazic Euclidian cu rotație. Această construcție dinamică poate fi generatorul unui nou model dinamic – problema mărginită a mai multor corpuri. Ea a fost numită „problema mărginită a mai multor corpuri cu simetrie incompletă".

Prin analogie cu problema clasică a trei corpuri, formulată de Jacobi și Poincaré, E. A. Grebenicov a propus un model nou în mecanica cerească – problema mărginită a mai multor corpuri (n>3), în care câmpul gravitațional este generat de corpurile ce formează figuri plane (poligoane regulate și sisteme de astfel de poligoane) rotindu-se în jurul corpului central, într-un astfel de câmp fiind studiată mişcarea masei ce gravitează pasiv (Problema mărginită a *n+1* corpuri). În problema a *n* corpuri și, în particular, în problemele mărginite a mai multor corpuri, profesorul E. Grebenicov a introdus modelele ce țin de problema existentei soluțiilor omografice și, în particular, a configurațiilor centrale cu simetrie parțiala, aceste modele reprezentând o generalizare a modelului clasic Lagrange-Wintner. În revistele de specialitate este utilizat pe larg termenul de „modele Grebenicov-Elmabsout".

În problemele mărginite a *n+1* corpuri, unde al *n+1* corp are o masă neglijabilă faţă de masa fiecărui din primele *n* corpuri, se cere:

- de fixat anumite configurații plane pentru primele *n* corpuri;
- de rezolvat problema mărginită pentru primele *n* corpuri;
- pentru al *n+1* corp de determinat condiţii iniţiale cu soluţii stabile pentru amplasări plane determinate la soluționarea problemei mărginite a *n* corpi.

Căutarea soluţiilor particulare exacte (punctelor staţionare) ale sistemului de ecuaţii diferenţiale ale problemei mărginite se reduce la rezolvarea sistemelor complexe de ecuaţii algebrice. Problema de solvabilitate a unor astfel de ecuaţii constituie o analiză amplă și destul de sofisticată, care, practic, se poate face doar cu ajutorul unor noi sisteme de programare. Rezultate remarcabile în această direcţie au fost obţinute de către V. I. Arnold, A. D. Bruno, M. A. Vashkovyak, Yu. F. Gordeeva, S. A. Gutnik, V. F. Edneral, G. B. Efimov, A. P. Ivanov, A. M. Leontovich, M. J. Lidov, A. P. Markeev, C. B. Mironov, Yu. A. Ryabov, V. A. Sarychev, A. G. Sokolsky, E. A. Grebenicov, N. Zemtsova, A. Procopenia, E. Ihsanov, S. Mironov, D. Kozac-Scovorodkina, D. Diarova, A. Silușic [3, 4, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22] și alţii.

E. Grebenicov, fiind preocupat de evoluția Universului, a contribuit prin cercetările sale la dezvoltarea dinamicii cosmice și a reușit să creeze o veritabilă școală matematică, fiind conducătorul ştiinţific a peste 40 de doctori în științe care activează astăzi în diferite ţări ale lumii [14, 15, 16]. El este unul dintre cei 12 români ale căror nume au fost conferite unor planete sau corpuri cerești, fiind inclus, totodată, de prestigiosul Centru Biografic Mondial din Cambridge printre cei două mii de savanţi remarcabili ai lumii de la începutul mileniului al treilea. Academicianul Eugeniu Grebenicov, savantul despre care se spune că „a făcut pârtii" sateliţilor artificiali în Cosmos, a aplicat și dezvoltat teoria referitoare la problema mai multor corpuri. A demonstrat existența de noi modele în dinamică cosmică – problema mărginită a *n*+1 corpuri, similare cu modelele problemei a trei corpuri propuse de K. Jacobi și A. Poincaré. A rezolvat complet pentru modelele respective problema stabilității în sensul lui Lyapunov a soluțiilor lor staționare. Aceste rezultate au fost obţinute prin metode de calcul algebric, efectuate prin aplicarea Sistemului de Calcul Simbolic Mathematic bazate pe teoria KAM. A reușit să găsească o aplicație practică importantă a teoriei date în fundamentarea teoriei zborului sateliţilor artificiali în jurul Pământului și, împreună cu colegii săi, să găsească o nouă abordare pentru rezolvarea faimoasei probleme a trei corpuri.

E. A. Grebenicov a propus să se treacă la înregistrarea condiţiilor de mișcare a satelitului în variabilele complexe. Aparatul matematic rezultat se bazează pe funcții speciale și oferă o soluție care garantează rotația stabilă a sateliților timp de mai multe decenii. Această abordare a marcat o adevărată revoluție în metoda de calcul a mişcării sateliţilor artificiali ai Pământului: înainte de Grebenicov, calculul orbitei unei nave spațiale se efectua ani de zile, iar soluția propusă de E. A. Grebenicov a redus esențial timpul de calcul. În lucrările [3, 4] a fost rezolvată una dintre problemele lui Grebenicov referitor la mișcarea a opt corpuri.

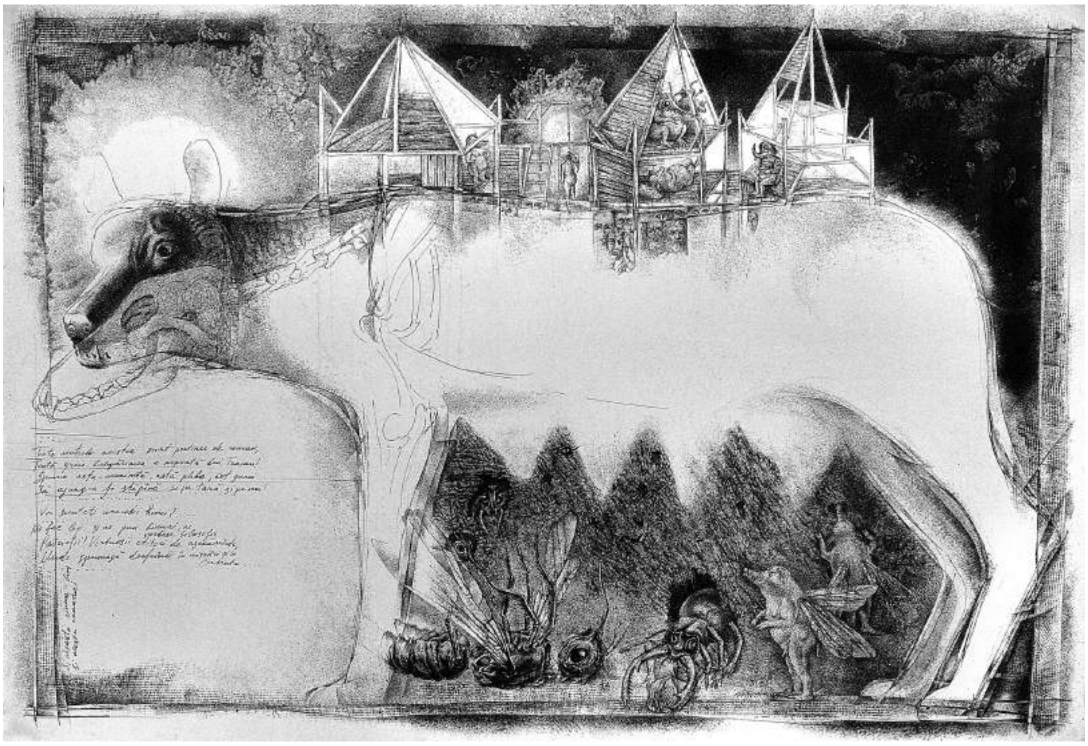
Dumitru Păsat, autorul cărții *Omul și asteroidul Grebenicov*, l-a numit pe bună dreptate „un magician al formulelor matematice, un Copernic al românilor".

Practic fiecare secol ne-a dăruit savanţi care au adus contribuţii importante la rezolvarea problemei newtoniene a *n* corpuri. Sperăm că dezvoltarea tehnicii și științei ne va putea ajuta să înțelegem mai bine cine suntem, de unde venim și ce ne așteaptă în viitor.

BIBLIOGRAFIE

1. Albouy A. Symmetry of planar four-body convex central configurations. May 8, 2008.
2. Bernal J. D. Știința în istoria societății. București: Editura Politică, 1964.
3. Cebotaru E. Despre stabilitatea în sens Lyapunov a punctelor staționare în problema mărginită a opt corpuri. Studia Universitatis Moldavie, nr. 2 (112), 2018, p. 19-25.
4. Cebotaru E. On the restricted eight bodies problem. ROMAI J., v. 14, no. 1(2018), p. 43-62.
5. Dreyer J. L. E. *A* History of Astronomy from Thales to Kepler. New York, NY: Dover Publications, 1953.
6. Lagrange J.-L. (1811). Mécanique Analytique. Courcier (reissued by Cambridge University Press, 2009.

7. Frincu M. Istoria astronomiei, 2004.
8. Copernicus N. De revolutionibus orbium coelestium, 1543.
9. Laplace P.-S. Exposition du systeme du monde. Bruxelles, 1827 (6e édition).
10. Poisson S.-D. Traité de mécanique. Paris, Bachelier, 1833.
11. Ptolemy C. Almagest. Translated and annotated by G. J. Toomer. Princeton University Press, 1998 (Ptolemey Klavdiy, „Al'magest" ili matematicheskoe sochinenie v 13 knigakh. Perevod s drevnegrecheskogo yazyka I. N. Veselovskogo. Moskva: Nauka, Fizmatlit, 1998 g., 672 s.).
12. Wintner A. The analytical foundations of celestial mecanics. Princeton: Princeton University Press, 1941.
13. Zemtsova N. I. Stability of the stationary solutions of the differential equations of restricted Newtonian problem with incomplete symmetry. Kiev, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 2001, v. 3(1), p. 121-130.
14. Gadomskiy L. Ya., Grebenikov E. A., Gurskaya A. R., Zemtsova N. I. Novye klassy tochnykh resheniy v probleme mnogikh tel, vzaimno prityagivayushchikh drug druga po proizvol'nomu zakonu, zavisyashchemu ot vzaimnykh rasstoyaniy. Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal, 1998, t. 50, № 3, s. 329-337.
15. Grebenikov E. A., Zemtsova N. I. Novye gomograficheskie resheniya v n'yutonovoy zadache mnogikh tel. Tezisy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii „Matematicheskoe modelirovanie i vychislitel'naya fizika" (Dubna, 7-11iyulya 2009 g.), Dubna: OIYaI, 2009, s. 145-146.
16. Grebenikov E. A. Matematicheskie problemy gomograficheskoy dinamiki. Moskva: MAKS Press, 2010.
17. Zemtsova N. I., Chebotaru E. M. Problema sushestvovaniya semeystva statsionarnykh resheniy v n'yutonovoy probleme chetyrekh tel, izobrazhaemykh ravnobedrennymi treugol'nikami s massoy vnutri ikh. Sb. materialov II Mezhd. Nauchno-tekhn. konf. „Rol' fiz.- mat. nauk v sovremennom obrazovatel'nom prostranstve", Kazakhstan, Atyrau, 15-16 maya 2008 g., s. 53-58.
18. Mozer Yu. KAM - teoriya i problema ustoychivosti. Nauchnyy Izd. Tsentr „Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", Izhevsk, 2001, 448 s.
19. Teoreticheskie i prikladnye zadachi nelineynogo analiza. Moskva, RAH, 2004.
20. Teoreticheskie i prikladnye zadachi nelineynogo analiza. Moskva, RAH, 2005.
21. Teoreticheskie i prikladnye zadachi nelineynogo analiza. Moskva, RAH, 2006.
22. Teoreticheskie i prikladnye zadachi nelineynogo analiza. Moskva, RAH, 2008.



Simion Zamșa. *Lupoaica,* 1992, hârtie, tuș-peniță, 70 × 90 cm.