STABILITATEA BAREI ÎNTR-UN MEDIU ELASTIC

Autor: lect. asist. Aurelia BRADU
Conducător ştiinţific: conf. univ. Mihail BÎRCĂ

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Se studiază problema stabilităţii unei bare într-un mediu elastic. În dependenţă de tipul solului sunt stabilite formele de pierdere a stabilităţii. Prototipul real al problemei este pilotul de fundaţie. Sunt examinate exemple concrete de calcul.*

Cuvinte cheie: *stabilitate, mediu elastic, coeficient de pat, forţă critică*.

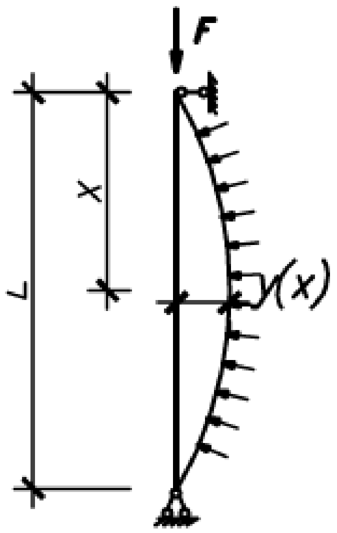
1. Noţiuni generale:

Să examinăm un pilot de fundaţie comprimat centric de forţe axiale. Capătul inferior al pilotului se consideră rezemat pe o bază practic nedeformabilă (fig.1).

Deplasarea liberă a capătului superior este împiedicată de construcţia radierului. Dacă forţa axială depăşeşte valoarea critică în pilot apar deformaţii de încovoiere.

Considerăm reacţiunea mediului direct proporţională cu deplasările orizontale $p(x) = c \cdot y(x)$,

unde c este coeficientul de pat, numeric egal cu forţa ce acţionează pe un segment cu lungime unitară, când depasarea orizontală este egală cu unitatea.



Ecuaţia diferenţială de încovoiere a barei:

$$EI \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -M(x) \tag{1}$$

Reprezentăm momemtul de încovoiere sub formă de sumă:

$$M(x) = F \cdot y(x) + M^*(x), \tag{2}$$

$M^*(x)$ este momentul produs de acţiunea mediului elastic.

$$EI \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -F \cdot y(x) - M^*(x) \tag{3}$$

$M^*(x)$ nu este cunoscut, prin dubla derivare a ecuaţiei (3) obţinem ecuaţia diferenţială de ordinul 4

Fig.1

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} + \frac{F}{EI} \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - \frac{c \cdot y(x)}{EI} = 0 \tag{4}$$

Soluţia ecuaţiei se caută sub forma de serie Fourier

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{5}$$

Ecuaţia (4) este liniară, toate transformările le efectuăm cu un singur termen al seriei;

Derivatele respective au forma:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -a_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (6)$$

$$\frac{d^4y(x)}{dx^4} = -a_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (7)$$

Substituind în ecuaţia diferenţială obţinem egalitatea:

$$a_k \sin\frac{k\pi x}{l}\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \frac{F}{EI}\cdot\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \frac{c}{EI}\right] = 0 \qquad (8)$$

Deoarece valoarea produsului $a_k \sin\frac{k\pi x}{l}$ este diferită de zero, atunci rezultă că egalitatea poate avea loc numai în cazul

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \frac{F}{EI}\cdot\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \frac{c}{EI} = 0 \qquad (9)$$

Din (9) obţinem valoarea forţei critice:

$$F_{cr} = \frac{EI\cdot l^2}{k^2\pi^2}\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 + \frac{c}{EI}\right] = \frac{\pi^2\cdot EI}{l^2}\left[k^2 + \frac{c\cdot l^4}{k^2\pi^4 EI}\right] \qquad (10)$$

Observăm că forţa critică pentru bara ce lucrează într-un mediu elastic este mai mare decât pentru bara obişnuită. Valoarea numerică a forţei critice depinde atât de geometria barei cât şi de proprietăţile mediului elastic exprimate prin coeficientul c.

Parametrul k determină forma de echilibru a barei încovoiate (numărul de semiunde formate la pierderea stabilităţii).

Notăm: $$\gamma = \frac{c\cdot l^4}{\pi^4 EI} \qquad (11)$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2\cdot EI}{l^2}\left[k^2 + \frac{\gamma}{k^2}\right] \qquad (12)$$

Considerăm că parametrul k este o variabilă continuă. Valoarea minimală a forţei critice se obţine din relaţia:

$$\frac{dF}{dk} = \frac{\pi^2\cdot EI}{l^2}\left[2k + \frac{2\gamma}{k^3}\right] = 0 \qquad (13)$$

Astfel rezultă egalitatea:

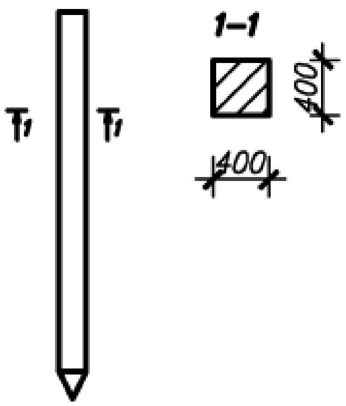
$$k = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{c}{EI}} \qquad (14)$$

În caz general, k din (14) se obţine un număr fracţionar, ste necesar de calculat forţa critică pentru valorile numerilor întregi între care se află k.

2. Problemă de calcul:

Determinarea numărului de semi-unde pentru diferite caracteristici ale medilui elastic:

Considerăm un pilot de fundaţie cu secţiunea transversală $400x400\ mm$, clasa betonului C15, solul argilă nisipoasă (fig.2).



Dacă $c=0$, din (11) obţinem $\gamma=0$, mediul elastic lipseşte, valoarea minimală a forţei critice se obţine pentru $k=1$.

Acesta este cazul obişnuit al flambării unei bare articulate la ambele capete.

La solurile flexibile γ este foarte mic, însă mai mare ca zero, forţa critică minimală se determină pentru $k=1$. Astfel, pentru un mediu elastic flexibil, bara flambează fără puncte intermediare de inflexiune.

La creşterea valorii γ ajungem la situaţia când forţa critică va fi mai mică pentru $k=2$ decât pentru $k=1$. Valoarea limită a

Fig.2

coeficientului γ când are loc trecerea de la $k=1$ la $k=2$ se obţine egalând forţele critice pentru $k=1$ şi $k=2$.

$$1+\gamma=4+\frac{\gamma}{4}$$

De unde se obţine valoarea $\gamma=4$.

Modulul de elasticitate a betonului de clasa C15:

$$E=23\cdot10^{3}MPa=23\cdot10^{9}\,\frac{N}{m^{2}}$$

Momentul de inerţie a secţiunii pilotului:

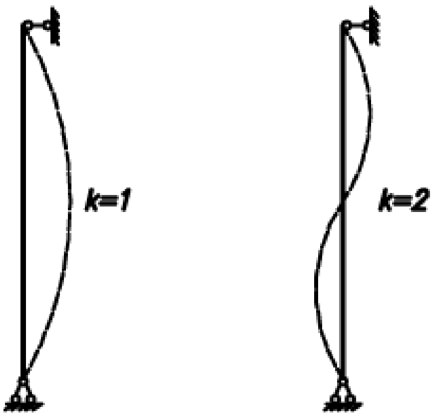
$$I=\frac{b^{4}}{12}=\frac{256}{12}10^{-4}m^{4}=21{,}33\cdot10^{-4}m^{4}$$

Valorile coeficientului c pentru argilă nisipoasă sunt cuprinse între $500\le c\le1000\ kPa$.

Considerîm o valoare medie $c=750\ kPa$.

Lungimea barei care va flamba cu un punct intermediar de inflexiune se determină din relaţia:

$$l^{4}=\frac{\gamma\cdot\pi^{4}EI}{c} \tag{15}$$



Pentru valorile numerice date mai sus obţinem $l=12,64\ m$.

Forma de pierdere a stabilităţii este redată în fig.3

Fig.3

S-a calculat lungimile barelor care vor flamba cu un punct de inflexiune în dependenţă de valorile coeficientului c.

Rezultatele sunt date în tabelul 1.

Tabel 1

c, kPa	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
l, m	20,91	17,58	15,88	14,78	13,98	13,36	12,85	12,43	12,07	11,76

Concluzii:

1. Flambarea barelor într-un mediu elastic cu puncte intermediare de inflexiune este probabilă în solurile cu un coeficient de pat relativ mare.
2. Pentru pilotul considerat în exemplu valoarea limităa forţei de comprimare $F_{cr} = 2,08 \cdot 10^6 N$.

Bibliografie

1. STEPHEN P., TIMOŞENCO, James M. Gere ”Teoria stabilităţii elastice” , Bucureşti 1967
2. COLCIN G., BÎRCĂ M., PÎRŢAC I. ”Mecanica structurilor din bare”, Chişinău 1991