

**TRUSA DE MECANICĂ ASISTATĂ DE CALCULATOR.
VIII. CONSERVAREA IMPULSULUI ÎN CIOCNIRILE
PLASTICE DINTRE DOUĂ CĂRUCIOARE PE UN PLAN
ORIZONTAL**

Alexandru RUSU

Universitatea Tehnică a Moldovei, Chisinău
preuniversitas@gmail.com

Rezumat. Sunt prezentate modalitățile de utilizare a trusei de mecanică asistată de calculator la verificarea experimentală a legii conservării impulsului în cazul ciocnirilor plastice ale două cărucioare pe un plan orizontal. Se analizează posibilitățile oferite de softurile elaborate în achiziția și procesarea datelor, precum și în elaborarea referatului la cele 20 de variante ale experiențelor propuse. Sunt considerate și cazurile în care masele celor două cărucioare sau masa unuia din ele variază la trecerea de la o serie de măsurări la alta. Modalitățile de eliminare a erorilor sistematice sunt ilustrate cu grafice obținute în experiențe concrete. Se propune o metodă de estimare a coeficientului de frecare (rezistență) la mișcarea cărucioarelor și se analizează rezultatele obținute pentru nivelul de încredere de 68,3 %.

Impulsul mecanic \vec{P} al unui sistem de puncte materiale se menține constant în timp, oricare ar fi interacțiunile interne dintre punctele materiale ale sistemului, dacă rezultanta \vec{F} a tuturor forțelor externe aplicate tuturor acestor puncte materiale este nulă:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n = \text{const}, \text{dacă } \vec{F} = 0. \quad (1)$$

Ecuția vectorială (1) este echivalentă cu următoarele trei ecuații scalare care se obțin ca rezultat al proiectării ecuației (1) pe axele de coordonate:

$$\begin{cases} m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + \dots + m_nv_{nx} = \text{const}, F_x = 0 \\ m_1v_{1y} + m_2v_{2y} + \dots + m_nv_{ny} = \text{const}, F_y = 0 \\ m_1v_{1z} + m_2v_{2z} + \dots + m_nv_{nz} = \text{const}, F_z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Dacă una din componentele rezultantei, de exemplu $F_z \neq 0$, atunci pot fi scrise numai primele două ecuații (2), iar dacă $F_y \neq 0$ și $F_z \neq 0$, atunci este valabilă numai prima ecuație, cu condiția că $F_x = 0$. Astfel, impulsul unui sistem de corpuri poate să se conserve de-a lungul unei axe de coordonate și să varieze de-a lungul celorlalte două.

Legea conservării impulsului poate fi verificată experimental în cazul ciocnirilor plastice dintre două cărucioare. Mai întâi vom considera ciocnirea plastică dintre un

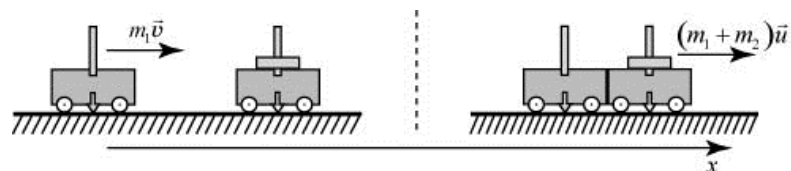


Fig. 1

cărucior de masă m_1 , în mișcare cu viteza v , cu un alt cărucior de masa m_2 ce se află în repaus pe un plan orizontal (fig.1). Pentru ca ciocnirea să fie plastică, ambele cărucioare sunt prevăzute cu câte un bulon acoperit cu material adeziv. După ciocnire (fig. 1) cărucioarele se mișcă împreună cu viteza u în sensul axei x . În acest caz, legea conservării impulsului scrisă în proiecții pe axa orizontală x are forma:

$$m_1 v = (m_1 + m_2) u, \quad (3)$$

unde $v = d/t_1$, $u = d/t_3$ [1], iar d este grosimea obturatorilor identice înșurubate în cărucioare. Aici t_1 este intervalul de timp în care obturatorul primului cărucior întretaie fasciculul primului senzor, iar t_3 este intervalul de timp în care obturatorul celui de al doilea cărucior întretaie fasciculul celui de al doilea senzor după interacțiunea plastică. În această experiență se pot lua diferite valori pentru masele m_1 și m_2 , precum și pentru viteza v . Calculând în continuare vitezele v și u , iar apoi impulsurile $m_1 v$ (înainte de ciocnire) și $(m_1 + m_2) u$ (după ciocnire), se poate verifica relația (3).

Observăm că la verificarea experimentală a relației (3) se vor comite anumite erori sistematice de metodă, legate de acțiunea forței exterioare de frecare (rezistență) ce acționează asupra cărucioarelor pe durata interacțiunii dintre ele, precum și după interacțiune până la măsurarea vitezei u . Aceste erori pot fi diminuate până la anumite limite. Într-adevăr, relația (3) va fi satisfăcută cu atât mai bine cu cât valoarea impulsului componenteii orizontale a forței $F_x \Delta t$ va fi mai apropiată de zero sau, mai exact, cu cât relația

$$mv \ll F_x \Delta t \quad (4)$$

va fi satisfăcută mai bine. Pentru ca produsul $F_x \Delta t$ să fie mic este nevoie să aibă valori mici forța exterioară F_x (forța de frecare - rezistența în rulmenți) și intervalul de timp $\Delta t = t_2$ de la descoperirea fasciculului senzorului A până la începutul acoperirii fasciculului senzorului B. Pentru aceasta vom așeza căruciorul al doilea pe plan în așa fel, încât imediat după măsurarea intervalului de timp t_1 , să înceapă interacțiunea primului cărucior cu cel de al doilea, iar imediat după aceasta obturatorul celui de al doilea cărucior să întretaie fasciculul senzorului B. Deci, senzorii trebuie fixați cât mai aproape unul de altul, ciocnirea producându-se între ei. Totuși intervalul de timp t_2 nu poate fi mai mic decât durata transmiterii impulsului de la un cărucior la altul. Poate fi estimată eroarea sistematică comisă în acest caz. Luând, de exemplu, masa cărucioarelor $m_1 = m_2 = 0,3 \text{ kg}$, coeficientul de frecare (rezistență) $\mu = 0,01$ [2], intervalul de timp în care acționează forța de frecare $\Delta t = t_2 = 0,2 \text{ s}$, viteza căruciorului $v = 2 \text{ m/s}$, se obține $m_1 v = 0,6 \text{ kg/(m s)}$ și $F_{fr} \Delta t = \mu (m_1 + m_2) g t_2 = 0,01 \cdot 0,6 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,2 \text{ s} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ kg/(m s)}$. În acest caz se eroarea sistematică de metodă este $\varepsilon = F_{fr} \Delta t / (m_1 v) \cdot 100\% = 2 \%$. După cum se vede din (4), dar și din exemplul analizat, pentru ca produsul $m_1 v$ să fie suficient de mare trebuie ca viteza mobilului v să nu fie prea mică. Pe de altă parte, viteza lui nu trebuie să fie nici prea mare, întrucât în aceste condiții este mai dificil de asigurat caracterul plastic al ciocnirii. La efectuarea experienței trebuie să urmărim ca după ciocnire cărucioarele să nu se desprindă unul de altul. Dacă acestea totuși se desprind chiar și foarte puțin, atunci trebuie să schimbăm materialul adeziv fixat pe buloane sau să folosim viteze mai mici ale căruciorului înainte de ciocnire.

Vom verifica experimental relația (3) considerând-o drept o funcție liniară de tipul

$$Y = pX + b, \quad (5)$$

unde $X = m_1 v = m_1 d/t_1$ și

$Y = (m_1 + m_2)u = (m_1 + m_2)d/t_3$. Pentru a trasa graficul acestei funcții, se realizează, ca și în alte experiențe, $n \geq 5$ serii a câte $N \geq 10$ măsurări ale intervalelor de timp t_1 , t_2 și t_3 , intervale ce se transferă la calculator grație interfeței cronometrului electronic utilizat. Acțiunea forței de frecare (rezistență) pe parcursul intervalului de timp t_2 fiind mică, ea va genera totuși o reducere cu o anumită valoare a mărimii Y . Dacă distanța dintre senzori rămâne aceeași pe parcursul experienței, atunci această reducere va fi aproximativ aceeași în toate seriile. Astfel, dreapta experimentală nu va mai trece prin originea de coordonate după cum o cere dependența teoretică (3), ci va tăia pe axa absciselor un mic segment δP (fig. 2). Acesta intervine ca o eroare sistematică, influența căreia asupra pantei dreptei poate fi eliminată [3]. Astfel, legea conservării impulsului în experiență va putea fi considerată ca și verificată, dacă panta dreptei (3) este $p = \tan \beta = BC/AC \approx 1$ (fig. 2). De asemenea, poate fi determinat segmentul tăiat de dreaptă pe axa absciselor, iar pe de altă parte, $\delta P \approx F_{fr} t_2$. De aici se poate estima forța de frecare (rezistența în rulmenți)

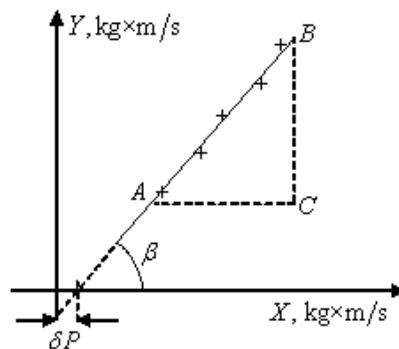


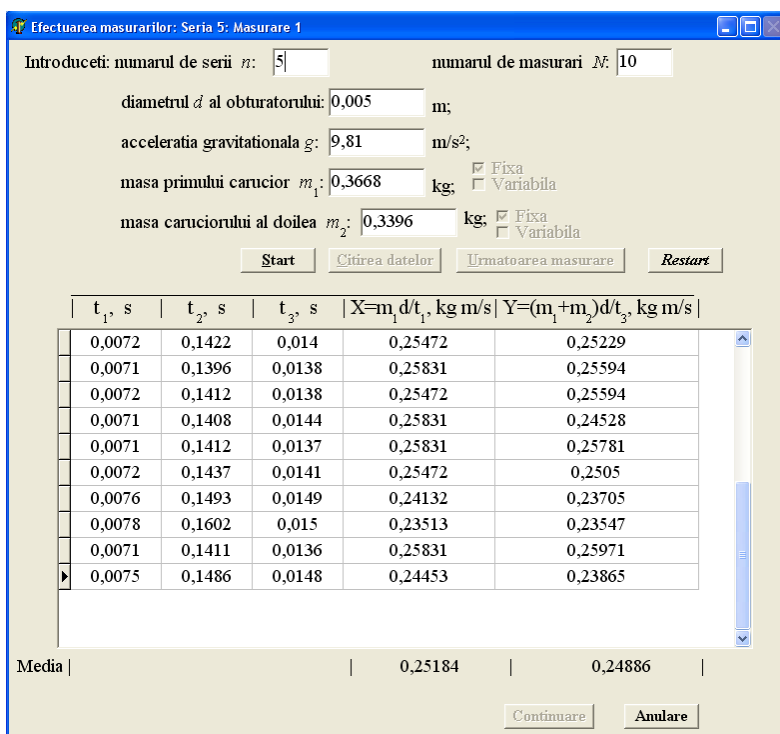
Fig. 2

$p = \tan \beta = BC/AC \approx 1$ (fig. 2). De asemenea, poate fi determinat segmentul tăiat de dreaptă pe axa absciselor, iar pe de altă parte, $\delta P \approx F_{fr} t_2$. De aici se poate estima forța de frecare (rezistența în rulmenți)

$F_{fr} = \mu(m_1 + m_2)g \approx \delta P/t_2$ și coeficientul de frecare (rezistență):

$$\mu \approx \frac{\delta P}{(m_1 + m_2)gt_2} \quad (6)$$

Pentru a putea efectua numărul dorit de repetări în aceleași condiții, se înșurubează în partea stângă a primului cărucior un bulon cu resort, care, fiind comprimat până la o anumită lungime, va asigura căruciorului la eliberare una și aceeași viteză ori de câte ori dorim. Pentru a asigura de fiecare dată aceeași deformare de comprimare, sub arc se așază o placă de care se sprijină căruciorul. Astfel, luând n deformații ale resortului (prin adăugarea sau înlăturarea de la placa amintită a unor plăcuțe mai subțiri) se pot efectua $n \geq 5$ serii a câte $N \geq 10$ măsurări. Masele cărucioarelor pot fi păstrate neschimbate sau variate la trecerea de la o serie de măsurări la alta. Variația maselor cărucioarelor se poate realiza atașând la obturatorul primului cărucior, la al celui de al doilea sau al ambelor cărucioare câte o masă din setul propus. Aceste 4 variante pot fi realizate, de asemenea, imprimând manual o viteză primului cărucior, fără a mai folosi plăcuțe. În aceste cazuri numărul de repetări nu poate fi decât $N = 1$. Pentru a compensa numărul mic de repetări se poate mări numărul de serii, fiind



prevăzute $n \geq 7$ serii. Trusa permite verificarea legii conservării impulsului la interacțiunea plastică dintre un cărucior în mișcare și un altul aflat în repaus, în toate aceste 8 variante, softul elaborat facilitând esențial acest lucru.

În *fig. 3* este reprezentată fereastra „Efectuarea măsurărilor” din softul elaborat pentru această experiență în varianta când masele cărucioarelor, la trecerea de la o serie de măsurări la alta, rămân neschimbate, variind numai impulsul primului cărucior înainte de ciocnire. Este reprezentat sfârșitul seriei a patra din câte 10 repetări. Se observă că între valorile medii ale impulsurilor înainte și după interacțiunea plastică a cărucioarelor există o mică deosebire, având loc o pierdere a impulsului în urma acțiunii forței exterioare de frecare (rezistența în rulmenți). Ca și în alte experiențe, din fiecare serie se exclud erorile grave, dacă acestea apar [3].

În *fig. 4* este reprezentat graficul dependenței liniare (3) trasat cu ajutorul softului elaborat în varianta când primului cărucior i se imprimă manual viteză în 7 serii din câte o măsurare. La trecerea de la o serie de măsurări la alta masele ambelor cărucioare au crescut cu câte 20,7 g. Graficul dependenței (3) reprezintă un segment de dreaptă cu panta $p = 1,00 \pm 0,03$, fapt ce confirmă legea conservării impulsului în experiență, întrucât valoarea

așteptată din teorie a pantei, $p = 1$, se află în interiorul intervalului de încredere $0,97 \leq p \leq 1,03$ obținut în experiență. Nivelul de încredere a fost de 68,3 %. Legea este confirmată cu eroarea relativă $\varepsilon = \Delta p / p = 2,8 \%$. Dreapta taie pe axa absciselor segmentul $\delta P \approx 0,022 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Această mărime reprezintă variația medie a impulsului sistemului sub acțiunea forței exterioare de frecare (rezistența în rulmenți) care modifică impulsul cărucioarelor în medie cu $\delta P / mv \times 100\% = 9,2 \%$. Metoda grafică de procesare a datelor experimentale permite excluderea influenței acestei erori sistematice asupra valorii pantei dreptei. Valoarea coeficientului de frecare (rezistență) la mișcarea celor

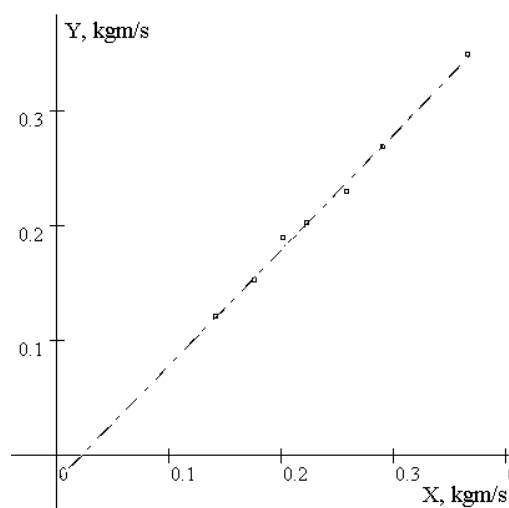


Fig. 4

două cărucioare pe planul orizontal, estimată cu formula (6) este $\mu \approx 0,01$. Aceasta practic coincide cu valoarea determinată în alte experiențe [2].

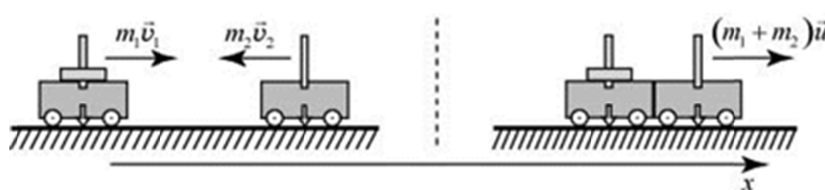


Fig. 5

Trusa permite verificarea legii conservării impulsului și în cazul interacțiunii plastice a două cărucioare ce se mișcă unul în întâmpinarea altuia. Viteza sistemului după ciocnire, \vec{u} , va avea sensul determinat de semnul diferenței $m_1 v_1 - m_2 v_2$. În *fig. 5* este indicată starea sistemului după ciocnire în cazul când $m_1 v_1 > m_2 v_2$ și cărucioarele după joncțiune se mișcă spre dreapta. Legea conservării impulsului scrisă în proiecții pe axa orizontală x are forma:

$$(m_1 + m_2)u = m_1v_1 - m_2v_2 \quad (7)$$

Măsurarea intervalelor de timp se realizează cu ajutorul a doi senzori fixați pe bară la o distanță suficientă pentru ca interacțiunea

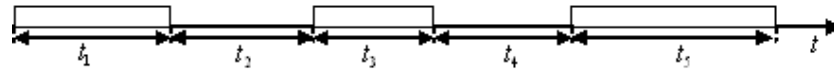


Fig. 6.

să se producă. Schema intervalelor de timp de măsurat în acest caz este dată în fig. 6. Aici t_1 este intervalul de timp în care obturatorul căruciorului 1 întretaie fasciculul sensorului, de exemplu, A, iar t_3 este intervalul de timp în care obturatorul căruciorului 2, în mișcarea sa de la dreapta spre stânga, întretaie fasciculul sensorului B. Între aceste două intervale trebuie să existe un alt interval mic de timp t_2 , întrucât în caz contrar intervalele t_1 și t_3 se vor contopi și nu va fi posibilă calcularea vitezelor cărucioarelor înainte de interacțiune: $v_1 = d/t_1$ și $v_2 = d/t_3$. t_5 este intervalul în care obturatorul căruciorului 2 aflat în joncțiune cu căruciorul 1 va întretăia fasciculul sensorului B în mișcarea sa de la stânga spre dreapta. Cu acest interval de timp se poate determina viteza sistemului după interacțiune: $u = d/t_5$. Între intervalele t_3 și t_5 trebuie să existe un interval de timp t_4 necesar pentru producerea interacțiunii. Este clar că dacă cronometrul stabilit în regimul $n - 5$ va indica numai 4 intervale, atunci aceasta va însemna că intervalele de timp t_1 și t_3 s-au contopit. În acest caz măsurările trebuie repetate, pentru aceasta existând butonul „Restart”.

Dacă $m_1v_1 < m_2v_2$, atunci după ciocnire cărucioarele se vor mișca spre stânga și legea conservării impulsului scrisă în proiecții pe axa orizontală x va avea forma:

$$(m_1 + m_2)u = m_2v_2 - m_1v_1. \quad (8)$$

Vom verifica experimental relațiile (7) și (8) considerându-le funcții liniare de tipul (5), unde

$$Y = (m_1 + m_2)u = (m_1 + m_2)d/t_5, \quad (9)$$

$$X = |m_1v_1 - m_2v_2| = |m_1 d/t_1 - m_2 d/t_3|. \quad (10)$$

Aici s-a luat modulul expresiei $m_1v_1 - m_2v_2$ pentru a ține seama de cazul când $m_1v_1 < m_2v_2$. În ambele cazuri se presupune că printre brațele sensorului trece mai întâi primul cărucior, apoi cel de al doilea.

Trasând, în continuare, graficul dependenței Y în funcție de mărimea X trebuie să obținem un segment de dreaptă (fig. 7) cu panta $p = \operatorname{tg}\beta = BC/AC \approx 1$, dacă este justificată aplicarea legii conservării impulsului în experiență. Prelungirea segmentului de dreaptă AB (fig. 7) nu va trece prin origine, după cum o cer relațiile (7) și (8), ci va tăia pe axa absciselor un segment δP ce apare datorită acțiunii forței exterioare de frecare (rezistență în rulmenți) și nu trebuie să influențeze valoarea pantei, dacă pe parcursul întregului experiment distanța dintre senzori nu se schimbă și ciocnirea are loc aproximativ în același loc pe plan.

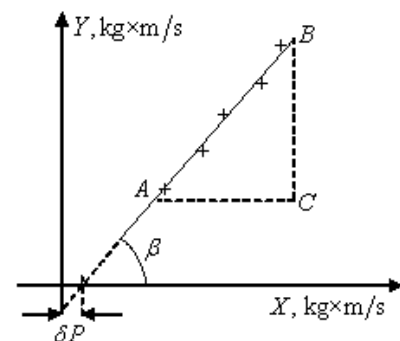


Fig.7

Această experiență, ca și cea precedentă, poate fi efectuată în 8 variante, 4 din ele presupunând efectuarea a $n \geq 5$ serii din câte $N \geq 10$ măsurări, iar altele 4 – efectuarea a $n \geq 7$ serii din câte $N = 1$ măsurări, softul elaborat permițând achiziția datelor la calculator, procesarea lor, precum și întocmirea referatului la varianta efectuată a experienței.

Cazul când printre brațele sensorului B trece mai întâi cel de al doilea cărucior, în mișcarea sa de la dreapta spre stânga, și apoi primul se reduce la cazul deja cercetat. Astfel se poate considera ca fiind primul (m_1) căruciorul care trece primul printre brațele sensorului, iar ca al doilea (m_2) – celălalt cărucior. Acest procedeu formal corespunde inversării sensului axei proiecțiilor din *fig. 5*. De aici rezultă că argumentul X al funcției liniare (5) va fi determinat întotdeauna de relația (10).

În *fig. 8* este reprezentat graficul dependenței (7) obținut cu ajutorul softului la efectuarea a $n = 10$ serii din câte $N = 1$ măsurări indirecte ale impulsurilor cărucioarelor înainte și după interacțiunea plastică dintre ele. La trecerea de la o serie de măsurări la alta masa primului cărucior a rămas neschimbată, iar masa celui de al doilea a crescut treptat cu câte 20,7 g. Vitezele cărucioarelor au fost imprimate manual. Printre brațele sensorului a trecut de fiecare dată mai întâi primul cărucior. Se observă că graficul dependenței (7) reprezintă un segment de dreaptă cu panta $p = 1,02 \pm 0,02$, fapt ce confirmă legea conservării impulsului în experiență, întrucât valoarea așteptată din teorie a pantei $p = 1$ se află în interiorul intervalului de încredere $1,00 \leq p \leq 1,04$ obținut în experiență. În această experiență, legea conservării impulsului este confirmată cu eroarea relativă $\varepsilon = \Delta p / p = 2,3\%$ și cu un nivel de încredere de 68,3 %.

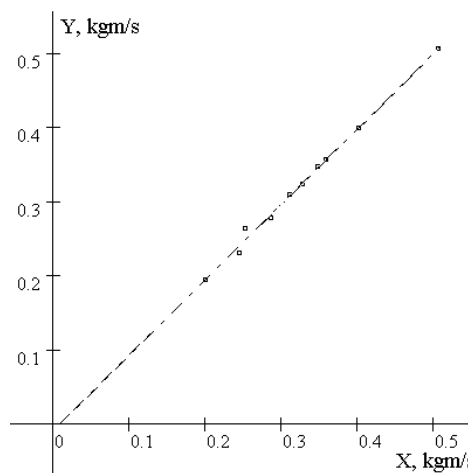


Fig. 8

Dreapta taie pe axa absciselor segmentul $\delta P \approx 0,009 \text{ kg} \times \text{m/s}$ ce reprezintă eroarea sistematică legată de acțiunea forței de frecare (rezistență) asupra cărucioarelor și constituie $\delta P / [(m_1 + m_2)u] \times 100\% \approx 2,7\%$ din impulsul cărucioarelor. Metoda grafică de procesare a datelor experimentale utilizată în experiență permite și de această dată excluderea influenței acestei erori sistematice asupra procesului de verificare a legii conservării impulsului.

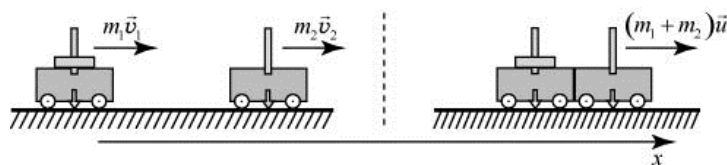


Fig. 9

În mod analog se poate verifica legea conservării impulsului și în cazul când înainte de interacțiune cărucioarele se mișcă în același sens (*fig. 9*). În acest caz (dacă $v_1 > v_2$)

$$(m_1 + m_2)u = m_1v_1 + m_2v_2, \quad (11)$$

unde $v_1 = d/t_3$, $v_2 = d/t_1$ și $u = d/t_5$. Relația (11) poate fi considerată drept o funcție liniară de tipul (5), în care $Y = (m_1 + m_2)u = (m_1 + m_2)d/t_5$ și $X = m_1v_1 + m_2v_2 = m_1d/t_3 + m_2d/t_1$. Experiența poate fi efectuată împingând căruciorul al doilea cu mâna. Primului cărucior i se poate imprima viteză fie cu ajutorul unui resort înșurubat în el, fie manual. Cum

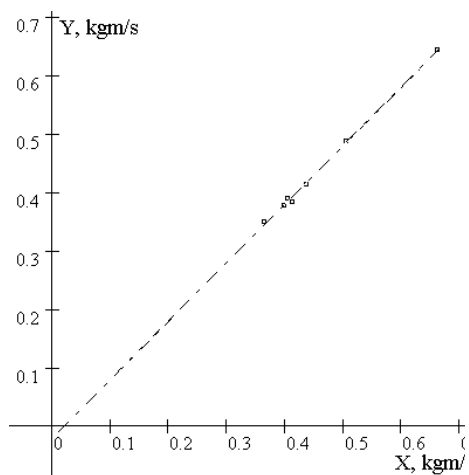


Fig. 10

viteza căruciorului al doilea nu mai poate fi repetată, nu are sens să se repete de mai multe ori nici viteza primului cărucior. De aceea se pot efectua $n \geq 7$ serii a câte $N = 1$ repetări, imprimând cărucioarelor viteze numai manual. Evident, la trecerea de la o serie de măsurări la alta, masele cărucioarelor m_1 și m_2 se pot lăsa aceleași sau se pot varia prin adăugarea pe rând a câte unei mase m_0 din setul propus. Astfel, experiența poate fi efectuată în 4 variante diferite. În *fig. 10* este reprezentat graficul dependenței (11) obținut în urma procesării la calculator a datelor achiziționate de la cronometrul electronic în 7 serii din câte 1 măsurare a intervalelor de timp t_1, t_3, t_5 . Softul elaborat este analog cu cel utilizat în experiențele anterioare. La trecerea de la o serie de măsurări la alta masele cărucioarelor au crescut treptat cu câte 20,7 g. Se observă că graficul dependenței (11) reprezintă un segment de dreaptă cu panta $p = 1,00 \pm 0,02$, fapt care confirmă legea conservării impulsului în experiență, întrucât valoarea pantei așteptată din teorie, $p = 1$, se află în interiorul intervalului de încredere $0,98 \leq p \leq 1,02$ obținut în experiență cu un nivel de încredere de 68,3 %. Acțiunea forței de frecare în experiență modifică impulsul cărucioarelor cu $\delta P / [(m_1 + m_2)u] \times 100\% \approx 4,4\%$, dar, metoda grafică utilizată la procesarea datelor permite, ca și în experiențele precedente, excluderea influenței acestei erori sistematice asupra procesului de verificare a legii conservării impulsului.

REFERINȚE

1. A. Rusu, „Trusa de mecanică asistată de calculator. Determinarea vitezei instantanee a unui mobil în mișcarea rectilinie uniform variată”. *Fizica și tehnologiile moderne*, **7**, Nr. 1-2 (24-25), 2009, pp. 25-34.
2. A. Rusu, „Trusa de mecanică asistată de calculator. Verificarea experimentală a principiului fundamental al dinamicii mișcării de translație la deplasarea unui cărucior pe planul înclinat”. *Fizica și tehnologiile moderne*, **9**, Nr. 1-2 (24-25), 2011, pp.42-48.
3. A. Rusu, C. Pîrțac, S. Rusu, „Trusa de mecanică asistată de calculator. Procesarea datelor”. *Fizica și tehnologiile moderne*, **6**, Nr. 3-4 (23-24), 2008, pp. 10-21.

Primit la redacție: 24 mai 2012