STABILIZAREA SOLUȚIEI UNEI PROBLEME DE FRONTIERĂ

Autor: Mihai LAZARI
Coordonator ştiinţific: conf. univ. Gheorghe CEBAN

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Se studiază stabilizarea soluţiei unei probleme de frontieră cu coeficienţi variabili în condiţiile de frontieră. Se aplică metoda transformatei Laplace care transformă problema din ecuaţii în derivate parţiale într-o problemă în derivate ordinare. Se soluţionează problema obţinută, apoi efectuând transformarea Laplace inversă obţinem soluţia problemei iniţiale. Se studiază problema stabilizării soluţiei primite.*

Cuvinte cheie: *problemă de frontieră, transformata Laplace, funcţie Green, stabilizarea soluţiei.*

Fie că funcţia $U(x,t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$ este pentru $x > 0$ şi $t > 0$ mărginită şi pentru orice $t \geq 0$ reprezintă soluţia ecuaţiei

$$LU(x,t) \equiv \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial^4 x} = 0 \tag{1}$$

cu condiţiile iniţiale şi de frontieră

$$U(x,0) = 0 \tag{2}$$

$$\begin{cases} U(0,t) + (\alpha_1 + \beta_1 e^{-t}) \dfrac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \\ U(0,t) + (\alpha_2 + \beta_2 e^{-t}) \dfrac{\partial^5 U(0,t)}{\partial x^5} = \varphi_2(t) \end{cases} \tag{3}$$

Existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (1)-(3) în formă generală sunt demonstrate în [1].

Admitem că coeficienţii α_i, β_i , $i = 1,2$ şi funcţiile de frontieră $\varphi_i(t)$, $i = 1,2$ satisfac toate condiţiile din [1] care asigură existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (1)-(3).

Admitem, de asemenea, că funcţiile $\varphi_i(t)$ ($i = 1,2$) sunt continue şi admit limită finită când $t \to \infty$.

Funcţia $U(x,t)$ se stabilizează pentru $t \to \infty$, dacă pentru orice $x \geq 0$ există şi este finită $\lim\limits_{t\to\infty} U(x,t)$.

Scopul acestui studiu îl constituie demonstrarea afirmaţiei:

Dacă $\alpha_i, \beta_i > 0$ şi $\alpha_i \leq 0{,}5\,\beta_i$, $i = 1,2$, atunci soluţia problemei (1)-(3) se stabilizează şi

$\lim\limits_{t\to\infty} U(x,t) = \dfrac{A_2 - A_1}{\alpha_1} x + A_2$, unde A_i - const.

La rezolvarea problemei (1)-(3) aplicăm metoda transformatei Laplace. Transformata Laplace trece problema (1)-(3) în problema următoare:

$$\lambda v(x,\lambda) = -\frac{d^4 v(x,\lambda)}{dx^4}, \ \operatorname{Re}\lambda > 0 \tag{4}$$

$$\begin{cases} v(x,\lambda)\big|_{x=0} + \alpha_1 \dfrac{dv(x,\lambda)}{dx}\bigg|_{x=0} + \beta_1 \dfrac{dv(x,\lambda+1)}{dx}\bigg|_{x=0} = \widetilde{\varphi}_1(\lambda), \\ v(x,\lambda)\big|_{x=0} + \alpha_2 \dfrac{d^5 v(x,\lambda)}{dx^5}\bigg|_{x=0} + \beta_2 \dfrac{d^5 v(x,\lambda+1)}{dx^5}\bigg|_{x=0} = \widetilde{\varphi}_2(\lambda) \end{cases} \tag{5}$$

Soluţia mărginită a problemei (4)-(5) are forma:

$$v(x,\lambda)=\widetilde{G}_1(x,\lambda)\cdot\widetilde{\varphi}_1(\lambda)+\widetilde{G}_2(x,\lambda)\cdot\widetilde{\varphi}_2(\lambda)+\phi(x,\lambda)\cdot F(\lambda),$$

unde $\widetilde{G}_i$ - funcţiile Green au forma:

$$\widetilde{G}_1(x,\lambda)=e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}}\left\{\frac{\alpha_2\lambda}{\alpha_2\lambda+\alpha_1}\left[\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}+\delta m\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}\right]+\frac{\sqrt{2}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\delta m\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\frac{1}{\alpha_2\lambda+\alpha_1}\right\},$$

$$\widetilde{G}_2(x,\lambda)=e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}}\left\{\frac{\alpha_1}{\alpha_2\lambda+\alpha_1}\left[\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}+\delta m\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}\right]-\frac{\sqrt{2}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{\delta m\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}}{(\alpha_2\lambda+\alpha_1)}\right\},$$

$$\phi(x,\lambda)=-e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}}\left\{\frac{\alpha_2\beta_1\lambda-\alpha_1\beta_2(\lambda+1)}{\beta_2(\lambda+1)+\beta_1}\left[\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}+\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}\right]+\frac{\sqrt{2}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\delta m\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{4}}\right\},$$

$$F(\lambda)=\sum_{q=1}^{\infty}(-1)^q\left[\prod_{n=1}^{q}\frac{\beta_2(\lambda+n)+\beta_1}{\alpha_2(\lambda+n-1)+\alpha_1}\cdot\frac{\widetilde{\varphi}_2(\lambda+q)-\widetilde{\varphi}_1(\lambda+q)}{\alpha_2(\lambda+q)+\alpha_1}\right]$$

Aplicând transformata Laplace inversă obţinem soluţia $U(x,t)$ a problemei (1)-(3):

$$U(x,t)=U_1(x,t)+U_2(x,t)+\frac{1}{2\pi i}\int\phi(x,\lambda)F(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda,\ \operatorname{Re}\lambda=\sigma\quad(\sigma>0).$$

unde $U_i(x,t)=\int_0^t G_i(t-\tau,x)\varphi_i(\tau)d\tau$, $i=1,2$,

iar $G_j(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int e^{\lambda t}\widetilde{G}_j(x,\lambda)d\lambda$, $j=1,2$, $\operatorname{Re}\lambda=\sigma\quad(\sigma>0)$.

Mai întâi admitem că $\lim_{t\to\infty}\varphi_1(t)=0$ şi demonstrăm că $\lim_{t\to\infty}U(x,t)=0$, apoi considerând $\varphi_1(t)=A_i$ const. obţinem:

$$\lim_{t\to\infty}U(x,t)=\frac{A_2-A_1}{\alpha_1}x+A_2$$

Bibliografie

1. Солоников, В. А., *Труды математического института им. Стеклова. Т. XXXIII*, Москва, 1965
2. Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., *Методы теории функций комплексного переменного*, Москва, 2002
3. Градштейн, И. С., Рыжик, И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва, 1963