

# MODELAREA COMPORTĂRII BETONULUI ÎN ANALIZA NUMERICĂ CU MEF ÎN PROIECTAREA ASISTATĂ DE CALCULATOR

**Autori : lect.sup.dr.ing. Elena SIDORENCO, lect.sup. Iurie SOROCEANU**

Universitatea Tehnică a Moldovei

**Abstract:** În ultimii ani a crescut considerabil interesul pentru analiza neliniară a structurilor de beton datorită folosirii pe scara largă a acestui material și dezvoltării tehnicilor de analiza numerică bazate pe Metoda Elementului Finit și care utilizează calculatoarele electronice. Materialul beton presupune un răspuns structural complex determinat de neliniarități constitutive, de cedări ale materialului datorate fisurării la întindere sau sfărâmării la compresiune, deformații de alunecare din fluaj, dependente de temperatură. Scopul acestei lucrări este de a prezenta atât formularea matematică a problemei, cât și implementarea numerică a unui model tridimensional de beton incorporat și evaluat într-un program de calcul automat. Cu acest program se modelează răspunsul unei structuri de beton (indiferent dacă aceasta are sau nu armătură) în toate stadiile de încărcare, incluzând cedarea.

**Cuvinte cheie:** analiza numerică, răspuns structural complex, comportarea neliniară

## 1. Introducere

Modelul constitutiv al betonului folosește trei caracteristici fundamentale pentru a descrie comportarea neliniară a materialului: - o relație constitutivă care include atenuarea deformării, permițând descărcarea materialului sub influența tensiunilor crescânde de compresiune; - o suprafața limită de cedare; - o strategie care ilustrează comportarea materialului în timp.

S-a urmărit implementarea unui model care să satisfacă următoarele două criterii:

- modelul trebuie să fie cât se poate de simplu, dar în același timp să reproducă caracteristicile constitutive importante neliniare și să fie în concordanța cu caracteristicile de rezistență corespunzătoare rezultatelor experimentale;
- modelul trebuie să fie sigur și stabil din punct de vedere numeric.

Modelul de material folosit este un model hipoelastic, bazat pe o relație "tensiune - deformație" uniaxială, care apoi este generalizată pentru a se lua în considerație și o stare de tensiune biaxială sau triaxială în jurul unui punct. Condițiile de fisurare prin întindere și respectiv de sfărâmare prin compresiune ale betonului sunt identificate folosind suprafețele de rupere.

## 2. Implementarea condițiilor multiaxiale de solicitare

Comportarea materialelor beton și roca în condițiile unei stări de tensiune 3D, este foarte complexă și încă nu a putut fi stabilită complet pe cale experimentală. Au fost propuse diferite modele fizice pentru a caracteriza comportarea sub sarcină a corpului, folosind relațiile de plasticitate, descrierile constitutive hipoelastice și teoria endocronică a neelasticității. Având în vedere variația de comportare a betonului (funcție de clasă, de condițiile de solicitare și de sensul de aplicare a încărcării), se prezintă un model simplu care asigură o flexibilitate suficientă în analiza numerică și oglindește cu suficientă acuratețe răspunsul materialului sub sarcină.

Relațiile constitutive sunt evaluate în mod diferit, în funcție de încărcarea/descărcarea corpului. Coeficientul de contracție transversală Poisson se presupune constant. Condițiile de încărcare/descărcare se definesc cu o funcție a încărcării la momentul  $t$ , conf. relației (1).

$${}^t f = {}^t s + 3\alpha {}^t \sigma_m, \quad (1)$$

unde,  $\alpha$  - o constantă (de obicei negativă);  ${}^t\sigma_o = \frac{1}{3}{}^t\sigma_{ii}$  - tensiunea normală medie la timpul  $t$ ;

${}^tS = \left( \frac{1}{2}{}^t s_{ij} {}^t s_{ij} \right)^{1/2}$  - tensiunea deviatorică la momentul  $t$ ;  ${}^t s_{ij} = {}^t\sigma_{ij} - \delta_{ij} {}^t\sigma_o$  - componenta deviatorică a tensorului de tensiune;  $\delta_{ij}$  - coeficientul Kronecker.

Materialul este încărcat când:  ${}^t f \geq f_{\max}$  și descărcat dacă:  ${}^t f < f_{\max}$ , unde,  $f_{\max}$  este valoarea maximă a funcției de încărcare, valoare atinsă pe parcursul unei iterații complete. La descărcare, materialul se presupune a avea o comportare izotropă. Modulul  $\tilde{E}_0$  este folosit pentru a se compune matricea constitutivă, pentru a se calcula rigiditatea și starea de tensiune. La încărcare, sunt calculate tensiunile principale, iar pentru fiecare direcție principală este evaluat un modul tangent  ${}^t\tilde{E}_{pi}$ , corespunzător deformației principale  ${}^t\tilde{\epsilon}_{pi}$ . Se definesc următoarele mărimi:  ${}^t\sigma_{p1} \geq {}^t\sigma_{p2} \geq {}^t\sigma_{p3}$  - tensiunile principale la timpul  $t$  și  ${}^t\tilde{E}_{p1}$ ,  ${}^t\tilde{E}_{p2}$ ,  ${}^t\tilde{E}_{p3}$  - moduli de elasticitate Young uniaxiali corespunzători.

Se consideră materialul izotrop cu un modul Young multiaxial echivalent, în situația când este supus la o sollicitare de întindere sau de compresiune mică, stare definită de relația  ${}^t\sigma_{p3} \geq k\sigma'_c$ . Variabila  $k$  se alege în mod curent 0.4. Modulul Young echivalent, pentru cazul 3D se obține din relația (2), în funcție de tensiunile principale de la momentul respectiv de timp  $t$ .

$${}^tE = \frac{|{}^t\sigma_{p1}|{}^t\tilde{E}_{p1} + |{}^t\sigma_{p2}|{}^t\tilde{E}_{p2} + |{}^t\sigma_{p3}|{}^t\tilde{E}_{p3}}{|{}^t\sigma_{p1}| + |{}^t\sigma_{p2}| + |{}^t\sigma_{p3}|}. \quad (2)$$

• Dacă materialul este supus unei *compresiuni puternice*, adică:  ${}^t\sigma_{p3} < k\sigma'_c$ , se folosește o matrice constitutivă 3D, cu direcțiile de ortotropie definite de direcțiile tensiunilor principale.

$$C = \frac{1}{(1+\mu)(1-2\mu)} \times \begin{bmatrix} (1-\mu){}^t\tilde{E}_{p1} & \mu{}^tE_{12} & \mu{}^tE_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\mu){}^t\tilde{E}_{p2} & \mu{}^tE_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\mu){}^t\tilde{E}_{p3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(1-2\mu){}^t\tilde{E}_{p12} & 0 & 0 \\ & \text{simetric} & & & \frac{1}{2}(1-2\mu){}^t\tilde{E}_{p13} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(1-2\mu){}^t\tilde{E}_{p23} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Modulul de forfecare transversal  $G$  se calculează funcție de modulul longitudinal ponderat.

$${}^tG_{ij} = \frac{{}^tE_{ij}}{2(1+\mu)} = \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{|{}^t\sigma_{pi}|{}^t\tilde{E}_{pi} + |{}^t\sigma_{pj}|{}^t\tilde{E}_{pj}}{|{}^t\sigma_{pi}| + |{}^t\sigma_{pj}|}. \quad (4)$$

• Dacă materialul este supus acțiunii unei *intinderi* sau *compresiuni slabe* la timpul  $t$ , adică:  ${}^t\sigma_{p3} \geq k\sigma'_c$ , matricea constitutivă corespunde unui material izotrop cu modulul  ${}^tE$ , conf. (5).

$${}^t E = \frac{|{}^t \sigma_{p1}| {}^\tau \tilde{E}_{p1} + |{}^t \sigma_{p2}| {}^\tau \tilde{E}_{p2} + |{}^t \sigma_{p3}| {}^\tau \tilde{E}_{p3}}{|{}^t \sigma_{p1}| + |{}^t \sigma_{p2}| + |{}^t \sigma_{p3}|}, \quad {}^\tau \tilde{E}_{pi} = \{\tilde{\sigma}|_{at} ({}^t e_{pi} + e_{pi}) - \tilde{\sigma}|_{at} {}^t e_{pi}\} / e_{pi} \quad (5)$$

${}^t e_{pi}$  și  $e_{pi}$  sunt componentele tensorului deformației la momentul  $t$  și respectiv ale deformației incrementale mărite, măsurate pe direcțiile eforturilor unitare principale  ${}^t \sigma_{pi}$ .

Pe baza cunoștințelor actuale, au fost implementate suprafețele limită de cedare la întindere și respectiv compresiune, reprezentate în fig.1 și fig.2. Din cercetarea *suprafeței limită de interacțiune la întindere*, se constată că rezistența materialului pe direcția efortului unitar principal, nu se modifică prin introducerea tensiunilor de întindere pe celelalte două direcții principale; în schimb tensiunile de compresiune modifică această rezistență la întindere.

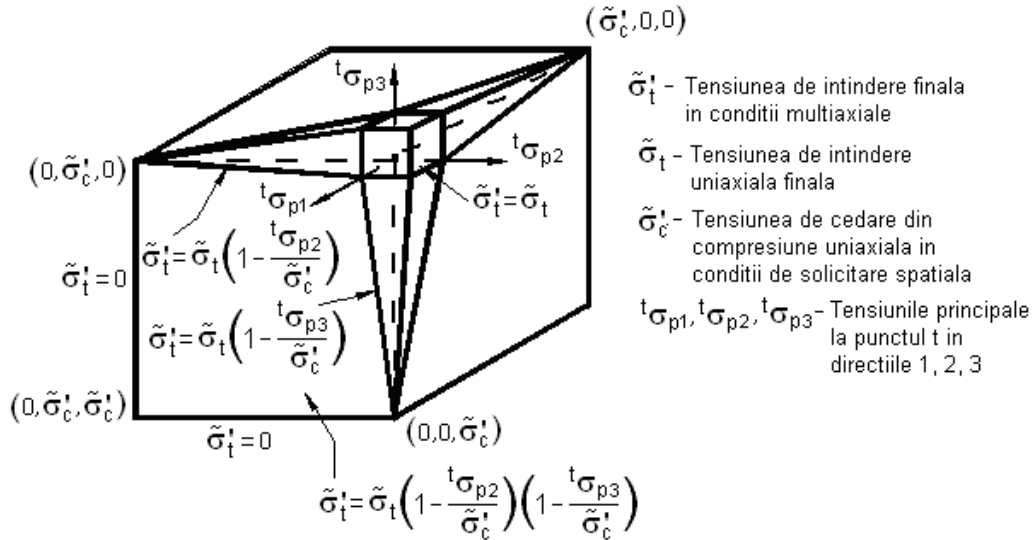


Fig.1 Modelul de cedare triaxiala la intindere.

Forma *suprafeței limită de cedare la compresiune* se bazează pe experiențele efectuate de Kupfer ș.a. precum și de Launay și Gachon. Suprafața este modelată folosind 24 valori discrete ale tensiunilor. Rapoartele  $\sigma_{p1}^i / \tilde{\sigma}_c$  reprezintă valori de input ce definesc la ce mărime a tensiunii principale  ${}^t \sigma_{p1}$ , suprafețele limită de cedare pentru  ${}^t \sigma_{p2}$  și  ${}^t \sigma_{p3}$ , reprezintă mărimi de input. Aceste suprafețe sunt definite de valorile  $\sigma_{p3}^{i,j} / \tilde{\sigma}_c$  care corespund tensiunii  ${}^t \sigma_{p2} = {}^t \sigma_{p1}$ ,  ${}^t \sigma_{p2} = \beta {}^t \sigma_{p3}$  ( $\beta$  - constantă de material) și  ${}^t \sigma_{p2} = {}^t \sigma_{p3}$ .

### 3. Implementarea pe calculator a modelului de material

Modelul de material implementat în programele ADINA - Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis și ANSEF – Analiza Neliniară a Structurilor cu Elemente Finite folosește următorii parametri: -  $\tilde{E}_0$ ,  $\tilde{\sigma}_t$ ,  $\tilde{\sigma}_c$ ,  $\tilde{\epsilon}_c$ ,  $\tilde{\sigma}_u$ ,  $\tilde{\epsilon}_u$ , care definesc legea constitutivă uniaxială; - coeficientul de contracție transversală Poisson  $\mu$ , presupus constant; - suprafața de cedare la compresiune triaxială definită de șase valori ale rapoartelor  $\sigma_{p1}^i / \tilde{\sigma}_c$ , de opt valori  $\sigma_{p3}^{i,j} / \tilde{\sigma}_c$  și de constanta  $\beta$ ; -  $\gamma$ , constantă pentru evaluarea deformațiilor  $\tilde{\epsilon}_c$  și  $\tilde{\epsilon}_u$ , în condiții 3D; -  $k$ , parametru de control care stabilește când să se folosească relația "tensiune - deformație" izotropică sau ortotropică; -  $\alpha$ , multiplicator constant pentru componenta hidrostatică a încărcării; -  $\eta_n$ ,  $\eta_s$ , factori de reducere a rigidității normale și respectiv de forfecare.

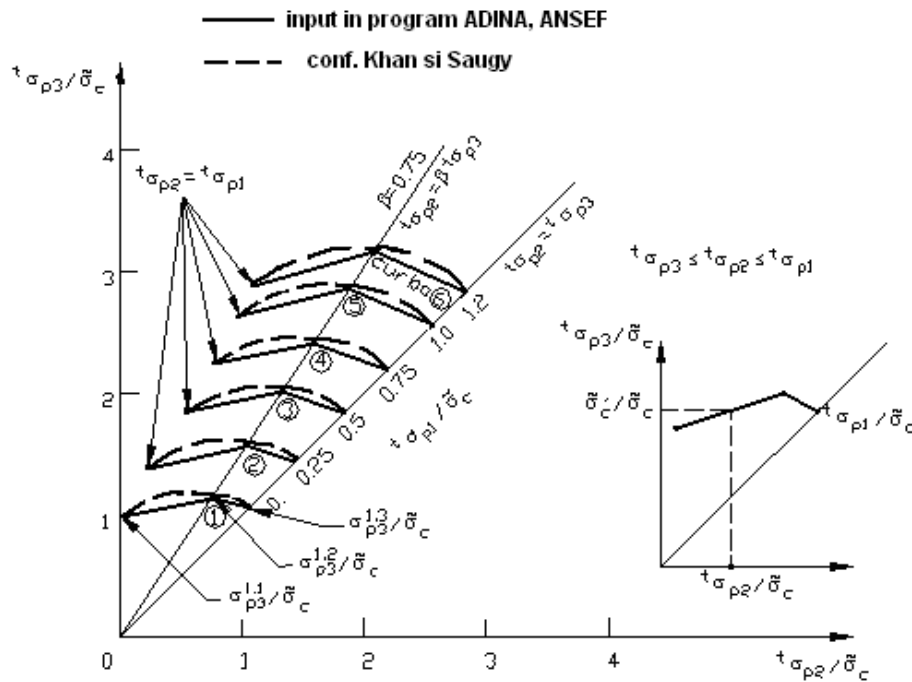


Fig.2 Suprafața limită de cedare la compresiune triaxială a modelului

#### 4. Concluzii

Elaborarea diferitelor modele pentru reproducerea comportării betonului sub sarcină, împreună cu utilizarea metodei numerice a elementului finit, se constituie instrumente de bază în proiectarea automată a structurilor de beton. Potențialul aplicării MEF în analiza structurală statică și dinamică, constă în capacitatea de a utiliza cu suficientă precizie relațiile constitutive, astfel încât acestea să satisfacă legile Mecanicii continuumului deformabile și ale Mecanicii fracturilor. În acest sens s-a prezentat modelul de element finit folosit în analiza tridimensională neliniară din punct de vedere fizic a structurilor de beton și de rocă. Modelul se bazează pe o relație constitutivă uniaxială neliniară "efort unitar - deformație specifică", relație care este apoi generalizată pentru condiții de stare de tensiune bi- și tri-dimensională în jurul unui punct. Sunt luate în considerație fisurarea materialului la întindere și sfărâmarea la compresiune, diminuarea deformației - ecrusare și condiții de încărcare ciclice. Este necesară o comparare a acestui model cu alte modele de beton sau de rocă și îmbunătățirea lui pentru a lua în considerare discontinuitățile produse la rupere și prin concentrarea unor deformații mari.

#### Bibliografie

1. I Bathe, K.J., Ramaswamy, S. *On Three-dimensional Nonlinear Analysis of Concrete Structures*, Nuclear Engineering and Design, nr.52, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, pp.385-409, 1979.
2. Ieremia, M. *Elasticitate. Plasticitate. Neliniaritate*, Ed. PRINTECH, București, 1998.
3. Ieremia, M. *Analiza numerică neliniară a structurilor*, Ed. CONSPRESS, București, 2004.