DEPENDENȚA TIMPULUI DE STINGERE A OSCILAȚIILOR LIBERE DE DURATA IMPULSULUI DREPTUNGHIULAR ȘI FRACȚIUNEA DIN AMORTIZAREA CRITICĂ

Autor: Viorica MICLEUȘANU, st. gr. CIC 102
Conducător ştiinţific: dr. conf. univ. Mihail BÎRCĂ

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Analiza dependenței timpului de stingere a oscilațiilor libere de durata impulsului dreptunghiular și fracțiunea din amortizarea critică unui sistem cu un grad dinamic de libertate (GDL).*

Cuvinte cheie: *timp de stingere, oscilații libere, impuls dreptunghiular, amortizare critică.*

1.Noțiuni generale

În cazul oscilațiilor libere amortizate ecuația de mișcare sistemului cu un GDL are forma:

$$m\frac{d^2U(t)}{dt^2}+c\frac{dU(t)}{dt}+kU(t)=0 \tag{1}$$

unde:

$U(t)$-deplasarea instantanee a centrului masei

$m\frac{d^2U(t)}{dt^2}$ -forța de inerție

$c\frac{dU(t)}{dt}$-forța de amortizare

$kU(t)$-forța elastică

După împărțirea tuturor termenilor la *m* ecuația (1) devine:

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dU(t)}{dt}+\frac{k}{m}U(t)=0 \tag{2}$$

În vederea simplificării soluțiilor ecuației caracteristice se introduc notațiile:

$$2\beta=\frac{c}{m} \tag{3}$$

$$\omega^2=\frac{k}{m} \tag{4}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

Ecuația de mișcare va avea forma:

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2}+2\beta\frac{dU(t)}{dt}+\omega^2U(t)=0 \tag{6}$$

unde:

β -factor de amortizare

ω -pulsația proprie

Făcînd abstracție de prezența amortizării soluția ecuației (6):

$$U(t)=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t \tag{7}$$

Viteza se obține prin derivarea funcției (7), asfel obținem:

$$V(t)=C_1\omega\cos\omega t-C_2\omega\sin\omega t \tag{8}$$

În cazul prezenței amortizării soluția ecuației (6) are forma:

$$U(t)=e^{-\beta t}\left(C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t\right) \tag{9}$$

La acțiunea bruscă a unei forțe cu valoarea F_0 ecuația de mișcare este neomogenă. Soluția particulară a ecuației:

$$U_F(t)=\frac{F_0}{k} \tag{10}$$

Soluția generală a ecuației neomogene se obține prin însumarea (9) și (10):

$$U(t)=e^{-\beta t}\left(C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t\right)+\frac{F_0}{k} \tag{11}$$

Viteza se determină:

$$V(t)=\frac{dU(t)}{dt}=e^{-\beta t}\left[C_1\left(\omega\cos\omega t-\beta\sin\omega t\right)-C_2\left(\omega\sin\omega t+\beta\cos\omega t\right)\right] \tag{12}$$

Constantele de integrare se determină din condițiile inițiale ale mișcării $U(t)_{t=0}=0$; $V(t)_{t=0}=0$

$$C_2+\frac{F_0}{k}=0\Rightarrow C_2=-\frac{F_0}{k} \tag{13}$$

$$C_1\omega-C_2\beta=0\Rightarrow C_1=C_2\frac{\beta}{\omega}=\frac{-F_0\cdot\beta}{k\cdot\omega} \tag{14}$$

Soluția generală:

$$U(t)=e^{-\beta t}\left(-\frac{F_0\cdot\beta}{k\cdot\omega}\sin\omega t+\frac{F_0}{k}\cos\omega t\right)+\frac{F_0}{k}=\frac{F_0}{k}\left[1-e^{-\beta t}\left(\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t+\cos\omega t\right)\right] \tag{15}$$

$$V(t)=\frac{F_0}{k}\left[e^{-\beta t}\left(\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t+\cos\omega t\right)-e^{-\beta t}\left(\beta\cos\omega t-\omega\sin\omega t\right)\right] \tag{16}$$

Soluția obținută poate fi aplicată în cazul unui impuls dreptunghiular finit. Aceasta (Fig. 1) se obține prin suprapunerea a două impulsuri:

-Primul impuls (pozitiv) se aplică la momentul t=0.

-Al doilea impuls (negativ) se aplică la momentul $t=t_0$

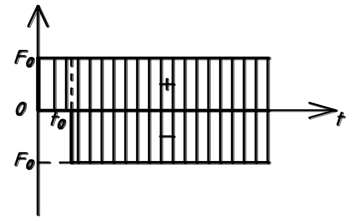

Fig. 1 Schema încărcărilor asupra unui sistem cu un GDL

Pentru $t<t_0$ mișcarea este descrisă de funcțiile (15), (16). Din momentul $t>t_0$ mișcarea devine liberă și se descrie în forma următoare:

$$U(t)=e^{-\beta t}\left(D_1\sin\omega t+D_2\cos\omega t\right) \tag{17}$$

Valorile $U(t)_{t=0}=0$ și $V(t)_{t=0}=0$ obținute din (15) și (16) permit determinarea constantelor de integrare D_1 și D_2.

2.Analiza sitemului cu un singur grad dinamic de libertate

Rezolvarea problemei este ilustrată prin exemplul dat în Fig. 2. Se consideră un sistem cu un grad dinamic de libertate.

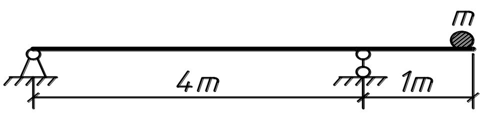

Fig. 2 Sistem cu un GDL

Datele inițiale sunt următoarele:

$Q = mg = 58.85kN$

$EI = 29430kN \cdot m^2$

$\omega = 54.4rad/s$

$T = 0.115s$

$F_0 = 0.1 \cdot Q = 5.885kN$

Forțele de amortizare se caracterizează prin parametrul $\nu = \dfrac{\beta}{\omega}$ numit fracțiune din amortizare critică.

Sunt studiate două cazuri:

2.1 Grinda din oțel $\nu = 0.03$.Durata impulsului t_0=1s.

$$k = \frac{58.85}{9.81} \cdot 54.4^2 = 17753kN/m$$

$$U(t)_{t=1} = \frac{5.885}{17753}\left[1 - e^{-1.632 \cdot 1}\left(\frac{1.632}{54.4}\sin 54.4 \cdot 1 + \cos 54.4 \cdot 1\right)\right] = 0.3685mm$$

$$V(t)_{t=1} = \frac{5.885}{17753}\left[\begin{array}{l} e^{-1.632 \cdot 1}\left(\dfrac{1.632}{54.4}\sin 54.4 \cdot 1 + \cos 54.4 \cdot 1\right) - \\ -e^{-1.632 \cdot 1}\left(1.632 \cdot \cos 54.4 \cdot 1 - 54.4 \sin 54.4 \cdot 1\right) \end{array}\right] = -2.9563mm/s$$

Deplasarea și viteza la $t=t_0$

$$U(t)_{t=1} = e^{-1.632 \cdot 1}\left(D_1 \sin \cdot 54.4 \cdot 1 + D_2 \cos \cdot 54.4 \cdot 1\right) = 0.3685mm$$

$$V(t)_{t=1} = -1.632 \cdot e^{-1.632 \cdot 1}\left(D_1 \sin \cdot 54.4 \cdot 1 + D_2 \cos \cdot 54.4 \cdot 1\right) +$$

$$+e^{-1.632 \cdot 1}\left(D_1 \cdot 54.4 \cos 54.4t + D_2 \cdot 54.4 \sin 54.4t\right) = -2.9563mm/s$$ Pentru constantele de integrare

Obținem:

$$\begin{cases} -28.34 \cdot D_1 + 46.46 \cdot D_2 = -15.12 \\ -0.8376 \cdot D_1 - 0.5462 \cdot D_2 = 1.8849 \end{cases}$$

$$D_1 = -1.4582 \qquad D_2 = -1.215$$

Ecuația oscilațiilor libere pentru valorile parametrilor din datele inițiale se obține:

$$U(t) = e^{-1.632 \cdot t}\left(-1.4582 \cdot \sin \cdot 54.4t - 1.215 \cdot \cos 54.4t\right)$$

Valorile deplasărilor sunt calculate cu pasul $\Delta t = 1s$ din expresia (11) pînă la $t \le t_0$ și din expresia (17) pentru $t \ge t_0$.Răspunsul dinamic exprimat în deplasări este ilustrat in Fig.3

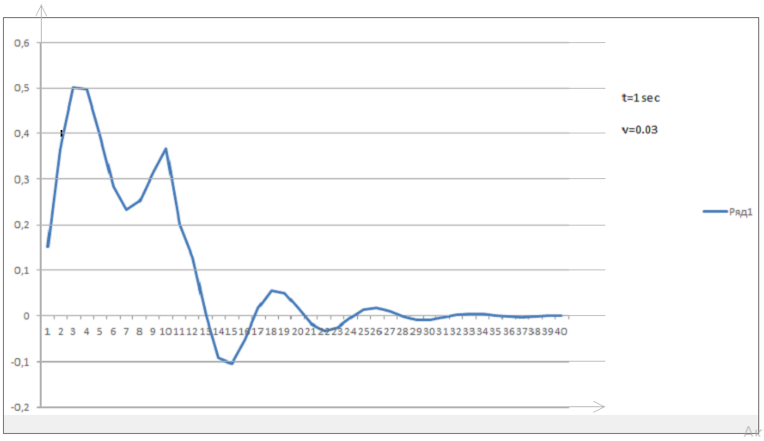

Fig. 3

2.2 Grindă din beton armat $\nu = 0.08$

Caracteristicile elastice sunt luate cu aceleași valori.Deplasările și viteza la momentul $t=t_0$ au valorile:

$$U(t)_{t=1} = \frac{5.885}{17753}\left[1 - e^{-4.352 \cdot 1}\left(\frac{4.352}{54.4}\sin 54.4 \cdot 1 + \cos 54.4 \cdot 1\right)\right] = 0.3287mm$$

$$V(t)_{t=1} = \frac{5.885}{17753}\left[\begin{array}{l} 4.352\cdot e^{-4.352\cdot 1}\left(\dfrac{4.352}{54.4}\sin 54.4\cdot 1 + \cos 54.4\cdot 1\right) - \\ -e^{-4.352\cdot 1}\left(4.352\cdot\cos 54.4\cdot 1 - 54.4\sin 54.4\cdot 1\right)\end{array}\right] = 0.1901 mm/s$$

Pentru $t \geq t_0$ comportamentele răspunsului dinamic se determină:

$$U(t)_{t=1} = e^{-4.352\cdot 1}\left(D_1\sin 54.4\cdot 1 + D_2\cos 54.4\cdot 1\right) = 0.3287 mm$$

$$V(t)_{t=1} = -4.352\cdot e^{-4.352\cdot 1}\left(D_1\sin 54.4\cdot 1 + D_2\cos 54.4\cdot 1\right) +$$

$$+e^{-4.352\cdot 1}\left(D_1 54.4\cos 54.4\cdot 1 + D_2 54.4\sin 54.4\cdot 1\right) = 0.1901 mm/s$$

Constantele de integrare se calculează din sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} -0.4535\cdot D_1 - 0.6293\cdot D_2 = 0.1901 \\ 0.8131\cdot D_1 + 0.5821\cdot D_2 = 25.52 \end{cases}$$

$$D_1 = 65.28 \qquad D_2 = -47.33$$

Deplasările se determină din relația:

$$U(t) = e^{-4.352t}\left(68.28\sin 54.4t - 47.33\cos 54.4t\right)$$

Răspunsul dinamic este ilustrat in Fig.4

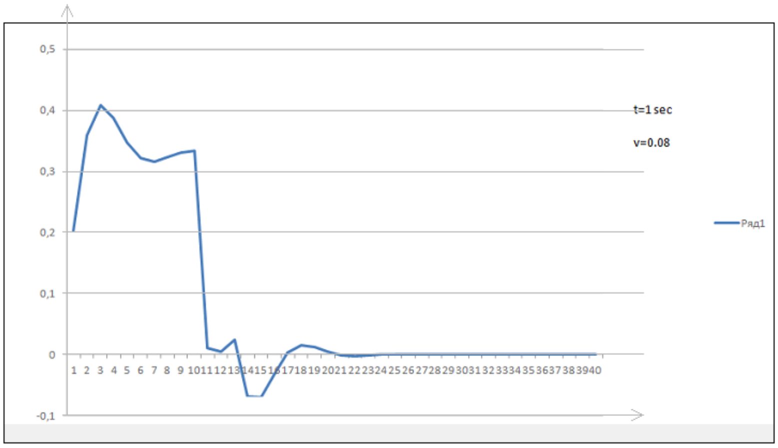

Fig. 4

Concluzii: Din graficile răspunsului dinamic urmează constatările:

1.Valoarea fracțiunii din amortizarea critică are influență atît la durata timpului de stingere, cît și la valorile maximale ale răspunului dinamic.

2.Pentru grinda din oțel U_{max}=0.5mm, iar la grinda din beton armat U_{max}=0.4mm

3. Oscilațiile grinzii din oțel se sting la 2.1s, iar la grinda din beton armat la 1s după înlăturarea forței.

4. Folosirea materialelor cu o capacitate de amortizare înaltă la proiectarea structurilor de rezistență are un efect pozitiv în atenuarea componentelor răspunsului dinamic.

Bibliografie

1. IFRIM Mihail „Dinamica structurilor și ingineriei seismcă” București 1984, 584 pag.

2. COLCIN G., BÎRCĂ M., PÎRȚAC I. „Mecanica structurilor din bare”, Chișinău 1992, 384 pag.

3. КИСЕЛЕВ В. „Строителъная механика .Специалъный курс”, Москва, 1969, 432 стр.

4. КЛАФ Р., ПЕНЗИЕН Дж. „Динамика сооружений”, Москва, 1979, 320 стр.